Chantal Berline

Stabilité et algèbre. 2. Groupes abéliens et modules

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A2_0>

STABILITÉ ET ALGÈBRE

2. Groupes abéliens et modules

par Chantal BERLINE (*)
[Université Paris-7]

La section A est réservée au rappel de résultats classiques sur les groupes abéliens. La section B peut être considérée comme une initiation à l'application des techniques présentées dans l'exposé 1. Nous y démontrons, en détail pour les groupes abéliens, des résultats parfois valables pour des classes beaucoup plus générales de modules. La section C est consacrée aux modules. Nous nous contentons la pluspart du temps d'énoncer les résultats ou d'en esquisser les preuves. Le lecteur intéressé par les démonstrations consultera les articles de GARAVIGLIA ([5], [6]) et les articles qui y sont mentionnés.

Conventions et notations. - Dans cet exposé, L désigne le langage des groupes abéliens $(=\ ,\ +\ ,\ 0)$, et T est la théorie des groupes abéliens exprimée dans L. R est un anneau unitaire, et T_R la théorie des R-modules à gauche exprimée dans le langage L_R qui s'obtient en ajoutant à L un symbole de fonction unaire λ pour chaque λ de R. L_R n'est donc dénombrable que si R lui-même l'est.

Pour tout module M et tout cardinal α, $M^{(\alpha)}$ désigne la somme directe de α copies de M. Rappelons que $M^{(\alpha)}$ et M^{α} sont élémentairement équivalents [8].

Enfin, tous les modules considérés ici sont des modules à gauche et tous les groupes sont abéliens.

A. Préliminaires sur les groupes abéliens.

1. Elimination des quantificateurs.

C'est un résultat classique de SZMIELEV [12] que la théorie des groupes abéliens admet l'élimination des quantificateurs dans le langage $L' = L \cup \{P_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, où les P_n sont des prédicats unaires, et $P_n(x)$ est interprété par $\exists\, y\ (ny = x)$. En particulier, toute théorie complète de groupes abéliens (dans L), telle que " n divise x " se dit sans quantificateurs, admettra l'élimination des quantificateurs dans L. C'est le cas des groupes de la forme $(\mathbb{Z}/p^n\,\mathbb{Z})^{(\alpha)}$, α cardinal quelconque, c'est aussi le cas des groupes divisibles, i. e. des groupes abéliens D tels que $nD = D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*) Chantal BERLINE, Mathématiques, Université Paris-7, Aile 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

2. Groupes divisibles ([4], vol. I).

Un groupe divisible est facteur direct de tout groupe qui le contient. Tout groupe G a un plus grand sous-groupe divisible, D ; G est donc de la forme $D \oplus R$, où R n'a pas de sous-groupe divisible non trivial. D est unique, R est unique à isomorphisme près. D est inclus dans $\Delta = \bigcap_{n \geq 1} nG$, et en général les deux groupes sont distincts ; ils coïncident exactement quand Δ est divisible.

LEMME 1. - *Si* G *est* ω-*saturé, alors* $D = \Delta$.

Démonstration. - Il faut montrer que, pour tout x de Δ et pour tout $n \geq 1$, l'équation $ny = x$ a une solution dans Δ, c'est-à-dire vérifier que l'ensemble suivant de formules à une variable libre y :

$$p(y) \ : \quad \{ny = x\} \cup \{\exists z \ (y = mz) \ ; \quad m \geq 1\}$$

est réalisable dans G. Il suffit de voir qu'il est finiment réalisable dans Δ. Or, si r est le plus grand des entiers m qui interviennent dans un sous-ensemble fini q de p, et si $x_0 \in \Delta$ est tel que $x = nr!x_0$, alors $r!x_0$ satisfait $q(y)$.

LEMME 2 ([4], I, p. 104). - *Les groupes divisibles sont, à isomorphisme près, les groupes de la forme* $D = \bigoplus_p \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{(\alpha_p)} \oplus \mathfrak{a}^{(\alpha)}$, *où* $\mathfrak{a}$ *est le groupe additif des rationnels,* $\underset{\sim}{Z}(p^\infty)$ *le* p-*groupe cocyclique infini et* α, α_p *des cardinaux quelconques.*

3. Groupes d'exposant borné.

On dit qu'on groupe G est d'exposant borné s'il y a un entier $n \geq 1$ tel que $nG = (0)$. Pour les groupes abéliens d'exposant borné, comme pour les groupes divisibles, on dispose d'un théorème de structure :

LEMME 3 ([4], I, p. 88). - *Les groupes abéliens d'exposant borné sont, à isomorphisme près, les groupes de la forme* $\bigoplus_{\text{finie}} (\underset{\sim}{Z}/p^n \underset{\sim}{Z})^{(\alpha_{p,n})}$, *où les* p *sont premiers, les* n *entiers quelconques, et les* $\alpha_{p,n}$ *des cardinaux arbitraires.*

4. Invariants de Szmielew (pour mémoire).

Les α_p, α (resp. les $\alpha_{p,n}$) constituent des systèmes d'invariants permettant de caractériser les groupes divisibles (resp. les groupes d'exposant borné) à isomorphisme près. On ne connaît pas d'invariants permettant de caractériser, à isomorphisme près, un groupe abélien quelconque. En revanche, on en connaît à équivalence élémentaire près. Wanda SZMIELEW [12] a montré que tout groupe abélien G était élémentairement équivalent à un groupe de la forme :

$$\mathfrak{a}^{(\alpha)} \oplus_p \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{(\alpha_p)} \oplus_p \underset{\sim}{Z}_p^{(\beta_p)} \oplus_{p,n} (\underset{\sim}{Z}/p^n \underset{\sim}{Z})^{(\alpha_{p,n})} ,$$

où $\underset{\sim}{Z}_p$ est le groupe additif des entiers p-adiques ([4], I, p. 17), et elle a mis en évidence des invariants qui se calculent simplement à partir des α , α_p , β_p , $\alpha_{p,n}$. Notons que les cardinaux α , α_p , ... ne sont pas, eux, déterminés de façon unique par la donnée de G , même en supposant, à l'aide de Feferman-Vaught, qu'ils sont tous $\leq \omega$; par exemple, tout groupe G d'exposant non borné et élémentairement équivalent à $G \oplus \mathbb{Q}^{(\alpha)}$, où α est un cardinal quelconque (cf. Lemme 5).

Nous ne nous servirons pas ici de la théorie de Szmielev car nous nous ramènerons toujours à des groupes divisibles ou d'exposant borné, et appliquerons les lemmes 2 et 3 (notons que ce ne serait plus possible si nous nous occupions de superstabilité).

B. Stabilité et catégoricité des groupes abéliens.

THÉORÈME 4. - Tout groupe abélien est stable.

Démonstration (BERTHIER). - Grâce à SHELAH ([10], [11]), il suffit de voir que tout $(1\ ,\ -)$ type de la théorie de G dans L' est définissable. Soit H élémentairement équivalent à G , et p un type sur H : p est réalisé par un élément a d'une extension élémentaire K de H , et il faut trouver pour toute formule $\varphi(x\ ,\ \overline{y})$ de L' une formule $\psi(\overline{y})$ de $L'(H)$ telle que

$$\forall\ \overline{b} \in H\ ,\quad K \models \varphi(a\ ,\ \overline{b}) \text{ si, et seulement si, } H \models \psi(\overline{b})\ .$$

Puisqu'on a l'élimination des quantificateurs dans L' , il suffit de regarder les formules φ atomiques de la forme $mx + y = 0$ ou $P_n(mx + y)$ $(m\ ,\ n \in \mathbb{N}^*)$. S'il y a un $c \in H$ tel que $ma + c = 0$ (resp. $P_n(ma + c)$) , on choisit $\psi(y) = y=c$ (resp. $P_n(y - c)$) , sinon on prend pour $\psi(y)$: $y \neq y$.

LEMME 5. - Pour tout premier p et tout entier $n \geq 1$,

(a) $(\mathbb{Z}/p^n\,\mathbb{Z})^{(\alpha)}$ est totalement catégorique quel que soit le cardinal α .

(b) $\mathbb{Z}(p^\infty)^n$ est $\aleph_1$-catégorique.

Démonstration. - Le (a) est laissé en exercice. Pour (b), il suffit de remarquer, en utilisant le lemme 2, que la théorie T_n des groupes divisibles ayant p^n éléments d'ordre p et aucun élément d'ordre q premier avec p a tous ses modèles de la forme $\mathbb{Z}(p^\infty)^n \oplus \mathbb{Q}^{(\alpha)}$.

Notons qu'il en résulte que T_n est complète, et donc que $\mathbb{Z}(p^\infty)$ et $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}^{(\alpha)}$ sont élémentairement équivalents pour tout α .

THÉORÈME 6 [7]. - Un groupe abélien G est ω-stable si, et seulement si, il est de la forme $D \oplus R$ avec D divisible, et R d'exposant borné.

Démonstration.

$\Longrightarrow$: la suite décroissante des sous-groupes définissables $n!G$ est stationnaire puisque G est ω-stable (théorème 18 de l'exposé précédent). Soit r tel que $n!G$ soit constante pour $n \geq r$. Si $G' \equiv G$, on a aussi $r!G' = (r+1)!G' = \dots$, donc si G' est ω-saturé, $r!G'$ est divisible (lemme 1). Par transfert, $D = r!G$ est divisible, donc facteur direct de G. $G = D \oplus R$ et $r!G \cap R = (0)$ implique $r!R = (0)$, donc R est bien d'exposant borné.

$\Longleftarrow$: L' ω-stabilité étant conservée par somme directe finie (théorème 8 de l'exposé précédent), il suffit de voir que tout groupe divisible (et tout groupe d'exposant borné) est ω-stable. Le deuxième cas est réglé par les lemmes 3 et 5 (on sait même qu'un tel groupe est de rang de Morley fini puisqu'il est somme finie de groupes $\aleph_1$-catégoriques). Soit D un groupe divisible, et $D' \equiv D$, D' dénombrable. Un type sur D' est déterminé par les formules de la forme $nx = b$ et $nx \neq b$ ($n \in \underset{\sim}{N}$, $b \in D'$) qu'il contient (utiliser l'élimination des quantificateurs dans L). Il suffit alors de compter les types possibles. On vérifie qu'il n'y en a pas plus de ω : un seul type ne contient aucune équation, et si un type p contient une équation $nx = b$, n étant le plus petit entier pour lequel cela se produit, alors le type est déterminé par cette équation et toutes les inéquations $mx \neq c$, $m < n$, $c \in D'$.

THÉORÈME 7 [7]. - <u>Un groupe abélien</u> G <u>est</u> $\aleph_1$<u>-catégorique si et seulement si, il est de l'une des deux formes suivantes</u> :

(a) $K \oplus H$ <u>avec</u> H <u>fini et</u> $K = (\underset{\sim}{Z}/p^n\,\underset{\sim}{Z})^{(\alpha)}$, α <u>fini ou non</u>.

(b) $D \oplus H$ <u>avec</u> H <u>fini et</u> D <u>divisible n'ayant pour tout</u> p <u>qu'un nombre fini d'éléments d'ordre</u> p, i. e. $D \cong \mathfrak{A}^{(\alpha)} \oplus_p \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{n_p}$ <u>où tous les</u> n_p <u>sont finis</u>.

Démonstration.

$\Longrightarrow$: On sait déjà que $G = D \oplus R$, D divisible, R d'exposant borné. Supposons qu'un $\underset{\sim}{Z}(p^\infty)$ intervienne avec un exposant infini α dans G. Alors, en utilisant la remarque qui suit le lemme 5 et plusieurs fois Feferman-Vaught, on a :

$$\begin{aligned} G &\equiv \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{(\alpha)} \oplus L \quad (\,L \text{ sans facteur } \underset{\sim}{Z}(p^\infty) \text{ et de cardinal } \leq \omega\,) \\ &\equiv \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{(\omega)} \oplus \mathfrak{A}^{(\omega_1)} \oplus L \\ &\equiv \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{(\omega_1)} \oplus \mathfrak{A}^{(\omega_1)} \oplus L \end{aligned}$$

et les deux derniers groupes sont manifestement de cardinal ω_1 et non isomorphes. Le même argument montre que si $D \neq (0)$, R ne peut contenir aucune composante en $(\underset{\sim}{Z}/p^n\,\underset{\sim}{Z})^{(\alpha)}$, α infini, et que si $D = (0)$, il ne peut y en avoir plus d'une.

$\Longleftarrow$: Une démonstration analogue à celle du lemme 5 (b) montre que les groupes $\bigoplus_p \underset{\sim}{Z}(p^\infty)^{n_p}$, où tous les n_p sont finis, sont $\aleph_1$-catégoriques. Dans le cas (a) comme dans le cas (b), G est donc produit d'un groupe $\aleph_1$-catégorique par un groupe fini. Nous verrons dans l'exposé sur les groupes que G est alors $\aleph_1$-catégorique. Dans les deux cas qui nous préoccupent ici, une démonstration directe, et simple, est possible. Nous la laissons à titre d'exercice.

THÉORÈME 8. - Un groupe abélien est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, il est d'exposant borné.

Démonstration.

$\Longrightarrow$: On utilise le fait que les formules $y = nx$, $n \in \mathbb{N}$, sont équivalentes à un nombre fini d'entre elles.

$\Longleftarrow$: si un groupe est d'exposant borné, on voit en utilisant les lemmes 3 et 5 qu'il est somme finie de groupes $\aleph_0$-catégoriques, donc $\aleph_0$-catégorique lui-même.

C. Modules.

On appelle formule existentielle positive de L_R (en abrégé, e. p. formule) toute formule de L_R de la forme

$$\varphi(x_1 , \ldots , x_n) = \exists\, y_1 , \ldots , y_p \bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p) ,$$

où les α_i sont atomiques. Si $\varphi(x)$ est une e. p. formule à une variable libre x et M un R-module, alors $\varphi^M = \{a \in M ; M \models \varphi(a)\}$ est un sous-groupe additif de M (et un R-module si R est commutatif). Soient φ_1 et φ_2 deux e. p. formules à une variable libre, on notera $[\varphi_1 : \varphi_1 \cap \varphi_2]^M$ l'indice de $\varphi_1^M \cap \varphi_2^M$ dans φ_1^M si cet indice est fini, ∞ sinon.

Les noms de BAUR, FISHER, GARAVIGLIA, MARTYANOV, MONK, SABBAGH, sont associés aux résultats suivants ; pour avoir des références précises on pourra consulter [5] et [10] (p. 294-302).

THÉORÈME 9 [2].

(a) Deux R-modules M et M' sont élémentairement équivalents si, et seulement si, pour toutes e. p. formules φ_1 et φ_2 $[\varphi_1 : \varphi_1\cap\varphi_2]^M = [\varphi_1 : \varphi_1\cap\varphi_2]^{M'}$.

(b) Modulo une théorie complète quelconque de modules, toute formule de L_R est équivalente à une combinaison booléienne de e. p. formules.

(a) fournit donc des systèmes d'invariants qui permettent de caractériser un module à équivalence élémentaire près, et en particulier de montrer que pour tout M , et tout cardinal α , $M^{(\alpha)}$ et M^{α} sont élémentairement équivalents.

(b) permet d'éliminer en partie les quantificateurs quand on travaille, ce qui est notre cas, avec des théories complètes de modules.

THÉORÈME 10. - <u>Tous les modules sont stables.</u>

<u>Esquisse de démonstration</u>. - On procède comme pour le théorème 4 : on cherche à montrer que tout type est définissable. Grâce au théorème 9 (b), il suffit de fournir des définitions aux formules existentielles positives du type ; nous le laissons en exercice, ce n'est guère plus difficile que pour le théorème 4.

Nous avons vu qu'une structure ω-stable (resp. superstable), M , n'admettait pas de ω-suite de sous-groupes M-définissables strictement décroissante (resp. d'indice infini les uns dans les autres). La réciproque est vraie dans le cas des modules. Avant de l'énoncer, remarquons que la notion d' ω-stabilité n'a de sens que pour un langage dénombrable. Pour inclure le cas R non dénombrable, il nous faut donc utiliser la notion plus générale de théorie totalement transcendante (i. e. tout 1-type a un rang de Morley) les deux notions coïncident dans le cas dénombrable, de plus si M est totalement transcendant, il n'a évidemment pas non plus de ω-suite décroissante stricte de sous-groupes, car une telle suite fournirait une ω-suite strictement décroissante d'ordinaux (utiliser le lemme 19 de l'exposé précédent).

THÉORÈME 11 ([5], [6]). - <u>Un R-module M est totalement transcendant (resp. superstable) si, et seulement si, il n'a pas de ω-suite de sous-groupes définissables (par e. p. formules de L_R) strictement décroissante (resp. d'indices infinis les uns dans les autres).</u>

<u>Démonstration</u>. - Nous nous contenterons de traiter le cas de l' ω-stabilité. L'idée de base est la même pour la superstabilité. Pour la totale transcendance, il faudrait bien sûr faire un raisonnement par récurrence sur les rangs. Supposons donc que R est dénombrable et que le R-module M n'a pas de ω-suite strictement décroissante de sous-groupes définissables par des e. p. formules, alors il n'a pas non plus de ω-suite strictement décroissante de sous-ensembles M-définissables par des e. p. formules : soient $\varphi(x , \vec{y})$ et $\psi(x , \vec{z})$ deux e. p. formules à, respectivement, $m + 1$ et $n + 1$ variables libres ; soient $\vec{b} \in M^m$ et $\vec{c} \in M^n$ des paramètres. Il suffit de montrer que $\varphi(x , \vec{b})^M \not\subseteq \psi(x , \vec{c})^M$ implique $\varphi(x , \vec{o})^M \not\supseteq \varphi(x , \vec{o})^M$, et pour ça de remarquer que, pour tout $a \in M$,

$$M \models \forall x(\varphi(x , \vec{b}) \wedge \varphi(a , \vec{b}) \leftrightarrow \varphi(x - a , \vec{o}) \wedge \varphi(a , \vec{b})) .$$

Soit M' un R-module dénombrable élémentairement équivalent à M . Il nous faut montrer qu'il n'y a pas plus de ω-types à paramètres dans M . On commence par énumérer les e. p. formules à paramètres dans M . Soit $\varphi_n(n(x , \vec{b}_n)$, $n \in \underset{\sim}{N}$, une telle énumération. A tout type p , on associe le plus petit entier n tel que la formule $\varphi_n(x , \vec{b}_n)$ soit dans p et que le sous-ensemble défini dans M par $\varphi_n(x , \vec{b}_n)$ soit minimal parmi les sous-ensembles définis par une e. p. formule de p . Soit f(p) cet entier. Nous allons montrer que f est injective. En effet, si $f(p) = f(q)$, et si $\varphi_n(x , \vec{b}_n)$ est une e. p. formule quelconque de p ,

$\varphi_n(x, \vec{b}_n) \wedge \varphi_{f(p)}(x, \vec{b}_{f(p)})$ est une e. p. formule de p (à équivalence près). D'après le choix de $f(p)$, elle est équivalente à $\varphi_{f(p)}(x, \vec{b}_{f(p)})$ comme $f(p) = f(q)$,

$$M' \models \varphi_{f(q)}(x, \vec{b}_{f(p)}) \rightarrow \varphi_n(x, \vec{b}_n),$$

donc $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$ est dans q. De même, toute e. p. formule de q à paramètre dans M' est dans p, on conclue avec le théorème 9(b) que $p = q$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 12. - Tout module $\aleph_0$-catégorique est totalement transcendant.

En effet, un tel module n'a qu'un nombre fini de sous-groupes définissables sans paramètres.

La notion de R-module injectif (i. e. facteur direct de tout R-module qui le contient) généralise celle de groupe abélien divisible. On a vu que tout groupe divisible est ω-stable ; plus généralement on a le théorème suivant.

THÉORÈME 13 ([6], [9]). - Si R est noethérien, alors tout R-module injectif est totalement transcendant (et la réciproque est vraie).

Nous terminerons par l'énoncé, sous une forme un peu plus forte, d'un théorème de Baur :

THÉORÈME 14 ([1], [6]). - Un R-module M est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, il y a des R-modules finis $M_1, \ldots, M_n$ et des cardinaux $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$M = M_1^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\alpha_n}.$$

REFERENCES

[1] BAUR (W.). - $\aleph_0$-categorical modules, J. symb. Logic, t. 40, 1975, p. 213-220.

[2] BAUR (W.). - Elimination of quantifiers for modules, Israel J. of Math., t. 25, 1976, p. 64-70.

[3] EKLOV (P. C.) and FISCHER (E. R.). - The elementary properties of abelian groups, Annals of math. Logic, Amsterdam, t. 4, 1972, p. 115-171.

[4] FUCHS (L.). - Infinite abelian groups, Vol. I and II. - New York, Academic Press, 1970-1973 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 36).

[5] GARAVIGLIA (S.). - Direct product decomposition of theories of modules, J. of symb. Logic, t. 44, 1979, p. 77-88.

[6] GARAVIGLIA (S.). - Decomposition of totally transcendental modules, J. of symb. Logic, t. 45, 1980, p. 155-164.

[7] MACINTYRE (A.). - On ω_1-categorical theories of abelian groups, Fund. Math. Warszawa, t. 70, 1971, p. 253-270.

[8] SABBAGH (G.). - Aspects logiques de la pureté dans les modules, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 909-912.

[9] SABBAGH (G.). - Catégoricité et Stabilité : Quelques exemples parmi les groupes et les anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 603-606.

[10] SHELAH (S.). - The lazy model-theoretician's guide to stability, Logique et Analyse, Louvain, nouvelle série, t. 18, 1975, 71-72, p. 241-308.

[11] SHELAH (S.). - Stability, the f. c. p., and superstability : model theoretic properties of formulas in first order theory, Annals math. Logic, t. 13, 1971, p. 271-362.

[12] SZMIELEW (W.). - Elementary properties of abelian groups, Fund. Math., Warszawa, t. 41, 1955, p. 203-271.