GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

CHANTAL BERLINE

Stabilité et algèbre. 1. Pratique de la stabilité et de la catégoricité

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A1_0>

STABILITÉ ET ALGÈBRE

1. Pratique de la stabilité et de la catégoricité

par Chantal BERLINE (*)
[Université Paris-7]

Conventions. - L est un langage dénombrable du premier ordre. Dans les applications pratiques, L sera en général le langage des groupes (avec ou sans symbole pour l'inverse) ou le langage des anneaux. Si M est une réalisation de L (on notera également M son ensemble sous-jacent), $T(M)$ désigne la théorie complète de M dans L, c'est-à-dire l'ensemble des formules closes de L satisfaites par M. $L(M)$ est le langage $L \cup \{c_m ; m \in M\}$ où les c_m sont des symboles de constantes réalisés dans M par les m correspondants. "Définissable" sous-entendra presque toujours "sans paramètres" i. e. définissable par une formule de L). " M-définissable" signifiera en revanche "définissable par une formule de $L(M)$ ". Le rang de Morley d'une formule φ (resp. d'un type p), calculé dans la théorie $T(M)$, sera noté $R_M(\varphi)$ (resp. $R_M(p)$), "M" désignant ici la réalisation M et non le nom du fondateur du rang. Le rang de Morley de M, $R_M(x=x)$, sera noté α_M. Enfin un n-uplet $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de M sera souvent noté $\bar{a}$.

A. $\aleph_0$-catégoricité.

Par définition, M est $\aleph_0$-catégorique si $T(M)$ l'est, c'est-à-dire si $T(M)$ a un seul modèle dénombrable à isomorphisme près. Tout M fini est donc $\aleph_0$-catégorique. RYLL-NARDZEWSKI a montré qu'une théorie T était $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble (noté par ailleurs $S_n(\emptyset)$) des n-types de L consistants avec T était fini. Puisqu'un n-type est déterminé par l'ensemble des formules qu'il contient, et qu'une formule est déterminée, à équivalence modulo T près, par l'ensemble des types qui la contiennent, le critère précédent s'énonce aussi :

THÉORÈME 1. - M est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, il n'y a qu'un nombre fini de formules de L à n variables libres, à équivalence modulo $T(M)$ près.

En d'autres termes, pour tout $n \geqslant 1$, M^n n'a qu'un nombre fini de sous-ensembles définissables.

(*) Chantal BERLINE, Mathématiques, Université Paris-7, Aile 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

COROLLAIRE 2. - Si M est $\aleph_0$-catégorique, les valeurs des termes de L sur un même n-uplet de M^n sont en nombre fini.

Démonstration. - Il est clair qu'un peut "relativiser" le théorème 1 à n'importe quel ensemble Φ de formules à n variables libres, et donc affirmer que si M est $\aleph_0$-catégorique il y a des formules $\varphi_1 , \ldots , \varphi_{k(n)}$ dans Φ telles que, pour toute formule φ de Φ,

$$M \models \bigvee_{i=1}^{k(n)} \quad \forall\, \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi_i(\overline{x})) .$$

Il suffit alors d'appliquer cette remarque à l'ensemble Φ des formules $y=t(\overline{x})$, où t est un terme à n variables quelconque de L. On a en fait montré un peu plus que ce qu'on a énoncé.

Nous dirons qu'une réalisation M de L est de type fini et engendrée par les n éléments $a_1 , \ldots a_n$ de M si tout élément x de M est la valeur en $\overline{a}$ d'un terme t de L (i. e. $x = t(\overline{a})$). M est localement finie si toute sous-structure de type fini de M est finie. Enfin M est uniformément localement finie s'il y a une application $f : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{N}$ telle que toute sous-structure de M engendrée par $\leq n$ éléments est finie et de cardinal $\leq f(n)$. On a donc montré en particulier le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - Si M est $\aleph_0$-catégorique, M est uniformément localement finie.

Exemples d'applications.

1° Un groupe $\aleph_0$-catégorique est uniformément localement fini au sens algébrique, en particulier il est d'exposant borné, i. e. il y a un $n \geq 1$ tel que, pour tout x on ait $x^n = 1$.

2° Tout corps $\aleph_0$-catégorique est (commutatif et) fini. En effet, il est localement fini, donc localement commutatif, donc commutatif, et de plus tous ses éléments non nuls sont racines d'une même équation $x^n = 1$.

THÉORÈME 4. - Si M est dénombrable, alors M est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, pour tout $n \geq 1$, tous les éléments de M^n sont isomorphes à un nombre fini d'entre eux (par un automorphisme de M).

Démonstration.

$\Leftarrow$: Si M n'est pas $\aleph_0$-catégorique, on peut trouver, pour un certain n et pour tout m, m formules à n variables libres de L non équivalentes modulo $T(M)$. Il est facile d'en déduire, pour tout m, m formules consistantes et 2 à 2 inconsistantes à n variables libres. Soient alors $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_m$ des éléments de M^n satisfaisant respectivement ces formules ; il est clair que si $i \neq j$, $\overline{a}_i$ et $\overline{a}_j$ ne s'échangent pas par un automorphisme de M.

$\Rightarrow$: Réciproquement si M est dénombrable et $\aleph_0$-catégorique, M est saturé, donc homogène, ce qui revient exactement à dire que, pour tout n, deux n-uplets de même type (sur $\emptyset$) sont isomorphes.

Le théorème suivant exprime en particulier que l' $\aleph_0$-catégoricité est préservée : par appauvrissement de L, par enrichissement de L par un nombre fini de constantes et de symboles définissables, par sous-structure définissable, par quotient par une congruence définissable.

THÉORÈME 5. - Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formules à paramètres dans la réalisation M de L telles que $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ définissent des relations ou des fonctions sur le sous-ensemble N de M^n défini par φ (n = nombre de variables libres de φ, $n \geqslant 1$). Soient $b_1, \dots, b_\ell$ des éléments de N. Alors si M est $\aleph_0$-catégorique, N, muni des relations, fonctions et constantes précédemment définies, est $\aleph_0$-catégorique.

Exemples.

(a) M est un anneau, N son groupe additif. On en déduit qu'un anneau $\aleph_0$-catégorique est toujours de caractéristique finie (ce qui se voit tout aussi bien directement).

(b) M est un anneau unitaire, N l'algèbre de Boole de ses idempotents centraux (la multiplication de N est induite par celle de M, mais la somme des idempotents centraux u et v est $u + v - uv$).

(c) M est un anneau, N le quotient de M par son radical de Jacobson.

(d) M est un anneau unitaire A, N l'anneau de matrices $\mathfrak{M}_r(A)$.

(e) M est l'anneau de matrices $\mathfrak{M}_r(A)$, N est l'anneau A.

Démonstration du Théorème 5, pour $n = 1$ (Le lecteur est invité à vérifier qu'elle marche dans le cas général modulo quelques modifications de détail).

En fait, on a ajouté à L un nombre fini de constantes de M, puis ajouté ou/et retranché des symboles définissables sans paramètres, puis on s'est restreint à un sous-ensemble définissable de M. Donc, en gros, si M vérifiait le critère de Ryll-Nardzewski, N le vérifie aussi. Nous allons toutefois donner une démonstration précise qui nous servira par la suite.

A toute formule $\xi(\overline{x})$ du langage L' de N, on peut associer une formule $\tilde{\xi}(\overline{x})$ de $L(M)$ qui a le même nombre de variables libres que ξ et telle que

$$\forall\, \overline{a} \in M\,,\quad M \models \tilde{\xi}(\overline{a}) \text{ si et seulement si } \overline{a} \in N \text{ et } N \models \xi(\overline{a})\,.$$

De plus, les $\tilde{\xi}$ ont pour paramètres au plus les constantes b_j et les paramètres qui intervenaient dans φ et les φ_i, c'est-à-dire un nombre fini r d'éléments de M. Il est alors clair que s'il existait une suite infinie ξ_n de formules de L' non deux à deux équivalentes modulo $T(N)$ et à k variables libres, on obtiendrait facilement à partir des $\tilde{\xi}_n$ une suite de formules de L à $k + r$ variables libres non équivalentes modulo $T(M)$. On aurait pu aussi compter directement les types (cf. la démonstration du théorème 7).

Remarque. - Il doit être clair que l' $\aleph_0$-catégoricité est toujours détruite par l'adjonction d'un nombre infini de constantes distinctes. D'autre part, ajouter un nombre quelconque de relations et fonctions définissables, où seul un nombre fini de paramètres intervient, à une structure $\aleph_0$-catégorique revient toujours à n'en ajouter qu'un nombre fini puisqu'elles sont toutes équivalentes à un nombre fini d'entre elles.

THÉORÈME 6. - Soient $M_1, \ldots, M_k$ k réalisations non vides de L, et $M = \prod_{i=1}^{k} M_i$. Si chaque M_i est $\aleph_0$-catégorique, M l'est.

Démonstration. - Si tous les M_i sont dénombrables, on applique le théorème 4. Sinon on choisit des M_i' élémentairement équivalents aux M_i et dénombrables. Par Feferman-Vaught/Ehrenfeucht-Fraïsse, le produit des M_i' est élémentairement équivalent à M, et on est ramené au cas précédent. Remarquons que là aussi on aurait pu compter directement les types (cf. la démonstration du théorème 8).

B. Stabilité.

Soit λ un cardinal infini. Par définition, M est λ-stable si $T(M)$ l'est. M est donc λ-stable si et seulement si pour tout M' élémentairement équivalent à M et de cardinal $\leq \lambda$ l'ensemble $S(M')$ des 1-types à paramètres dans M' est de cardinal $\leq \lambda$. Tout M fini est donc λ-stable. Remarquons que contrairement à ce qui se passe pour l' $\aleph_0$-catégoricité, le résultat sur les 1-types implique le résultat analogue sur les n-types pour tout $n \geq 1$. M est stable si elle est λ-stable pour un λ.

1. Théorèmes de préservation.

Le théorème suivant exprime en particulier que la stabilité est préservée : par appauvrissement de L, par enrichissement de L par un nombre dénombrable de constantes et de symboles définissables, par sous-structure définissable, et par quotient par une congruence définissable.

THÉORÈME 7. - Soient $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ des formules à paramètres dans la réalisation M de L, telles que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ définissent des relations et des fonctions sur le sous-ensemble N de M^n défini par φ (n = nombre de variables libres de φ, $n \geq 1$). Soient $b_1, \ldots, b_\ell, \ldots$ des éléments de N. Alors

(a) Si M est λ-stable, N, muni des relations, fonctions et constantes précédemment définies, est λ-stable.

(b) $\alpha_N \leqslant \alpha_M$, plus précisément $\alpha_N \leqslant R_M(\varphi)$.

Démonstration.

(a) Appelons "bon modèle" de $T(N)$, tout N' élémentairement équivalent à N , et "placé" dans une extension élémentaire M' de M comme N est placé dans M , à savoir : si N est l'ensemble des $\overline{x}$ de M^n tels que $M \models \varphi(\overline{x}, \overline{a})$ $(\overline{a} \in M^m)$, on demande que N' soit l'ensemble des $\overline{x}$ de M'^n tels que $M' \models \varphi(\overline{x}, \overline{a})$ pour le même $\overline{a}$) et que les fonctions et relations de N' soient M'-définissables par les mêmes formules qui définissent dans M les fonctions et relations de N . Alors, tout modèle de $T(N)$ se plonge élémentairement dans un bon modèle de même cardinalité (c'est un exercice de diagramme).

En conséquence, pour démontrer (a), il suffit de compter les types sur les bons modèles. Nous utiliserons la traduction $\xi \longrightarrow \tilde{\xi}$ introduite dans la démonstration du théorème 5 (il intervient ici éventuellement une infinité de constantes). Là encore nous écrivons la démonstration pour $n = 1$ et invitons le lecteur à la modifier pour atteindre le cas général. A tout type p de $S(N')$, nous associons

$$\tilde{p} = \{\tilde{\xi}(x, \overline{b}) ; \overline{b} \in N', \xi(x, \overline{b}) \in p\} .$$

$\tilde{p}$ est finiment réalisable dans M' et se complète donc en au moins un type sur M' . D'autre part, l'application $p \longrightarrow \tilde{p}$ est clairement injective, donc $\mathrm{card}(S(N')) \leqslant \mathrm{card}(S(M'))$.

(b) Le rang de M étant en fait une propriété de $T(M)$, on peut supposer, en changeant de M au besoin, que M est ω-saturé. Auquel cas N l'est aussi. Il suffit alors de regarder les rangs des types à paramètres dans M (resp. N) (les rangs de Morley et de Cantor-Bendixon coïncident).

On va montrer que, pour toute formule $\psi(x, \overline{n})$ à paramètres $\overline{n}$ dans N , on a

$$R_N(\psi(x, \overline{n})) \leqslant R_M(\tilde{\psi}(x, \overline{n}) \wedge \varphi(x, \overline{a}))$$

en montrant par récurrence sur l'ordinal α que si le premier terme est $\geqslant \alpha$, le deuxième l'est aussi. Si α est limite, c'est clair. Sinon $\alpha = \beta + 1$, ψ se scinde pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ en k formules $\psi_i(x, \overline{n}_i)$, $i = 1, \dots, k$, à paramètres dans N , inconsistantes deux à deux, et de rang $\geqslant \beta$. $\tilde{\psi}$ se scinde alors en les $\tilde{\psi}_i$, et il suffit d'employer l'hypothèse de récurrence.

Avant d'énoncer le théorème suivant rappelons qu'on définit par récurrence la somme naturelle $\alpha \oplus \beta$ de deux ordinaux α et β : c'est le premier ordinal strictement supérieur à tous les $\alpha' \oplus \beta'$ tels que $\alpha' \leqslant \alpha$ et $\beta' < \beta$, où $\alpha' < \alpha$ et $\beta' \leqslant \beta$. Cette somme est symétrique en α et β . Elle coïncide avec la somme ordinale usuelle sur les ordinaux finis. Nous conviendrons que $\alpha \oplus \infty = \infty \oplus \alpha = \omega$.

THÉORÈME 8. - Soient $M_1, \dots, M_k$ k réalisations non vides de L , et

$M = \prod_{i=1}^{k} M_i$. Alors,

(a) si chaque M_i est λ-stable, M est λ-stable,

(b) $\alpha_M \leqslant \bigoplus_{i=1}^{k} \alpha_{M_i}$,

(c) si, de plus, les M_i sont M-définissables, la réciproque de (a) est vraie, et $\alpha_M = \bigoplus_{i=1}^{k} \alpha_{M_i}$.

Remarque. - L'hypothèse qui figure dans (c) est automatiquement vérifiée si les M_i sont des anneaux unitaires.

Démonstration du théorème 8, avec $k = 2$. - Soit $\hat{M}$ la réalisation $M = M_1 \times M_2$ enrichie de ses deux projections π_1 et π_2 sur M_1 et M_2 . Les modèles de $T(\hat{M})$ sont de la forme $\hat{M}' = M_1' \times M_2'$ avec $M_1' \equiv M_1$ et $M_2' \equiv M_2$, $\hat{M}'$ étant muni de ses projections sur M_1' et M_2' . A tout type p de $S(\hat{M})$, on associe ses projections $p_1 \in S(M_1)$ et $p_2 \in S(M_2)$ qui sont telles que, pour toute formule φ_i de $L(M_i)$ à une variable libre,

$$p_i \vdash \varphi_i(x) \text{ si et seulement si } p \vdash \varphi_i(\pi_i(x)) \ .$$

Cette application, h , est continue surjective. Elle est injective par Feferman-Vaught, etc., c'est donc un homéomorphisme du compact $S(\hat{M})$ sur le compact $S(M_1) \times S(M_2)$. Soient $\varphi_1 \in L(M_1)$ et $\varphi_2 \in L(M_2)$, deux formules à une variable libre. Notons $\varphi_1 \times \varphi_2$ la formule de $L(\hat{M})$ définie par :

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x) = \varphi_1(\pi_1(x)) \wedge \varphi_2(\pi_2(x)) \ .$$

Puisque h^{-1} est continue, $S(\hat{M})$ a une base de voisinages de la forme $\varphi_1 \times \varphi_2$. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

(a) Supposons M_1 et M_2 λ-stables. Avec le théorème 7, il suffit de démontrer que $\hat{M}$ est λ-stable. Soit donc $\hat{M}'$ un modèle de $T(\hat{M})$ de cardinal $\leqslant \lambda$. Alors $\hat{M}' = M_1' \times M_2'$, où M_1' et M_2' sont respectivement modèles de $T(M_1)$ et $T(M_2)$ et de cardinal $\leqslant \lambda$. D'après ce que nous venons de voir,

$$\mathrm{card}(S(\hat{M}')) = \mathrm{card}(S(M_1')) \times \mathrm{card}(S(M_2')) \leqslant \lambda \times \lambda = \lambda \ ,$$

et $\hat{M}$ est λ-stable.

(b) Compte tenu du théorème 7, il suffit de montrer

$$(*) \qquad \alpha_{\hat{M}} = \alpha_{M_1} \oplus \alpha_{M_2} \ .$$

Si M_1 et M_2 sont ω-stables, la démonstration de (a) montre que $\hat{M}$ l'est l'est aussi ; réciproquement, si $\hat{M}$ est ω-stable, M_1 et M_2 , qui sont définissables (au sens du théorème 7) dans $\hat{M}$, sont aussi ω-stables. Si l'un des rangs est infini, (*) est donc automatiquement vérifiée et nous n'avons plus à nous préoccuper que du cas où M_1 , M_2 , $\hat{M}$ sont ω-stables, c'est-à-dire du cas où tous les types ont pour rang un ordinal. Nous supposerons de plus que $\hat{M}$ est ω-saturé, auquel cas M_1 et M_2 le sont aussi, ce qui revient là encore à travailler avec les rangs de Cantor-Bendixon. Pour montrer (*), il suffit de prouver que, pour tout type $p = p_1 \times p_2$ de $S(\hat{M})$, on a

$$(*)' \qquad R_{\hat{M}}(p) = R_{M_1}(p_1) \oplus R_{M_2}(p_2) .$$

Par récurrence sur le second membre de (*)', on montre qu'il est toujours $\geqslant$ au premier. Soit φ_1 une formule de $L(M_1)$ qui isole p_1 parmi les types de $S(M_1)$ de rang $\geqslant R_{M_1}(p_1)$, et φ_2 une formule analogue pour p_2 . Soit $q \in \varphi_1 \times \varphi_2$. Si $q \neq p$, on a clairement

$$R_{M_1}(q_1) \oplus R_{M_2}(q_2) < R_{M_1}(p_1) \oplus R_{M_2}(p_2)$$

et, en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$R_{\hat{M}}(q) = R_{M_1}(q_1) \oplus R_{M_2}(q_2) < R_{M_1}(p_1) \oplus R_{M_2}(p_2) ,$$

donc $\varphi_1 \times \varphi_2$ isole p parmi les types de rang supérieur ou égal à

$$R_{M_1}(p_1) \oplus R_{M_2}(p_2) .$$

C'est également par récurrence sur le second membre de (*)' qu'on montre qu'il est toujours $\leqslant$ au premier. Soit φ isolant p des autres types de $S(\hat{M})$ de rang $\geqslant R_{\hat{M}}(p)$. On peut supposer φ de la forme $\varphi_1 \times \varphi_2$ avec $\varphi_1 \in p_1$ et $\varphi_2 \in p_2$. Il faut montrer que, pour tout $\alpha < R_{M_1}(p_1)$, on a

$$\alpha \oplus R_{M_2}(p_2) < R_{\hat{M}}(p) .$$

Puisque M_1 est ω-saturé, il y a un type q_1 dans φ_1 tel que $\alpha = R_{M_1}(q_1)$. Soit $q = (q_1 , p_2)$. Avec l'hypothèse de récurrence et le fait que q est dans $\varphi_1 \times \varphi_2$, on a

$$\alpha \oplus R_{M_2}(p_2) = R_{\hat{M}}(q) < R_{\hat{M}}(p) .$$

De même, pour tout $\beta < R_{M_2}(p_2)$, on a

$$R_{M_1}(p_1) \oplus \beta < R_{\hat{M}}(p) ,$$

et il suffit alors d'utiliser la définition de $\oplus$.

(c) Si M_1 et M_2 sont M-définissables, π_1 et π_2 le sont aussi. Donc, par double application du théorème 7, on a

$$\alpha_{\hat{M}} \leqslant \alpha_M \leqslant \alpha_{\hat{M}}$$

et

$$\alpha_M = \alpha_{\hat{M}} = \alpha_{M_1} \oplus \alpha_{M_2} .$$

2. Conditions de chaîne et d'arbre.

Soit T une théorie complète du langage dénombrable L , et M un modèle de T . Dans la définition qui suit " M-formule" signifie formule à paramètres dans M et consistante avec le diagramme élémentaire de M , $\mathcal{D}(M)$, i. e. satisfaisable dans une extension élémentaire de M .

Nous appellerons <u>arbre de</u> M , tout ensemble de M-formules $\{\varphi_{\sigma,i}\}$ indexé par un ensemble de la forme $\nu^{\mu} \times \mu$ (où μ et ν sont des cardinaux quelconques mais fixes), et satisfaisant les conditions suivantes : pour tous σ , $\tau \in \nu^{\mu}$ et tous i , $j < \mu$,

(i) Si $i < j$, alors $\mathcal{D}(M) \vdash [\varphi_{\sigma,j} \to \varphi_{\sigma,i}]$ et $\mathcal{D}(M) \cup \{\varphi_{\sigma,j}\}$ est consistant,

(ii) Si $\sigma \restriction i + 1 = \tau \restriction i + 1$, alors $\mathcal{D}(M) \vdash [\varphi_{\sigma,i} \leftrightarrow \varphi_{\sigma,j}]$

(iii) Si $\sigma \restriction i = \tau \restriction i$ et $\sigma(i) = \tau(i)$, alors $\mathcal{D}(M) \vdash [\neg(\varphi_{\sigma,i} \wedge \varphi_{\tau,i})]$.

Nous dirons que l'arbre est de <u>hauteur</u> μ et <u>branche</u> ν <u>fois</u> à chaque noeud. Nous dirons que $\varphi_{\sigma,i}$ est au <u>niveau</u> i et appartient à la <u>branche</u> σ . (i) exprime donc que chaque branche de formules est consistante avec $\mathcal{D}(M)$, et (iii) que deux branches distinctes sont mutuellement inconsistantes.

THÉORÈME 9. - <u>Si un modèle</u> M <u>de</u> T <u>a un arbre de hauteur infinie dont toutes les formules sont identiques, à un changement de paramètre près, alors</u> T <u>est instable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Par compacité et Lowenheim-Skolem, on peut trouver, pour tout cardinal μ , un modèle M' de T et un arbre de M' de hauteur μ . On peut également supposer que l'arbre branche exactement 2 fois à chaque noeud. Soit λ un cardinal quelconque, et μ le plus petit cardinal tel que $2^{\mu} > \lambda$. Alors $\mu \leqslant \lambda$, et un arbre de hauteur μ fera intervenir $\sup_{\mu'<\mu} 2^{\mu'} \leqslant \lambda$ paramètres, et fournira $2^{\mu} > \lambda$ types distincts.

THÉORÈME 10 (Propriété de l'ordre). - <u>S'il existe une formule</u> φ <u>à paramètres dans un modèle</u> M <u>de</u> T <u>et à</u> $k + \ell$ <u>variables libres</u> $(k , \ell \geqslant 1)$, <u>une suite</u> $\overline{a}_n$ $(n \in \underset{\sim}{N})$ <u>d'éléments de</u> M^k , <u>et une suite</u> $\overline{b}_n$ $(n \in \underset{\sim}{N})$ <u>d'éléments de</u> M^{ℓ} <u>telles que</u>

$$M \models \varphi(\overline{a}_i , \overline{b}_j) \quad \underline{\text{si et seulement si}} \quad i < j ,$$

<u>alors</u> T <u>est instable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $(I , \leqslant)$ un ordre de cardinal λ ayant au moins λ^{+} coupures (il en existe : si μ est le plus petit cardinal tel que $\lambda^{\mu} > \lambda$, alors $\mu \leqslant \lambda$, et $\lambda^{<\mu} = \bigcup_{\alpha<\mu} \lambda^{\alpha}$ est de cardinal λ et est dense dans λ^{μ} ordonné lexicographiquement). Soit S l'ensemble des coupures s de I .

$$T \cup \{\varphi(\overline{x}_i , \overline{y}_s) \ ; \ i \in s\} \cup \{\neg\varphi(\overline{x}_i , \overline{y}_s) \ ; \ i \notin s\}$$

est consistant par hypothèse, donc il existe dans un modèle M' de T des $\overline{a}_i$, $i \in I$, et des b_s , $s \in S$, tels que

$$M' \models \varphi(\overline{a}_i , \overline{b}_s) \quad \text{si et seulement si} \quad i \in s .$$

L'ensemble A des $\bar{a}_i$, $i \in I$, est de cardinal λ et les $\bar{b}_s$, $s \in S$, réalisent au moins λ^+ types distincts sur tout modèle de cardinal λ contenant A .

COROLLAIRE 11. - S'il existe une formule φ à paramètres dans un modèle M de T et à $2k$ variables libres, $k \geq 1$, et une suite $\bar{a}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ d'éléments de M^k telles que

$$M \models \varphi(\bar{a}_i , \bar{a}_j) \text{ si et seulement si } i < j ,$$

alors T est instable. En d'autres termes, si M est stable, il n'y a d'ordre M-définissable sur aucune partie infinie d'un M^k , $k \in \mathbb{N}$.

Exemple d'application. - Tout anneau de Boole infini est instable. En fait, un tel anneau est très fortement instable (cf. théorème 14).

COROLLAIRE 12. - Si M est stable, M n'a pas de suite infinie strictement croissante ou décroissante de sous-ensembles définissables par une même formule de L (et des paramètres différents).

COROLLAIRE 13 (Propriété de l'ordre strict). - S'il existe une formule φ à paramètres dans un modèle M de T et à $k + \ell$ variables libres $(k , \ell \geq 1)$, et une suite $\bar{a}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ d'éléments de M^ℓ telles que

$$M \models \exists x[\varphi(\bar{x} , \bar{a}_i) \wedge \varphi(\bar{x} , \bar{\ }_j)] \text{ si et seulement si } i < j ,$$

alors T est instable.

THÉORÈME 14 (Propriété d'indépendance). - S'il existe une formule φ à paramètres dans un modèle M de T et à $k + \ell$ variables libres $(k , \ell \geq 1)$, et une suite $\bar{a}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ d'éléments de M^ℓ telles qu'aucune combinaison booleienne (non évidemment contradictoire) des sous-ensembles de M^k définis par les formules $\varphi(\bar{x} , \bar{a}_n)$ ne soit vide, alors T est instable.

Démonstration. - Si T satisfait aux hypothèses du théorème, on peut trouver, pour tout λ , un ensemble A de ℓ-uplets ayant la même propriété que les $\bar{a}_n$ pour φ et de cardinal λ (compacité et Lowenheim-Skolem). Sur tout modèle de T de cardinal λ qui contient A , on a alors 2^λ types.

Remarques.

1° Les réciproques des théorèmes et corollaires 9, 10, 11 sont vraies et une théorie instable a toujours la propriété de l'indépendance ou celle de l'ordre strict. Ces résultats, comme d'ailleurs tout ce qui précède dans cette section B.2, sont dus à SHELAH.

2° Les énoncés de cette section se rencontrent également sous des formes "finies". On passe facilement des unes aux autres à l'aide de la compacité.

Rappelons que "superstable" signifie "stable en tout cardinal $\geq 2^\omega$ ".

THÉORÈME 15. - Si un modèle M de T a un arbre de hauteur ω, branchant infiniment à chaque noeud, et tel que toutes les formules libres d'un même niveau soient identiques (seuls leurs paramètres diffèrent), alors T n'est pas superstable.

Démonstration. - Par compacité et Lowenheim-Skolem, on obtient sur un $M' \equiv M$ un arbre ayant les propriétés indiquées et branchant λ fois à chaque noeud. Il fait donc intervenir $\leqslant \lambda$ paramètres, et produit λ^{ω} types, on a donc instabilité en tout cardinal λ tel que $\lambda^{\omega} \neq \lambda$.

THÉORÈME 16. - Si un modèle M de T a un arbre de hauteur infinie, T n'est pas ω-stable.

Démonstration. - On en extrairait un arbre à ω paramètres et 2^{ω} branches.

Application aux sous-groupes d'une structure. Nous travaillons maintenant dans une structure M de langage L (par exemple un groupe). Nous dirons qu'un groupe G est un sous-groupe de M, si G est un sous-ensemble M-définissable de M, et si sa loi est également M-définissable. Quand nous aurons affaire à deux "sous"-groupes G et H de M nous dirons que H est un sous-groupe de G s'il l'est au sens usuel, i. e. $H \subset G$, et la loi de H est induite par celle de G. $H \subset_{\infty} G$ signifiera alors que H est d'indice infini dans G.

THÉORÈME 17. - Si M est superstable, M n'a pas de suite infinie décroissante de sous-groupes M-définissables tels que

$$H \supset_{\infty} H_1 \supset_{\infty} H_2 \dots \supset_{\infty} H_n \supset_{\infty} \dots$$

C'est un corollaire du théorème 15. On construit un arbre de hauteur ω tel que toutes les formules du niveau $n+1$ s'obtiennent à partir des formules de niveau n dont elles sont issues en prenant les classes modulo H_{n+1}. La seule difficulté réside dans l'écriture des détails, nous laisserons donc la démonstration en exercice.

THÉORÈME 18. - Si M est ω-stable, M n'a pas de suite infinie strictement décroissante de sous-groupes M-définissables

$$H \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \dots \supsetneq H_n \supsetneq \dots$$

C'est un corollaire du théorème 16.

Nous allons maintenant affiner un peu ces résultats dans le cas où M est de rang de Morley α_M fini. Rappelons que le rang $R_M(\varphi)$ de la formule φ est le sup des rangs des types qu'elle contient (nous disons que φ contient le type p si p est un type sur un modèle de $T(M)$ qui contient les paramètres de φ et si φ est dans p), et que ce sup est atteint. Si $R_M(\varphi)$ est un ordinal α, alors φ contient seulement un nombre fini de types de rang α, on appelle ce nombre le degré de φ, et on le note $\deg \varphi$. Si M est ω-saturé, il suffit de regarder les types et les formules à paramètres dans M.

LEMME 19. - Soient G et H deux sous-groupes M-définissables de M, H étant sous-groupe propre de G. Soient φ et ψ les formules qui définissent respectivement G et H. Alors,

(a) $R_M(\psi) \leqslant R_M(\varphi)$,

(b) si de plus le rang de φ est un ordinal, l'indice $[G:H]$ de H dans G est fini si, et seulement si, φ et ψ ont même rang, et alors

$$\deg(\varphi) = [G:H] \deg(\psi) .$$

Esquisse de démonstration.

(a) est trivial. Pour montrer (b), il suffit de vérifier que, pour toute formule $\xi(x)$ à une variable libre et à paramètres dans M définissant un sous-ensemble de G (i. e. $T(M) \vdash \xi \rightarrow \varphi$) et pour tout élément a de G, on a

$$(**) \qquad R(\xi(a^{-1} x)) = R(\xi(x)) .$$

En effet, les rangs de toutes les classes (à gauche) de G modulo H seront alors égaux au rang de ψ, et (b) s'en déduira aisément. La démonstration de (**) se fait par induction sur le rang de ξ.

THÉORÈME 20. - Si α_M est fini, M n'a pas de suite de longueur $n > \alpha_M$, strictement croissante ou décroissante de sous-groupes M-définissables d'indice infini les uns dans les autres :

$$H \supset_{\infty} H_1 \supset_{\infty} \dots \supset_{\infty} H_n .$$

C'est un corollaire du lemme 19. Le théorème suivant est énoncé ici pour mémoire seulement ; nous le démontrerons dans l'exposé 4 sur les groupes.

THÉORÈME 21. - Si M est stable, toute intersection de sous-groupes définissables par la même formule libre φ de L (et des paramètres différents) est intersection d'un nombre fini d'entre eux, ce nombre ne dépendant que de φ et $T(M)$.

C. $\aleph_1$-catégoricité.

Nous rappelons sans démonstration deux théorèmes fondamentaux. Comme auparavant, T est une théorie complète du langage dénombrable L.

THÉORÈME 22. - Si T est $\aleph_1$-catégorique, elle est ω-stable de rang de Morley fini.

On dit que T admet une paire de Vaught s'il y a deux modèles M et M' de T, $M \prec M'$, et une formule $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, telle que le sous-ensemble de M, défini par φ , soit infini, et que

$$\forall x \in M' \ , \ M' \models \varphi(x , \bar{a}) \Longrightarrow x \in M$$

THÉORÈME 23. - T est $\aleph_1$-catégorique si, et seulement si, elle est ω-stable et sans paire de Vaught.

L'étude des structures algébriques $\aleph_1$-catégoriques utilise à ce jour fondamentalement le théorème 22. Il est également utile de connaître le théorème de préservation suivant (Par définition, M est $\aleph_1$-catégorique si $T(M)$ l'est, c'est-à-dire si $T(M)$ a un seul modèle de cardinalité $\aleph_1$ à isomorphisme près, et alors ce modèle est $\aleph_1$-saturé).

THÉORÈME 24. - Soit M une structure $\aleph_1$-catégorique.

(a) M reste $\aleph_1$-catégorique si on l'enrichit d'un nombre dénombrable de relations et fonctions M-définissables,

(b) M reste $\aleph_1$-catégorique si on oublie, quand c'est possible, un nombre dénombrable de constantes,

(c) M ne reste pas nécessairement $\aleph_1$-catégorique si on oublie des symboles de relations ou de fonctions.

Démonstration.

(a) Il est clair qu'on ne change rien à l' $\aleph_1$-catégoricité de M si on lui ajoute des fonctions ou des relations définissables sans paramètres. Il suffit donc de voir ce qui se passe quand on distingue dans M une suite dénombrable de constantes. Soient (M' , C') et (M'' , C'') deux modèles de cardinal $\aleph_1$ de $T(M , C)$. Les suites dénombrables de constantes C' et C'' ont même type (sur $\emptyset$) que C ; d'autre part, M' et M'' sont $\aleph_1$-catégoriques, donc $\aleph_1$-saturés, et par conséquent il y a un L-isomorphisme de M' dans M'' qui envoie C' sur C'' . Q.E.D.

(b) Soit C un ensemble fini ou dénombrable de constantes figurant dans le langage L de M . On veut montrer que si M est $\aleph_1$-catégorique, sa restriction M^0 à $L - C$ l'est encore. Compte tenu du théorème 7, M^0 est ω-stable. Il reste donc à voir que $T(M^0)$ n'admet pas de paire de Vaught. Si elle en avait une, elle en aurait une partant d'un modèle qui réalise le (multi-)type de C (exercice). On aurait donc une paire de Vaught pour M . Contradiction.

(c) Soit M un ensemble infini muni d'une partie P infinie et d'une bijection f de P sur $M - P$. M est $\aleph_1$-catégorique, mais la théorie obtenue en oubliant f a clairement plusieurs modèles de cardinalité $\aleph_1$.

Remarque 25. - Soit M une L-structure $\aleph_1$-catégorique, F une L-structure finie. En général, il est faux, que $M \times F$ soit $\aleph_1$-catégorique : prendre par exemple L constitué d'un prédicat unaire R , F la réalisation à deux éléments a et b tels que $a \in R$ et $b \notin R$, et M une réalisation infinie de L dont tous les éléments sont dans R ; $M \times F$ n'est pas $\aleph_1$-catégorique puisque R et son complémentaire y sont infinis. <u>Toutefois ce résultat est vrai dans le cas des anneaux unitaires</u>, <u>dans le cas des modules et dans celui des groupes</u> (voir les exposés correspondants), i. e. dans tous les cas qui nous intéressent ici, cf. aussi l'exercice 12 de l'exposé 11.