Groupe d'étude de théories stables

Bruno Poizat

Exercices en stabilité

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. n° 11, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A11_0>

EXERCICES EN STABILITÉ

par Bruno POIZAT (*)

Exercice 1. - Soit T une théorie instable.

1° Pour tout cardinal $\varkappa$, montrer l'existence d'une suite croissante M_α, $\alpha \leqslant \varkappa$, de modèles de T, $|M_\alpha| = \max(|\alpha|, |T|)$, avec un type $p \in S_1(M_\varkappa)$, de restriction p_α à M_α, tel que pour tout $\alpha < \varkappa$, $p_{\alpha+1}$ ne soit pas cohéritier de p_α.

2° Montrer que si λ est singulier et supérieur ou égal à $|T|$, T n'a pas de modèle saturé de cardinal λ (Par l'absurde ; $\varkappa = \mathrm{cof}(\lambda)$; $M = \bigcup_{\alpha<\varkappa} A_\alpha$; réaliser dans M la suite M_α, de sorte que le type de $A_{\alpha+1}$ sur $M_{\alpha+1}$ soit cohéritier de sa restriction à M_α).

Exercice 2. - Soit T une théorie stable ; on rappelle que $\varkappa(T)$ est le plus petit cardinal infini tel qu'il n'y ait pas dans l'ordre fondamental de T de suite descendante indexée par ce cardinal. Montrer que si $\lambda \geqslant |T|$ et $\mathrm{cof}(\lambda) < \varkappa(T)$, T n'a pas de modèle saturé de cardinal λ.

Exercice 3. - T est stable.

1° Si M est $|T|^+$-saturé, $|S_1(M)| \leqslant |M|^\omega$.

2° Si $p \in S_1(M)$, on lui associe la structure $M(p)$ obtenue en ajoutant à M, pour toute formule $f(x, \bar{y})$, un prédicat $df(\bar{y})$ interprétant l'ensemble des $\bar{b}$ de M tels que $p \vdash f(x, \bar{b})$. Montrer que $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ sont équivalents dans l'ordre fondamental de T si, et seulement si, $M(p)$ et $N(q)$ sont élémentairement équivalents.

3° A toute formule $f(x, \bar{y})$ on associe la formule

$$df(\bar{y}, z_1, \ldots, z_{2n+1}) = \bigvee_{i_0<\ldots<i_n} f(z_{i_0}, \bar{y}) \wedge \ldots \wedge f(z_{i_n}, \bar{y}),$$

où n est le plus petit nombre tel que pour tout $\bar{b}$ une suite indicernable ne puisse avoir $n+1$ éléments satisfaisant $f(x, \bar{b})$ et $n+1$ éléments satisfaisant $\neg f(x, \bar{b})$ (voir Théories Stables, 1978, ex. 16). Montrer que tout $p \in S_1(M)$ a une définition de la forme $df(\bar{y}, a_1, \ldots, a_{2n+1})$.

Exercice 4 (LASCAR). - $p \in S_n(\emptyset)$, et il existe deux réalisations a et b de p, le type de b sur a étant isolé par une formule $f(a, b)$, tandis que le type de a sur b n'est pas isolé. On construit une suite $a, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ telle que pour tout $n \vdash f(a_n, a_{n+1})$.

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU.

1° Montrer que la suite $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ est atomique sur a.

2° Montrer que $RU(p) \geq \omega$ (Hint : p est instable, ou bien le type de a sur $\{a_i, \ldots, a_n\}$ dévie sur $\{a_{i+1}, \ldots, a_n\}$).

Exercice 5 (PILLAY).

1° On considère un modèle M de la théorie T, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans une extension élémentaire de M, tels que le type de $\bar{a}$ sur $M \cup \{\bar{b}\}$ soit héritier non-cohéritier de sa restriction à M ; soit $f(\bar{x}, \bar{b})$ une formule, à paramètres dans M, isolant le type de $\bar{a}$ sur $M \cup \{\bar{b}\}$ des éléments de M. Construire dans le modèle M une suite $(\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ telle que $M \vdash f(\bar{a}_n, \bar{b}_m)$ si, et seulement si, $n \geq m$.

2° On suppose que M ne contient pas d'ensemble infini de n-uples ordonnés par une formule. Montrer que tout $p \in S_1(M)$ est définissable, et qu'il n'a qu'un seul cohéritier, qui est son héritier.

Exercice 6.

1° Soit M une chaîne (i. e. un ordre total) ; soient N une extension élémentaire de M, A un segment initial de M, A' le segment initial de N engendré par A. Montrer par un va-et-vient de Fraïssé (si votre religion ne vous en interdit pas l'emploi) que A' est extension élémentaire de A.

2° Soient c une coupure de M, N une extension élémentaire de M, N' la chaîne formée des éléments de M et des éléments de N qui sont dans c ; montrer que $M < N' < N$.

3° Montrer que dans $S_1(M)$ il y a au plus 2^ω types correspondant à la même coupure ; en déduire, par un dénombrement de cohéritiers, qu'une chaîne n'a jamais la propriété d'indépendance (voir Théorie Stables, 1978, ex. 15).

4° Généraliser ce résultat aux structures formées d'une chaîne et d'un certain nombre de prédicats unaires, ou d'un certain nombre de relations d'équivalences ayant toutes un nombre fini de classes.

Exercice 7. - On considère une théorie complète T, et un type p sur un modèle M de T ; pour tout fragment fini i du langage de T, T_i, p_i, M_i, sont ce qu'on obtient à partir de T, p, M, lorsqu'on jette tout ce qui sort de i.

1° Montrer que T est stable si, et seulement si, chaque T_i l'est.

2° On suppose qu'il existe un entier n et i_0 tels que pour tout i contenant i_0, $RU(p_i) = n$ au sens de T_i ; montrer qu'au sens de T, $RU(p) = n$.

Exercice 8.

1° Montrer que la théorie d'une relation d'équivalence est totalement transcendante.

2° On considère la structure formée d'ensembles disjoints A_0 , A_1 , ... , A_n , de relations d'équivalence E_0 , E_1 , .. , E_n définies sur ces ensembles respectifs, et de bijections f_i , pour i compris entre 1 et n , entre les classes de E_0 et celles de E_i . Montrer que sa théorie est totalement transcendante.

3° On considère une structure formée d'un certain nombre de relations d'équivalence, dont toutes sauf au plus une n'ont qu'un nombre fini de classes ; montrer qu'elle est superstable, et qu'elle est totalement transcendante s'il n'y a qu'un nombre fini de relations d'équivalence.

Exercice 9 (GAIFMAN, PILLAY). - M est l'ensemble des couples (n , m) d'entiers naturels tels que n divise m ; E_1 est la relation d'équivalence "avoir même première coordonnée" ; E_2 est "avoir même deuxième coordonnée" ; C_1 est la chaîne obtenue lexicographiquement, en comparant d'abord les premières coordonnées, puis les deuxièmes ; C_2 en comparant d'abord les deuxièmes coordonnées, puis les premières ; D est l'ensemble des (n , n) .

1° Montrer que C_1 interprète D , et E_1 .

2° Montrer que $(M ; E_1 , E_2)$, ainsi que $(M ; C_1 , E_2)$, ont la propriété d'indépendance.

3° Montrer que $(M ; C_1 , C_2)$ a la propriété d'indépendance.

Exercice 10 (SABBAGH). - Soit G_i un ensemble de groupes, dont une infinité sont non-abéliens ; montrer que la somme des G_i , et le produit des G_i , ont la propriété d'indépendance.

Exercice 11. - Un groupe abélien par fini est stable (Hint : un F-module est stable).

Exercice 12. - Soient G un groupe, F un groupe fini ; montrer que tout groupe élémentairement à $G \times F$ et qui réalise le type de F est de la forme $G' \times F$, avec G' élémentairement équivalent à G ; montrer que $G \times F$ est ω_1-catégorique si, et seulement si, G l'est.

Exercice 13. - Soit G un groupe totalement transcendant ; si $p \in S_1(G)$ est réalisé par x , et si $g \in G$, gp est par définition le type de gx sur G . Soient p et q deux types de rang de Morley maximum.

1° Soient a réalisant p , b réalisant q , de façon indépendante au-dessus de G (le type de a sur $G \cup \{b\}$ ne dévie pas sur G) ; montrer que a et

ba^{-1} sont indépendants au-dessus de G .

2° Soient G' une extension élémentaire de G contenant ba^{-1} , p' et q' les héritiers respectifs de p et q sur G' ; montrer que $q' = ba^{-1} p'$.

3° Montrer qu'il existe g dans G tel que $gp = q$.

Note. – Ce phénomène est un cas particulier d'une propriété des groupes stables.

Exercice 14 (CHERLIN). – Soit G un groupe superstable, et soit f un homomorphisme définissable de G dans G de noyau fini ; montrer que $f(G)$ est d'indice fini dans G (Hint : sinon, pour tout n , $f^{n+1}(G)$ serait d'indice infini dans $f^n(G)$).

Exercice 15 (CHERLIN). – Soit V un F_p-espace vectoriel, et soit f une application linéaire de V dans V ; soit k l'anneau de dimension 3 sur F_p , engendré par 1 , a , b , avec $a^2 = b^2 = ab = ba = 0$.

1° Montrer qu'on fait de $W = V \times V$ un k-module en posant $a(x,y) = (y,0)$, $b(x , y) = (f(y) , 0)$.

2° Montrer qu'on définit une structure d'anneau unitaire stable sur $A = k \times W$ en posant $(\lambda , u) + (\mu , v) = (\lambda + \mu , u + v)$, $(\lambda,u)(\mu,v) = (\lambda\mu,\lambda u+\mu v)$. Définir dans A les ensembles $V \times 0$, $f(V) \times 0$, ... , $f^n(V) \times 0$, ...

3° Construire un anneau stable avec une suite décroissante d'idéaux définissables.

Exercice 16.

1° Soit α un ordinal ; on considère l'ordre partiel α^n :

$$(\beta_1 ,\dots, \beta_n) \leqslant (\gamma_1 ,\dots, \gamma_n) \text{ si } \beta_1 \leqslant \gamma_1 \text{ et } \dots \text{ et } \beta_n \leqslant \gamma_n ;$$

montrer que si A est un ensemble infini extrait de α^n il contient une chaîne infinie de type ω .

2° On considère une théorie superstable T , une skolémisée T' de T , $M(I)$ un modèle d'Ehrenfeucht associé à un ensemble d'indicernables dans l'ordre, pour T' , indexé par l'ordre I , et a un élément de $M(I)$ de la forme $f(i)$, où $i \in I$ et où $f(x)$ est une fonction à un seul argument du langage de T' .

Appelons "bon modèle" une restriction élémentaire de $M(I)$ de la forme $M(J)$, où $J \subset I$. On considère deux bons modèles $M(J_1)$ et $M(J_2)$ tels que :

(i) $i \notin J_1$, $i \notin J_2$,

(ii) $\{j/ j \in J_1 , j < i\}$ est infini, ou de cardinal supérieur à $\{j/ j \in J_2 , j < i\}$,

(iii) $\{j/ j \in J_1 , j > i\}$ est infini, ou de cardinal supérieur à $\{j/ j \in J_2 , j > i\}$.

Montrer que le type de a sur $M(J_2)$ est supérieur, au sens de l'ordre fondamental de T, au type de a sur $M(J_1)$.

Montrer que les classes, au sens de l'ordre fondamental de T, des types de a sur des bons modèles sont en nombre fini.

3° Généraliser 2° au cas où a est de la forme $f(i_1, \ldots, i_n)$.

4° Soient T la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique nulle ; soient M un tel corps, X et Y des éléments transcendants et algébriquement indépendants sur M ; soient N la clôture algébrique de $M(X, Y)$, et N_n la clôture algébrique de $M(X^n + Y^n)$. Montrer qu'il est impossible de plonger N dans un modèle d'Ehrenfeucht de sorte que chaque N_n soit un bon modèle.

Exercice 17 (HODGES). - Toute skolémisée de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée est instable (Hint : un corps algébriquement clos n'a pas d'automorphisme d'ordre fini différent de 2).