GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

ZOÉ CHATZIDARIS

Forking et rangs locaux selon Shelah

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 10, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A10_0>

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Théories stables
(B. POIZAT)
2e année, 1978/79, n° 10, 12 p.

FORKING ET RANGS LOCAUX SELON SHELAH

par Zoé CHATZIDARIS

Toutes les notions introduites et tous les théorèmes démontrés proviennent du livre de S. SHELAH [2]. Le but de cet exposé est de familiariser le lecteur avec les notions de rang et de forking, en regroupant certains théorèmes et démonstrations.

Dans cet exposé, les types considérés ne seront pas supposés complets, mais seulement consistants avec T. On se placera dans un modèle de T suffisamment saturé.

Quelques notations.

$S(A) = \{$types complets à paramètres dans $A\}$.

Soit Δ un ensemble de formules, toujours supposé clos par négation.

$p{\restriction}\Delta = \{\varphi(\overline{x}, \overline{a})\ ;\ \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta\ ,\ p \vdash \varphi(\overline{x}, \overline{a})\}$.

$S_\Delta(A) = \{p{\restriction}\Delta\ ;\ p \in S(A)\}$.

Un Δ-type est un type ne comportant que des formules de Δ.

Définition 1. - Soient p un type, Δ un ensemble de formules (clos par négation), λ un cardinal ou ∞.

On définit le rang par induction $R(p, \Delta, \lambda) \geq \alpha$:

1° $R(p, \Delta, \lambda) \geq 0$ si, et seulement si, p est consistant,

2° $R(p, \Delta, \lambda) \geq \alpha$ pour α limite si, et seulement si, $\forall \beta < \alpha$, $R(p, \Delta, \lambda) \geq \beta$,

3° $R(p, \Delta, \lambda) \geq \alpha + 1$ si, et seulement si, $\forall \mu < \lambda$, $\forall q$ fini $\subseteq p$, il existe une famille $(q_i)_{i\leq\mu}$ de Δ-types explicitement contradictoires (e. c.), c'est-à-dire $\forall i \neq j$, $\exists \varphi(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta$, $\exists \overline{a}$ $\varphi(\overline{x},\overline{a}) \in q_i$, $\neg\varphi(\overline{x},\overline{a}) \in q_j$ et tels que $R(q \cup q_i, \Delta, \lambda) \geq \alpha$, $\forall i \leq \mu$.

On définira alors $R(p, \Delta, \lambda) = \alpha$ pour α le premier ordinal tel que $R(p, \Delta, \lambda) \not\geq \alpha + 1$, s'il existe, et ∞ sinon.

Définition 2. - p, Δ, λ comme dans la définition 1, et tels que $R(p,\Delta,\lambda)=\alpha$, $\alpha \neq \infty$.

$\mathrm{Mlt}^1(p, \Delta, \lambda)$ = le premier μ_0 tel qu'il existe q fini $\subseteq p$ n'ayant pas plus de μ_0 Δ-extensions q_i e. c. et de rang $\geq \alpha$.

(*) Mlle Zoé CHATZIDARIS, 19 rue Trétaigne, 75018 PARIS.

$\mathrm{Mlt}^2(p , \Delta , \lambda)$ = le premier μ_0 tel que p n'a pas plus de μ_0 Δ-extensions q_i e. c. et de rang $\geqslant \alpha$.

Si $R(p , \Delta , \lambda) = \infty$, on définit $\mathrm{Mlt}^1(p , \Delta , \lambda) = \mathrm{Mlt}^2(p , \Delta , \lambda) = \infty$.

Remarque 1. – Si $R(p , \Delta , \lambda) \neq \infty$, alors

$$0 < \mathrm{Mlt}^2(p , \Delta , \lambda) \leqslant \mathrm{Mlt}^1(p , \Delta , \lambda) < \lambda .$$

Si p est fini, alors $\mathrm{Mlt}^1(p , \Delta , \lambda) = \mathrm{Mlt}^2(p , \Delta , \lambda)$.

Définition 3. – $p \vdash q$ si toute suite réalisant p réalise q .

THÉORÈME 1.

1° Si $p \vdash p'$, alors $R(p , \Delta , \lambda) \leqslant R(p' , \Delta , \lambda)$.

2° Si l'égalité est vraie, alors $\mathrm{Mlt}^{1,2}(p , \Delta , \lambda) \leqslant \mathrm{Mlt}^{1,2}(p' , \Delta , \lambda)$.

Démonstration. – On va montrer que $R(p , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha \rightarrow R(p' , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha$, $\alpha = 0$ ou α limite ; évident. $\alpha + 1$: $R(p , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha + 1$.

Soit q' fini $\subseteq p'$, soit $\mu < \lambda$. $p \vdash p'$ donc $p \vdash q'$, donc il existe q fini $\subset p$ tel que $q \vdash q'$. On choisit alors une famille $(q_i)_{i \leqslant \mu}$ de Δ-types e. c. tels que $R(q \cup q_i , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha$. Donc, par hypothèse d'induction $R(q' \cup q_i , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha$.

Supposons maintenant que $R(p , \Delta , \lambda) = R(p' , \Delta , \lambda) = \alpha$, $\mathrm{Mlt}^1(p,\Delta,\lambda) = \mu_0$.

Soit q' fini $\subset p'$; il existe alors q fini $\subset p$ tel que $q \vdash q'$. Deux cas sont possibles :

1° q a μ_0 Δ-extensions e. c. de rang $\geqslant \alpha$, dans ce cas là, q' aussi.

2° μ_0 est le premier ordinal tel que q n'ait pas μ_0 Δ-extensions e. c. de rang $\geqslant \alpha$. Alors $\forall \mu < \mu_0$, q a μ Δ-extensions e. c. de rang $\geqslant \alpha$, et q' aussi.

THÉORÈME 2. – $\forall p , \Delta , \lambda$ il existe q fini $\subseteq p$, tel que $R(p,\Delta,\lambda) = R(q,\Delta,\lambda)$ et $\mathrm{Mlt}^1(p , \Delta , \lambda) = \mathrm{Mlt}^1(q , \Delta , \lambda)$.

Démonstration. – Si $q \subseteq p$, alors $R(p , \Delta , \lambda) \leqslant R(q , \Delta , \lambda)$. Si $R(p,\Delta,\lambda)=\infty$, on peut prendre $q = \emptyset$. Si $R(p , \Delta , \lambda) = \alpha$ alors $R(p , \Delta , \lambda) \ngeqslant \alpha + 1$. Donc il existe q fini $\subseteq p$, $\mu < \lambda$, tels qu'il n'y ait pas de famille $(q_i)_{i \leqslant \mu}$ de Δ-types e. c. tels que $R(q \cup q_i , \Delta , \lambda) \geqslant \alpha$. Donc $R(q , \Delta , \lambda) \ngeqslant \alpha + 1$, donc $R(q , \Delta , \lambda) = \alpha$, et d'après le théorème 1, $\mu_0 = \mathrm{Mlt}^1(p,\Delta,\lambda) \leqslant \mathrm{Mlt}^1(q,\Delta,\lambda) = \mu_q$, $\mathrm{Mlt}^1(p , \Delta , \lambda) = \mu_0$; donc il existe q fini $\subseteq p$, tel que il n'existe pas plus de μ_0 Δ-extensions de q e. c. et de rang $\geqslant \alpha$. Donc il existe q fini $\subseteq p$ tel que : $R(q , \Delta , \lambda) = \alpha$ et $\mathrm{Mlt}^1(q , \Delta , \lambda) = \mu_0$.

Remarque 2. – $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, $\lambda \geqslant K$, p un type. Alors $R(p,\Delta_1,\lambda) \leqslant R(p,\Delta_2,K)$. S'il y a égalité $\mathrm{Mlt}^{1,2}(p , \Delta , \lambda) \leqslant \mathrm{Mlt}^{1,2}(p , \Delta_2 , K)$.

LEMME 3.

1° Si $R(p, \Delta, 2) = \alpha \neq \infty$, alors il n'y a pas de $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$ de $\overline{a}$, tels que

$$R(p \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \alpha$$

$$R(p \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \alpha .$$

2° Si $R(p, \Delta, \lambda) = \alpha \neq \infty$, $\mathrm{Mlt}^1(p, \Delta, \lambda) = 1$, alors il n'y a pas de $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$ de $\overline{a}$, tels que

$$R(p \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \alpha$$

$$R(p \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \alpha .$$

3° Si $R(p, \Delta, \lambda) = \alpha \neq \infty$, $\mathrm{Mlt}^1(p, \Delta, \lambda) = n < \aleph_0$, alors il n'y a pas de $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$ de $\overline{a}$, tels que

$$R(p \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = R(p \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \alpha$$

$$\mathrm{Mlt}^1(p \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = \mathrm{Mlt}^1(p \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) = n .$$

Démonstration. – Il est évident d'après la remarque 1 que $3 \to 2 \to 1$. Nous allons donc démontrer 3°. Supposons qu'un tel $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ existe.

Soit q fini $\subset p$, soient $(q_i)_{i<n}$ et $(q'_i)_{i<n}$ deux familles de Δ-types e. c. tels que $\forall\, i < n$

$$R(q \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \cup q_i, \Delta, \lambda) = R(q \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \cup q'_i, \Delta, \lambda) = \alpha ,$$

alors la famille $(q_i \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}),\ q'_i \cup \neg\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}))_{i<n}$ est une famille de Δ-types e. c. Comme q était choisi arbitrairement, on a que $\mathrm{Mlt}^1(p,\Delta,\lambda) \geq 2n$.

Remarque 3. – $q \subseteq p$, $p{\restriction}\Delta \in S_\Delta(A)$, $R(p, \Delta, 2) = R(q, \Delta, 2) = \alpha$, alors $p{\restriction}\Delta$ peut être défini de la façon suivante à partir de q :

$$\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in p{\restriction}\Delta \Longleftrightarrow \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta,\ \overline{a} \in A \text{ et } R(q \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, 2) = \alpha .$$

COROLLAIRE. – Si $q \subseteq p$, $p \in S_\Delta(A)$, $R(p, \Delta, 2) = R(q, \Delta, 2) = \alpha$, alors p est l'unique type de $S_\Delta(A)$ étendant q et de rang α .

THÉORÈME 4. – Soient p type sur A, $\lambda \geq \aleph_0$, $R(p, \Delta, \lambda) = \alpha$, alors il existe $q \in S(A)$, $p \subseteq q$ tel que $R(q, \Delta, \lambda) = \alpha$.

Démonstration. – Soit $\Gamma = \{\neg\, \psi(\overline{x}, \overline{a})\ ;\ R(\psi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) < \alpha,\ \overline{a} \in A\}$. Si $p \cup \Gamma$ est consistant, il existe $q \in S(A)$, $q \supset p \cup \Gamma$. Pour un tel q on aura $R(q, \Delta, \lambda) = \alpha$. En effet, $p \subset q \to R(q, \Delta, \lambda) \leqslant \alpha$. Prenons un q' fini $\subset q$. On a que $R(q', \Delta, \lambda) = R(\wedge q', \Delta, \lambda)$. Donc $R(q', \Delta, \lambda) < \alpha \to \neg(\wedge q') \in \Gamma$. Contradiction. Il suffit donc de montrer que $p \cup \Gamma$ est consistant. Sinon, il existe r fini $\subset p$, qu'on peut prendre de même rang, $\neg\, \varphi_0, \ldots, \neg\, \varphi_n \in \Gamma$ telles que $\forall\, i \leqslant n$, $R(\varphi_i, \Delta, \lambda) < \alpha$ et $r \vdash \varphi_0 \vee \ldots \vee \varphi_n$.

De cela, on tire $R(r , \Delta , \lambda) = \alpha > \max_{i\leq n} R(\varphi_i , \Delta , \lambda)$,
$R(r , \Delta , \lambda) \leq R(\vee_{i\leq n} \varphi_i , \Delta , \lambda)$ car $r \vdash \vee_{i\leq n} \varphi_i$.
$\rightarrow R(\vee_{i\leq n} \varphi_i , \Delta , \lambda) > \max_{i\leq n} R(\varphi_i , \Delta , \lambda)$.

On aura une contradiction en démontrant le lemme suivant.

LEMME 5. - $\forall r , \forall \lambda \geq \chi_0 , \forall \varphi_0 , \dots , \varphi_n \in L , \forall \Delta \subset L$,

$$R((\vee_{i\leq n} \varphi_i) \cup r , \Delta , \lambda) = \max_{i\leq n} R(\varphi_i \cup r , \Delta , \lambda) .$$

Démonstration. - D'abord $\forall i$, $R(\varphi_i \cup r , \Delta , \lambda) \leq R(\vee_{i\leq n} \varphi_i \cup r , \Delta , \lambda)$ car $\varphi_i \vdash \vee_{i\leq n} \varphi_i$,
$\rightarrow \max_{i\leq n} R(r \cup \varphi_i , \Delta , \lambda) \leq R(r \cup \vee_{i\leq n} \varphi_i , \Delta , \lambda)$.

On va maintenant montrer que $\forall \beta$,

$$R(r \cup \vee_{i\leq n} \varphi_i , \Delta , \lambda) \geq \beta \rightarrow \max_{i\leq n}(r \cup \varphi_i , \Delta , \lambda) \geq \beta .$$

- $\beta = 0$: si, $\forall i$, $\varphi_i \cup r$ est inconsistant, alors $r \cup \vee_{i\leq n} \varphi_i$ est inconsistant.

- β limite : évident par hypothèse d'induction.

- $\beta + 1$. Supposons le contraire : $R(r \cup \vee_{i\leq n} \varphi_i , \Delta , \lambda) \geq \beta + 1$, $\forall i \leq n$ $R(r \cup \varphi_i , \Delta , \lambda) \not\geq \beta + 1$, donc $\forall i$, $\exists \mu_i < \lambda$, q_i fini $\subset r$, tels qu'il n'y ait pas de suites $(r^i_j)_{j\leq\mu_i}$ de Δ-types e. c., tels que $R(q_i \cup \varphi_i \cup r^i_j , \Delta , \lambda) \geq \beta$, $\forall j \leq \mu_i$.

Soit $q = \cup_{i\leq n} q_i$. q est fini et inclus dans r . Soit $\mu = (n + 1) \max_{i\leq n} \mu_i$, $\mu < \lambda$ car λ est infini. D'autre part, il existe $(r_j)_{j\leq\mu}$ Δ-types e. c. tels que $R(q \cup \vee_{i\leq n} \varphi_i \cup r_j , \Delta , \lambda) \geq \beta$, $\forall j \leq \mu$.

Par hypothèse d'induction, $\forall j \leq \mu$, $\max_{i\leq n} R(q \cup \varphi_i \cup r_j , \Delta , \lambda) \geq \beta$, donc $\forall j$, $\exists i(j)$ tel que $R(q \cup \varphi_{i(j)} \cup r_j , \Delta , \lambda) \geq \beta$. Il y a $\mu + 1$ j et seulement n i , donc il existe un $i \leq n$ atteint par plus de μ_i j . Contradiction.

LEMME 6. - Il y a un λ_T dépendant de T tel que, $\forall \lambda \geq \lambda_T$, $\forall p$, $\forall \Delta$, $R(p , \Delta , \lambda) = R(p , \Delta , \infty)$.

Démonstration. - Choisissons $\theta(\overline{x} , \overline{a})$ et Δ .

1er cas : $R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \infty) < \infty$. Comme $R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \lambda)$ est une fonction décroissante de λ (Remarque 2), il existe un $\lambda = \lambda(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta)$ tel que $\forall \mu \geq \lambda$

$$R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \mu) = R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \lambda) .$$

On remarque facilement d'autre part que $R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \infty) \geq \alpha$ si, et seulement si, $\forall K$, $R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , K) \geq \alpha$. Donc

$$\forall \mu \geq \lambda(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta) , R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \mu) = R(\theta(\overline{x} , \overline{a}) , \Delta , \infty) .$$

D'autre part, comme le rang est préservé par les automorphismes, on voit que

$\lambda(\theta(\overline{x}, \overline{a}), \Delta)$ ne dépend que de $\theta(\overline{x}, \overline{y})$, Δ et $t(\overline{a}, \emptyset)$. Le nombre de tels triplets est au plus $|T| \times 2^{|T|} \times 2^{|T|} = 2^{|T|}$, donc il y a un $\lambda_T = \sup(\lambda(\theta(\overline{x}, \overline{a}), \Delta)$.

Comme d'autre part, tout type a un sous type fini de même rang et que si p est fini $R(p, \Delta, \lambda) = R(\wedge p, \Delta, \lambda)$ donc pour tout type p, $\Delta \subset L$, $\lambda \geq \lambda_T$ on a que $R(p, \Delta, \lambda) = R(p, \Delta, \infty)$.

LEMME 7. - *Soit* Δ *fini* $\subset L$, *alors il existe* $\varphi_\Delta \in L$ *telle que*

1° $\forall p, \forall \lambda, R(p, \Delta, \lambda) = R(p, \varphi_\Delta, \lambda)$.

2° $\forall \varphi(\overline{x}, \overline{a})$ *(où* $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta)$, $\exists \overline{a}' \subset \overline{a} \cup \{c_0, c_1\}$ *tel que* $\models \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \leftrightarrow \varphi_\Delta(\overline{x}, \overline{a}')$.

3° $\forall \overline{b}$ *tel que* $\models \exists \overline{x}\ \varphi_\Delta(\overline{x}, \overline{b})$, $\exists \overline{a}$, $\exists \varphi \in \Delta$ *tels que* $\models \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \leftrightarrow \varphi_\Delta(\overline{x}, \overline{b})$.

Démonstration. - $\Delta = \{ \varphi_k(\overline{x}, \overline{y}_k) ; k < \ell < \omega\}$,

$$\begin{aligned}\varphi_\Delta &= \varphi_\Delta(\overline{x}, \overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_{\ell-1}, z, z_0, \ldots, z_{\ell-1}) \\ &= \bigwedge_{k=0}^{\ell-1}(z = z_k \rightarrow \varphi_k(\overline{x}, \overline{y}_k)) \wedge \bigvee_{k<\ell} z = z_k \wedge \bigwedge_{k<n<\ell} \neg (z = z_k \wedge z = z_n).\end{aligned}$$

On rappelle que Δ est toujours supposé clos par négation. Voir la démonstration dans Shelah. Classification theory ..., p. 29.

Donc pour Δ fini, on peut toujours se ramener à une formule.

LEMME 8.

1° *Soient* p *un type*, φ *une formule de* L. *Soit*

$\Gamma_p(\varphi, n, 2) = \{\psi(\overline{x}_\eta, \overline{a}) ; \psi(\overline{x}, \overline{a}) \in p, \eta \in 2^n\} \cup \{\varphi(\overline{x}_\eta, \overline{y}_{\eta\restriction k})^{\eta(k)} ; \eta \in 2^n, k < n\}$

alors $R(p, \varphi, 2) \geq n \leftrightarrow \Gamma_p(\varphi, n, 2)$ *consistant*.

2° *Soient* p *un type*, φ *une formule*, $k < \omega$. *Soit*

$$\begin{aligned}\Gamma_p(\varphi, n, k) = \{\psi(\overline{x}_\eta, \overline{a}) ; \psi(\overline{x}, \overline{a}) \in p, \eta \in k^n\} \\ \cup \{\varphi(\overline{x}_\eta, \overline{z}_\nu^{i,j}) \leftrightarrow \neg \varphi(\overline{x}_\rho, \overline{z}_\nu^{i,j}) ; \eta, \rho \in k^n, \nu \in k^m, m < n, \\ \nu = \eta\restriction m = \rho\restriction m, i = \eta(m), j = \rho(m), i \neq j\},\end{aligned}$$

alors $R(p, \varphi, k) \geq n \leftrightarrow \Gamma_p(\varphi, n, k)$ *consistant*.

$R(p, \varphi, k) = n - 1$, $\mathrm{Mlt}(p, \varphi, k) \geq k_0 < k$ *si l'ensemble de formules donné ci-dessus est inconsistant, mais devient consistant si l'on ne considère que les suites* η *et* ρ *de* k^n *vérifiant* $\eta(0) < k_0$, $\rho(0) < k_0$.

3° *Soient* p *un type*, φ *une formule*. *Soit*

$$\begin{aligned}\Gamma_p(\varphi, n, \chi_0) = \{\psi(\overline{x}_\eta, \overline{a}) ; \psi(\overline{x}, \overline{a}) \in \varphi, \eta \in \omega^n\} \\ \cup \{\varphi(\overline{x}_\eta, z_\nu^{i,j}) \leftrightarrow \neg \varphi(\overline{x}_\rho, z_\nu^{i,j}) ; \eta, \rho \in \omega^n, \nu \in \omega^m, m < n, \\ \nu = \eta\restriction m = \rho\restriction m, i = \eta(m), j = \rho(m), i \neq j\},\end{aligned}$$

$R(p , \varphi , \chi_0) \geqslant n \leftrightarrow \Gamma_p(\varphi , n , \chi_0)$ consistant.

$R(p , \varphi , \chi_0) = n - 1$, $\mathrm{Mlt}(p , \varphi , \chi_0) \geqslant k_0 < \omega$ si l'ensemble des formules donné ci-dessus est inconsistant, mais devient consistant si l'on ne considère que les suites $\eta , \rho \in \omega^n$ vérifiant $\eta(0) < k_0$, $\rho(0) < k_0$.

Remarque 4. – $R(p , \varphi , k) \geqslant n , \ \forall n < \omega \rightarrow R(p , \varphi , k) = \infty$, si $k \leqslant \omega$.

THÉORÈME 9. – Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

1° T est stable.

2° Pour toute formule φ , $R(\{x = x\} , \varphi , 2) < \omega$.

3° Pour toute formule φ , tout type p , $R(p , \varphi , 2) < \omega$.

4° Tout type complet est définissable.

5° T est stable en tout cardinal λ vérifiant $\lambda = \lambda^{|T|}$.

Les démonstrations du lemme et du théorème se trouvent dans [2], exposé n° 7.

Définition 4. – On dit que l'ensemble de formules $\{\varphi_m(\bar{x} , \bar{a}_m) ; m \in I\}$ est n-inconsistant si $\forall m_1 , \ldots , m_n \in I$ distincts deux à deux,

$$\models \neg(\exists \bar{x} \ \ \varphi_{m_1}(\bar{x} , \bar{a}_{m_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi_{m_n}(\bar{x} , \bar{a}_{m_n})) .$$

Définition 5. – La formule $\varphi(\bar{x} , \bar{a})$ se divise sur A , s'il existe $m < \omega$, et une suite $\bar{a}_\ell$, $\ell < \omega$ tels que

1° $\forall \ell < \omega \quad t(\bar{a}_\ell ; A) = t(\bar{a} , A)$,

2° $\{\varphi(\bar{x} , \bar{a}_\ell) ; \ \ell < \omega\}$ est m-inconsistant.

Définition 6. – Le I-type p en $\bar{x}_I$ dévie sur A s'il existe des formules $\varphi_0(\bar{x}_0 , \bar{a}_0) , \ldots , \varphi_{n-1}(\bar{x}_{n-1} , \bar{a}_{n-1})$ telles que, $\forall k < n$, $\bar{x}_k \subset \bar{x}_I$, $\varphi_k(\bar{x}_k,\bar{a}_k)$ se divise sur A , $p \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\bar{x}_k , \bar{a}_k)$.

Remarque 5. – Si I est fini, on peut supposer $\bar{x}_k = \bar{x}$.

LEMME 10. – $\varphi(\bar{x} , \bar{a})$ se divise sur $A \leftrightarrow \exists n < \omega$, et une suite $I = \{\bar{a}_\ell ; \ell<\omega\}$ d'indiscernables sur A telle que $\bar{a}_0 = \bar{a}$ et $\{\varphi(\bar{x} , \bar{a}_\ell) ; \ \ell < \omega\}$ est n-inconsistant.

Démonstration. – $\leftarrow$ évident.

$\rightarrow$ Soit $\varphi(\bar{x} , \bar{a})$ se divisant sur A , donc $\exists(\bar{a}_\ell)_{\ell<\omega}$ telle que $t(\bar{a}_\ell,A) = t(\bar{a},A)$, et $\{\varphi(\bar{x} , \bar{a}_\ell) ; \ \ell < \omega\}$ est n-inconsistant. Soit

$$\begin{aligned}\Gamma = \{t(\bar{c}_\ell , A) = t(\bar{a} , A) ; \ \ell < \omega\} \\ \cup \{\psi(\bar{c}_0,\ldots,\bar{c}_{m-1}) \leftrightarrow \psi(\bar{c}_{i_0},\ldots,\bar{c}_{i_m}) ; \psi \in L(A) , i_0 < i_2 <\ldots< i_m\} \\ \cup \{\neg(\exists \bar{x} \ \ \textstyle\bigwedge_{j<n} \varphi(\bar{x} , \bar{c}_j))\} .\end{aligned}$$

La consistance de Γ garantit l'existence d'une suite d'indiscernables $(\overline{b}_\ell)_{\ell<\omega}$ telle que $\overline{b}_0 = \overline{a}$ et $\{\varphi(\overline{x}, \overline{a}_\ell\} ; \ell < \omega\}$ soit n-inconsistant.

En effet, si $(\overline{c}_\ell)$ est une suite réalisant Γ, et si F est un A-isomorphisme tel que $F(\overline{c}_0) = \overline{a}$, alors la suite $(F(\overline{c}_\ell))_{\ell<\omega}$ est la suite cherchée.

Si Γ est inconsistant, c'est à cause d'un nombre fini de formules. Soient $\varphi_0, \dots, \varphi_k \in L(A)$. Soit φ une formule de $L(A)$.

Supposons, par exemple, que φ ait $\ell(\overline{a}) \times m$ variables libres. Soit $I = (\overline{a}_\ell)_{\ell<\omega}$. Soit $F : \omega^n \to \{0, 1\}$, $(j_1, \dots, j_m) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \models \neg\varphi(\overline{a}_{j_1}, \dots, \overline{a}_{j_m}), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

D'après le théorème de Ramsey, il existe X infini $\subset \omega$ tel que $F\restriction X^m$ est constante sur les uplets croissants et vaut donc 0, ou 1. Donc $\exists J \subset I$, J infini $= (\overline{b}_\ell)_{\ell<\omega}$ tel que $\forall j_1 < \dots < j_m$, on ait

$$\varphi(\overline{b}_0, \dots, \overline{b}_{m-1}) \leftrightarrow \varphi(\overline{b}_{j_1}, \dots, \overline{b}_{j_m}) .$$

On applique donc cette technique à $(\overline{a}_\ell)_{\ell<\omega}$ (la suite qui fait que $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ se divise) pour $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ et on obtient donc une sous-suite de $(\overline{a}_\ell)_{\ell<\omega}$ indiscernable pour $\varphi_0, \dots, \varphi_k$.

Γ est donc finiment consistant.

LEMME 11. - p <u>type sur</u> A.

1° <u>Si</u> $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$, $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ <u>se divise sur</u> A, $\lambda \geq \chi_0$, <u>alors</u> $R(p, \Delta, \lambda) < \infty \to R(p \cup \varphi(\overline{x}, \overline{a}), \Delta, \lambda) < R(p, \Delta, \lambda)$.

2° <u>Si</u> $q \supseteq p$, q <u>dévie sur</u> A, $\lambda \geq \chi_0$, <u>alors</u> $\exists \Delta_0$ <u>fini tel que</u> $\forall \Delta$ <u>fini</u> $\supset \Delta_0$

$$R(p, \Delta, \lambda) < \infty \to R(q, \Delta, \lambda) < R(p, \Delta, \lambda) .$$

<u>Démonstration.</u>

1° Soient $\varphi(x, a)$ se divisant sur A, $\lambda \geq \chi_0$. D'après le lemme 10, il existe $I = \{\overline{a}_\ell ; \ell < \lambda\}$ suite indiscernable sur A telle que, $\overline{a} = \overline{a}_0$ et $\{\varphi(\overline{x}, \overline{a}_\ell) ; \ell < \lambda\}$ soit n-inconsistant pour un certain $n < \omega$.

Soit $p_\ell = p \cup \{\varphi(\overline{x}, \overline{a}_\ell)\}$ pour $\ell < \lambda$. Soit $\alpha = R(p, \Delta, \lambda)$.

$\to \alpha \geq R(p_\ell, \Delta, \lambda) = R(p_0, \Delta, \lambda)$ (car les $\overline{a}_\ell$ s'échangent par A-automorphisme avec $\overline{a}$ et $p \subseteq p_0$).

Supposons $R(p_\ell, \Delta, \lambda) = \alpha$. Soit $B = A \cup \bigcup I$. $\exists q_\ell \in S_\Delta(B)$ tel que $q_\ell \supset p_\ell$ et $R(q_\ell, \Delta, \lambda) = \alpha$ (d'après le théorème 4).

Comme $|\{\ell < \lambda ; \varphi(x, a_\ell) \in q_k\}| < n \to |\{\ell < \lambda ; q_k = q_\ell\}| < n$. Donc il y a λ q_ℓ différents, qui sont e. c. car complets. Cela entraîne que $R(p,\Delta,\lambda) \geq \alpha+1$. Contradiction.

2° Soit $q \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}_k)$ où $\varphi_k(\overline{x}, \overline{a}_k)$ se divise sur A. Soit $\Delta_0 = \{\varphi_k(\overline{x}, \overline{y}_k) ; k < n\}$. Soit Δ fini $\supset \Delta_0$. $q \vdash p \cup \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}_k) \vdash p$. $R(q,\Delta,\lambda) \leq R(p \cup \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x},\overline{a}_k),\Delta,\lambda) = \max_{k<n} R(p \cup \varphi_k(\overline{x},\overline{a}_k),\Delta,\lambda) < R(p,\Delta,\lambda)$ (d'après théorème 1, lemme 5 et 1°).

COROLLAIRE. – Si p est un type sur A et, $\forall \Delta$ fini $\subset L$, $R(p,\Delta,\infty) < \infty$, alors p ne dévie pas sur A.

Démonstration. – Supposons que p dévie sur A.

D'après le lemme 11 et l'hypothèse, il existe Δ fini tel que $R(p,\Delta,\infty)<R(p,\Delta,\infty)$. Contradiction.

THÉORÈME 12. – Si p est un I-type en $\overline{x}_I$ sur B qui ne dévie pas sur A, $(A \subseteq B)$, alors il y a un type complet $q \supset p$, en $\overline{x}_I$, sur B qui ne dévie pas sur A.

Démonstration. – Soit $\Gamma = \{\psi(\overline{x}_{\overline{u}},\overline{a}) ; \overline{u} \in I, \overline{a} \in B, \psi(\overline{x}_{\overline{u}},\overline{a})$ dévie sur $A\}$. Soit $q' = p \cup \{\neg \psi(\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{a}) ; \psi(\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{a}) \in \Gamma\}$. Nous allons montrer que q' est consistant. Sinon, il existe, $n < \omega$, $\overline{x} \subset \overline{x}_I$, $\psi_0, \dots, \psi_{n-1} \in \Gamma$ tels que $p \vdash \bigvee_{k<n} \psi_k(\overline{x})$.

Comme $\forall k$, $\psi_k(\overline{x})$ dévie sur A, il existe donc des formules $\theta_0^k(\overline{x}), \dots, \theta_{n(k)}^k(\overline{x})$ se divisant sur A et telles que $\models \psi_k(\overline{x}) \rightarrow \bigvee_{j\leq n(k)} \theta_j^k(\overline{x})$ donc $\bigvee_{k<n} \psi_k(\overline{x}) \vdash \bigvee_{k<n} \bigvee_{j\leq n(k)} \theta_j^k(\overline{x})$. Donc $p \vdash \bigvee_{k<n} \bigvee_{j\leq n(k)} \theta_j^k(\overline{x})$, c'est-à-dire que p dévie sur A. Contradiction. q' est donc consistant. Soit $q \supset q'$ un type complet en $\overline{x}_I$ sur B.

Si q dévie sur A alors $q \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}_k)$, $\overline{x} \subset \overline{x}_I$, φ_k se divisant sur A. Soit q^* fini $\subset q$ tel que $q^* \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}_k)$, et $\theta(\overline{x}, \overline{b}) = \bigwedge q^*$. $\overline{b} \in B$. q complet, donc $\theta(\overline{x}, \overline{b}) \in q$ et dévie sur A, donc $\theta(\overline{x}, \overline{b}) \in \Gamma$. Contradiction.

Définition 7. – p "splitte" fortement sur A s'il existe une suite d'indiscernables sur A, $I = (\overline{a}_n)_{n<\omega}$, et une formule φ, telles que $\varphi(\overline{x}, \overline{a}_0) \in p$, $\neg \varphi(\overline{x}, \overline{a}_1) \in p$.

Définition 8. – $\Delta \subseteq L$, $n < \omega$, $I = (\overline{a}_\ell)_{\ell<\omega}$. On dit que I est une suite Δ-n-indiscernable si $\forall \varphi \in \Delta$, $\forall m \leq n$, $\forall i_0 < i_1 < \dots < i_{m-1}$,

$$\models \varphi(\overline{a}_0, \dots, \overline{a}_{m-1}) \leftrightarrow \varphi(\overline{a}_{i_0}, \dots, \overline{a}_{i_{m-1}}).$$

LEMME 13. – Supposons $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ stable ; alors $\exists \Delta$ fini, $n < \omega$ tels que si I est un ensemble Δ-n-indiscernable de uplets de même longueur que $\overline{y}$, et si $\overline{a}$ est un uplet de même longueur que $\overline{x}$, on a :

$$|\{\overline{c} \in I ; \models \varphi(\overline{a}, \overline{c})\}| < n \quad \text{ou} \quad |\{\overline{c} \in I ; \models \neg \varphi(\overline{a}, \overline{c})\}| < n.$$

Démonstration. - Elle se fait par l'absurde.

Pour $n < \omega$, Δ fini $\subset L$, soit $\Gamma(n,\Delta) = \{ \psi(\overline{c}_0 , \dots , \overline{c}_{n-1}) \leftrightarrow \psi(\overline{c}_{i_0} , \dots , \overline{c}_{i_{n-1}}) ;$ pour $i_0 , \dots , i_{n-1}$ éléments deux à deux distincts de ω , $\psi \in \Delta\}$ $\cup \{\exists \overline{y} , \exists \overline{z} , \bigwedge_{j<n}(\varphi(\overline{y} , \overline{c}_j) \wedge \neg \varphi(\overline{z} , \overline{c}_j))\}$.

Si $\forall n < \omega$, $\forall \Delta$ fini $\Gamma(n , \Delta)$ est consistant, alors par compacité il existe I ensemble d'indiscernables, et un $\overline{a}$ tel que $\{\overline{c} \in I ; \models \varphi(\overline{c} , \overline{a})\}$ est infini et co-infini. Soit $I = (\overline{c}_n)_{n<\omega}$.

Alors $\forall \omega$ et ω' finis et disjoints $\subset \omega$ $\{\varphi(\overline{x},\overline{c}_n) ; n\in\omega\}\cup\{\neg \varphi(\overline{x},\overline{c}_n) ; n\in\omega'\}$ est consistant, donc

$$|S_\varphi(\cup_{n<\omega} \overline{c}_n)| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = |\cup_{n<\omega} \overline{c}_n| .$$

Contradiction.

THÉORÈME 14. - Soit T théorie stable

1° Si p splitte fortement sur A , alors p dévie sur A .

2° p dévie sur A si, et seulement si, il existe un ensemble B tel que p soit un type sur B , et, pour toute extension complète de p à B , splitte fortement sur A .

Démonstration. - Comme le fait de dévier ou de splitter fortement ne dépend que d'un nombre de formules fini du type, on peut considérer que p est un m-type, $m < \omega$.

1° Par définition et par stabilité, il existe un ensemble $I = (\overline{a}_n)_{n<\omega}$ d'indiscernables sur A et une formule φ telle que $\varphi(\overline{x} , \overline{a}_0) \in p$, $\neg \varphi(\overline{x} , \overline{a}_1) \in p$. D'après le lemme 13, il existe $n(\varphi)$ tel que pour tout $\overline{c}$

$$|\{n < \omega ; \models \varphi(\overline{c} , \overline{a}_n)\}| < n(\varphi)$$

ou

$$|\{n < \omega ; \models \neg \varphi(\overline{c} , \overline{a}_n)\}| < n(\varphi) .$$

Soit $\overline{b}_n = \overline{a}_{2n} \frown \overline{a}_{2n+1}$, $\psi(\overline{x} , \overline{b}_n) = \varphi(\overline{x} , \overline{a}_{2n}) \wedge \neg \varphi(\overline{x} , \overline{a}_{2n+1})$, $\{\overline{b}_n ; n < \omega\}$ est évidemment indiscernable sur A . D'autre part, $\forall w \subseteq \omega$, $|w| = n(\varphi)$, alors $\{\varphi(\overline{x} , \overline{b}_n) ; n \in w\}$ est inconsistant. Donc $\psi(\overline{x} , \overline{b}_0)$ se divise sur A . D'autre part $\varphi(\overline{x} , \overline{a}_0) \in p$, $\neg \varphi(\overline{x} , \overline{a}_1) \in p$, donc $p \vdash \psi(\overline{x} , \overline{b}_0)$. p dévie donc sur A .

2° $\leftarrow$ par le théorème 12, si p ne déviait pas, il aurait, pour tout $B \supset \mathrm{dom}\, p$, une extension complète à B qui ne dévierait pas, donc d'après le 1°, ne splitterait pas fortement.

$\rightarrow$ $p \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x} , \overline{a}_k)$ où φ_k se divise sur A . Donc il existe des ensembles d'indiscernables sur A $\{\overline{a}^k_i ; i < \omega\}$, $\overline{a}^k_0 = \overline{a}_k$ et il existe $n(k)$ tel que $\{\varphi_k(\overline{x} , \overline{a}^k_i) ; i < \omega\}$ soit $n(k)$ inconsistant.

Soit $B = \text{dom}\ p \cup \{\overline{a}_i^k \ ;\ k < n\ ,\ i < n(k)\}$ et soit $q \in S(B)$ prolongeant p. Comme $p \vdash \bigvee_{k<n} \varphi_k(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_k)$ et que q est complet, nous avons un $k < n$ tel que $q \vdash \varphi_k(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_k)$. Comme $\{\varphi_k(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_i^k)\ ;\ i < \omega\}$ est $n(k)$-inconsistant, il existe $i_0 < n(k)$ tel que $\neg\,\varphi_k(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_{i_0}) \in q$. En remplaçant $\overline{a}_1$ par $\overline{a}_{i_0}$, on a donc que q splitte fortement sur A.

<u>Définition</u> 9. - Soit $FE(A)$ = l'ensemble des relations d'équivalence entre uplets de même longueur, avec un nombre fini de classes d'équivalence, et qui sont définissables à paramètres dans A.

<u>Définition</u> 10. - Le type fort de $\overline{a}$ sur A, noté $st(\overline{a}\ ,\ A)$

$$st(\overline{a}\ ,\ A) = \{E(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\ ;\ E(\overline{x}\ ,\ \overline{y}) \in FE(A)\}\ .$$

<u>Remarque</u> 6. - $st(\overline{a}\ ,\ A) \vdash t(\overline{a}\ ,\ A)$.

Soit $\varphi(\overline{x}\ ,\ \overline{b}) \in t(\overline{a}\ ,\ A)$. Alors $E(\overline{x}\ ,\ \overline{y}) = \varphi(\overline{x}\ ,\ \overline{b}) \leftrightarrow \varphi(\overline{y}\ ,\ \overline{b})$ appartient à $FE(A)$.

LEMME 15. - $p \in S(B)$, <u>ne déviant pas sur</u> A, <u>réalisé par</u> $\overline{a}$, <u>alors</u> $R(st(\overline{a}\ ,\ B)\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0) = R(p\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0)$, <u>et donc</u>, <u>d'après le lemme</u> 11, $st(\overline{a}\ ,\ B)$ <u>ne dévie pas sur</u> A.

<u>Démonstration</u>. - Soit q fini $\subset st(\overline{a}\ ,\ B)$;

$$q = \{E_0(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\ ,\ \dots\ ,\ E_m(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\} \quad \forall\, j \leqslant m\ ,\ E_j(\overline{x}\ ,\ \overline{y}) \in FE(B)$$

donc

$$\bigwedge q = E_0(\overline{x}\ ,\ \overline{a}) \wedge \dots \wedge E_m(\overline{x}\ ,\ \overline{a}) \in FE(B)\ .$$

Nous allons montrer que si $E(\overline{x}\ ,\ \overline{a}) \in st(\overline{a}\ ,\ B)$, alors

$$R(E(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0) \geqslant R(p\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0)\ .$$

Choisissons un ensemble $\overline{a}_0\ ,\ \dots\ ,\ \overline{a}_k$, $(k < \omega)$ maximal tel que $\forall\ 0 \leqslant i < j \leqslant k, \models \neg\, E(\overline{a}_i\ ,\ \overline{a}_j)$ et tel que $\forall\, i \leqslant k$, $t(\overline{a}_i\ ,\ B) = t(\overline{a}\ ,\ B)$. C'est possible car $E(\overline{x}\ ,\ \overline{y}) \in FE(B)$. Alors $t(\overline{a}\ ,\ B) \cup \{\neg\, E(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_i)\ ;\ i \leqslant k\}$ est inconsistant, donc il existe $\varphi(\overline{x}\ ,\ \overline{c}) \in t(\overline{a}\ ,\ B)$ $(= p)$ tel que

$$\varphi(\overline{x}\ ,\ \overline{c}) \vdash \bigvee_{i \leqslant k} E(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_i)\ .$$

Comme $\forall\, i \leqslant k$, $t(\overline{a}_i\ ,\ B) = t(\overline{a}\ ,\ B)$, on a que

$$R(E(\overline{x}\ ,\ \overline{a}_i)\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0) = R(E(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0)$$

car le rang est stable par automorphisme.

D'après le lemme 5,

$$R(\bigvee_{i \leqslant k} E(\overline{x},\overline{a}_i),\Delta,\chi_0) = \max_{i \leqslant k} R(E(\overline{x},\overline{a}_i),\Delta,\chi_0) = R(E(\overline{x},\overline{a}),\Delta,\chi_0)$$

donc

$$R(p\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0) \leqslant R(\varphi(\overline{x}\ ,\ \overline{c})\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0) \leqslant R(E(\overline{x}\ ,\ \overline{a})\ ,\ \Delta\ ,\ \chi_0)$$

d'après le théorème 1.

Comme $\forall$ q fini $\subset st(\bar{a}, B)$, $R(q, \Delta, \chi_0) \geq R(p, \Delta, \chi_0)$ et que d'autre part $st(\bar{a}, B) \vdash p$, on a

$$R(st(\bar{a}, B), \Delta, \chi_0) = R(t(\bar{a}, B), \Delta, \chi_0) .$$

THÉORÈME 16. - Soient T théorie stable, $p, q \in S(M)$, $p \neq q$, $A \subseteq M$, p , q ne déviant pas sur A , et M étant $((|A| + 2)^{|T|})^+$ saturé. Alors il existe $E(\bar{x}, \bar{y}) \in FE(A)$ telle que $p(x) \cup q(y) \vdash \neg E(\bar{x}, \bar{y})$.

Démonstration. - Voir SHELAH ([2], p. 96).

Définition 11. - Un type p est stationnaire sur A s'il ne dévie pas sur A , et si p_1 et p_2 sont deux extensions e. c. de p , alors p_1 ou p_2 dévie sur A .

PROPOSITION 17. - Soit T théorie stable, $\forall \bar{a}$, $\forall A$, $st(\bar{a}, A)$ est stationnaire sur A .

Démonstration. - Soit $p = st(\bar{a}, A)$. D'après le lemme 15, p ne dévie pas sur A .

Soient p_1 et p_2 deux extensions e. c. de p qui ne dévient pas sur A . D'après le théorème 12 on peut les choisir complets sur M , $M \supseteq A$ et M $((|A| + 2)^{|T|})^+$ saturé. Donc $p_1, p_2 \in S(M)$. D'après le théorème 16, il existe $E(\bar{x}, \bar{y}) \in FE(A)$ telle que $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{y}) \vdash \neg E(\bar{x}, \bar{y})$, $p \subset p_1, p_2$, $E(\bar{x}, \bar{a}) \in p$, donc $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{y}) \vdash \neg E(\bar{x}, \bar{y}) \wedge E(\bar{x}, \bar{a}) \wedge E(\bar{y}, \bar{a})$. Contradiction car E est une relation d'équivalence.

THÉORÈME 18. - Soit T théorie stable.

Soit $p \in S(B)$, $A \subseteq B$, alors p ne dévie pas sur A si, et seulement si, $\forall \varphi$ formule,

$$R(p, \varphi, \chi_0) = R(p \upharpoonright A, \varphi, \chi_0) .$$

Démonstration. - $\leftarrow$ C'est évident d'après le lemme 11.

$\rightarrow$. Supposons que p ne dévie pas sur A . Soit $\bar{a}$ réalisant p . D'après le théorème 12, $q = st(\bar{a}, A)$ et $r = st(\bar{a}, B)$ ne dévient pas sur A .

D'après le lemme 15, si φ est une formule quelconque,

$$R(r, \varphi, \chi_0) = R(p, \varphi, \chi_0) \leq R(p \upharpoonright_A, \varphi, \chi_0) = R(q, \varphi, \chi_0) .$$

On va montrer que $R(r, \varphi, \chi_0) = R(q, \varphi, \chi_0)$. Supposons $R(q, \varphi, \chi_0) = n < \omega$

$$\Gamma_q(\varphi, n, \chi_0) = \{\psi(\bar{x}_\eta, \bar{a}) ; \eta \in \omega^n , \psi(\bar{x}, \bar{a}) \in q\}$$
$$\cup \{\psi(\bar{x}_\eta, \bar{z}_\nu^{i,j}) \leftrightarrow \neg \psi(\bar{x}_\rho, \bar{z}_\nu^{i,j}) ; \eta, \rho \in \omega^n , \nu \in \omega^m ,$$
$$m < n , \nu = \eta\upharpoonright_m = \rho\upharpoonright_m , \eta(m) = i , \rho(m) = j , i \neq j\} .$$

Cet ensemble de formules est consistant. On le réalise par $\overline{a}_\eta$, $\overline{a}_\nu^{i,j}$.

Soient $\overline{b}_\eta$, $\overline{b}_\nu^{i,j}$ tels que $st(\overline{a}_\eta , A) = st(\overline{b}_\eta , A)$ (i. e. $\forall E \in FE(A)$, $E(\overline{a}_\eta , \overline{b}_\eta)$.) $st(\overline{a}_\nu^{i,j} , A) = st(\overline{b}_\nu^{i,j} , A)$. $t(\bigcup \overline{b}_\eta \cup \bigcup \overline{b}_\nu^{i,j} , B)$ ne dévie pas sur A .

C'est possible car $t(\bigcup \overline{a}_\eta \cup \bigcup \overline{a}_\nu^{i,j} , A)$ ne dévie pas sur A et que $st(\overline{a}_\eta , A)$, $st(\overline{a}_\nu^{i,j} , A)$ ne dévient pas sur A , cf. les preuves du théorème 12 et du lemme 15.

D'après la proposition 17, r est l'unique extension non déviante de q sur A , donc $\overline{b}_\eta$ réalise r , car si $t(\overline{b}_\eta , B)$ ne dévie pas sur A , comme r est stationnaire $r \supset t(\overline{b}_\eta , B)$.

Remarque. - $\overline{a}$ réalise $st(\overline{a} , A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Groupe d'étude de Théories stables (B. POIZAT), 1re année, 1977/78. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978.

[2] SHELAH (S.). - Classification theory and the number of non-isomorphic models. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1978 (Studies in Logic, 92).