BRUNO POIZAT

Exercices sur la stabilité

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A9_0>

EXERCICES SUR LA STABILITÉ

réunis par Bruno POIZAT (*)

Exercice 1. - Si T est dénombrable et totalement transcendante, son ordre fondamental est fini ou dénombrable.

Exercice 2. - T stable ; soit M un modèle de T λ-compact, c'est-à-dire que tout ensemble consistant de moins de λ formules à paramètres dans M est réalisé dans M.

(a) Si $f_i(x , \bar{y}_i)$ est un ensemble de moins de λ formules dont $p \in S_1(M)$ représente toutes les conjonctions finies, montrer qu'il existe $\bar{a}_i \in M$ tels que $p \vdash \bigwedge f_i(x , \bar{a}_i)$.

(b) $M \prec N$, $p \in S_1(N)$ ne dévie pas sur M ; soit $f_i(x , \bar{a}_i)$ une famille de moins de λ formules à paramètres $\bar{a}_i$ dans N satisfaites par p ; montrer qu'il existe α dans M tel que $\vdash \bigwedge f_i(\alpha , \bar{a}_i)$.

Exercice 3. - $M \prec N \prec P$ modèles de T, $p \in S_1(M)$, q cohéritier de p sur N, N est $|M|^+$-saturé.

(a) Si $q \vdash f(x , \bar{a})$, où $\bar{a} \in N$, et si $\bar{a}' \in N$ a même type que $\bar{a}$ sur M, $q \vdash f(x , \bar{a}')$.

(b) Montrer que q n'a qu'un seul fils sur P qui soit cohéritier de p ; construire à partir de q une suite d'indicernables.

(c) On dit que p' est fils non spécial de p s'il existe un modèle où tous les fils de p' ont au moins deux conjugués par M-automorphisme ; montrer que p' est spécial si, et seulement si, on peut l'étendre en un type sur un modèle $|M|^+$-saturé qui a la propriété de (a) ; montrer que cette notion a la propriété d'extension, mais qu'elle n'est pas transitive, qu'elle permet de construire des suites d'indicernables. Donner des exemples de fils spéciaux qui ne sont ni héritiers ni cohéritiers de p.

Exercice 4. - T stable ; si tout type de $S_1(A)$ est stationnaire, A est algébriquement clos ; c'est suffisant dans le cas des corps différentiellement clos de caractéristique nulle, mais ça ne l'est pas en général.

Exercice 5. - Si T a un modèle M, avec un uple $\bar{a}$ et une formule f, et deux restrictions élémentaires N formées d'éléments satisfaisant tous $f(x , \bar{a})$, et

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU

N' formée d'éléments satisfaisant tous $\neg f(x, \bar{a})$, T est instable.

Exercice 6. - T stable ; a et b ont même type fort sur A si, et seulement si, il existe un modèle M contenant A tel que a et b aient même type sur M.

Exercice 7. - T stable ; si $p \in S_1(A)$ est adhérent aux types réalisés dans A, p est stationnaire (de multiplicité 1).

Exercice 8. - $A \subset B$; $f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ est dite presque (définissable) sur A (almost over A) s'il existe un cardinal λ tel que, pour tout modèle $M \supset B$, il y ait moins de λ formules $f(x, \bar{a}, \sigma\bar{b})$, où σ parcourt l'ensemble des A-automorphismes de M, qui aient des interprétations deux à deux distinctes. Montrer qu'en fait λ est fini, et qu'il existe un fragment fini $g(\bar{y})$ du type de $\bar{b}$ sur A tel que la relation d'équivalence

$$(\forall x) \quad f(x, \bar{a}, \bar{y}) \longleftrightarrow f(x, \bar{a}, \bar{y}')$$

ne découpe sur $g(\bar{y})$ qu'un nombre fini de classes. En considérant la formule

$$(\forall \bar{y}) \quad g(\bar{y}) \longrightarrow (f(x, \bar{a}, \bar{y}) \longleftrightarrow f(x', \bar{a}, \bar{y})),$$

montrer que f est presque sur A si, et seulement si, sa satisfaction ne dépend que du type fort de x sur A.

Exercice 9. - T stable, $A \subset B$; $p \in S_1(B)$ se divise sur A (splite over A) s'il existe $\bar{b}$ et $\bar{b}'$ dans B, de même type sur A, et une formule f telle que $p \vdash f(x, \bar{b}) \wedge \neg f(x, \bar{b}')$; il se divise fortement (strongly splite over A) si, en outre, $\bar{b}$ et $\bar{b}'$ peuvent être pris comme les deux premiers termes d'une suite infinie d'indicernables sur A. Montrer que p dévie sur A si, et seulement si, tout fils de p sur un modèle $|M|^+$-saturé se divise fortement sur A.

Exercice 10. - T stable, dans laquelle tous les types sont de multiplicité 1 ; $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p/\emptyset = q/\emptyset$; on réalise p et q en x, et on complète de manière à ce que le type de N sur $M \cup \{x\}$ ne dévie pas sur $\{x\}$; on appelle coproduit $p * q$ de p et de q la borne du type de x sur $M \cup N$ ainsi placés. Montrer que $p * q$ ne dépend que de la borne de p et de celle de q, donc que c'est une opération sur les classes de type. Montrer que le coproduit est commutatif et associatif, que $p \geqslant p * q$, que si p est réalisé, $p * q = p$, et que si p est la borne de $p/\emptyset$, $p * q = q$.

Exercice 11. - T est la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée.

(a) Montrer que, pour définir le coproduit, on a des problèmes avec les types forts (Considérer $(X + Y, XY$ sur $k(X))$.

(b) Montrer que, dans l'ordre fondamental des 3-types, pour les types au-dessus de la même réalisation, il n'y a en général ni borne inférieure, ni borne supérieure (Hint : un cône et un plan se coupent suivant les cas en une conique ou deux droites).

Exercice 12. - Soit R une notion de rang ; $p \in S_1(A)$ a une restriction finie de même rang, sauf si p est rangé et aucune de ses restrictions finies ne l'est.

Exercice 13. - T est ω-catégorique et stable ; montrer que tout type sur un ensemble fini de paramètres est de multiplicité finie ; en déduire que son rang U est aussi son rang de Morley. Montrer que si T est superstable, elle est totalement transcendante.

Exercice 14. - La somme naturelle $\alpha \pm \beta$ de deux ordinaux est la plus petite fonction telle que, si $\alpha' < \alpha$ ou $\beta' < \beta$, alors $\alpha' \pm \beta' < \alpha \pm \beta$; elle est associative et commutative ; si les développements de Cantor de α et β sont $\alpha = \sum \omega^\gamma n_\gamma$, $\beta = \sum \omega^\gamma m_\gamma$, alors $\alpha \pm \beta = \sum \omega^\gamma (n_\gamma + m_\gamma)$. On suppose T stable ; on note $RU(\bar{a}/A)$ le rang U du type de $\bar{a}$ sur A.

(a) $RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + RU(\bar{a}/A) \leqslant RU(\bar{a} \wedge \bar{b}/A) \leqslant RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) \pm RU(\bar{a}/A)$.

(b) Regarder la signification de cette double inégalité dans le cas des corps différentiels, a différentiellement transcendant sur A, b dérivée de a ; puis échanger a et b.

(c) Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont indépendants au-dessus de A (le type de $\bar{b}$ sur $A \cup \{\bar{a}\}$ ne dévie pas sur A), $RU(\bar{a} \wedge \bar{b}/A) = RU(\bar{a}/A) \pm RU(\bar{b}/A)$.

(d) Un type de RU, ω, ne peut dévier à cause d'un type de RU fini ; en déduire une démonstration simple du fait que, si T est ω_1-catégorique, tous ses types sont de RU fini.

(e) Soit X un ensemble d'éléments qui réalisent sur A des types tous de $RU\ \omega^\alpha$ (tous de RU 1, ou tous de $RU\ \omega$, ω^2, etc. ; ω^α n'est jamais somme naturelle de deux ordinaux inférieurs). En s'inspirant du lemme de l'échange, qui permet de définir la dimension des espaces vectoriels, montrer que les ensembles indépendants sur A maximaux extraits de X ont tous même cardinal (Si $x \in X$, $Y \subset X$, on dit que x est ciscendant sur Y si le type de x sur $A \cup Y$ dévie sur A ; on dit qu'il est transcendant sur Y, dans le cas contraire. x est ciscendant sur $\{x\}$; il est ciscendant sur Y si, et seulement si, il l'est sur une partie finie de Y ; si x et x' sont transcendants sur Y, et si x est ciscendant sur $Y \cup \{x'\}$, x' est ciscendant sur $Y \cup \{x\}$; enfin si x est ciscendant sur Y, et chaque élément de Y ciscendant sur Z, x est ciscendant sur Z. G est dit générateur si tout x de X est ciscendant sur G ; montrer, par induction sur λ, que si G est générateur et L libre, on peut remplacer les λ premiers éléments de L par des éléments de G en conservant la liberté).

Exercice 15. - On dit que T a la propriété d'indépendance s'il existe une formule $f(x, \bar{y})$ telle que, pour tout ensemble fini I,

$$T \vdash (\exists_{i\in I}\, x_i)\,(\exists_{j\in 2^I}\, \bar{y}_j)\ \bigwedge_{i\in j} f(x_i, \bar{y}_j) \wedge \bigwedge_{i\notin j} \neg f(x_i, \bar{y}_j)\ .$$

1° Montrer que, dans ce cas, pour tout I fini,

$$T \vdash (\exists_{j\in 2^I}\, x_j)\,(\exists_{i\in I}\, \bar{y}_i)\ \bigwedge_{i\in j} f(x_j, \bar{y}_i) \wedge \bigwedge_{i\notin j} \neg f(x_j, \bar{y}_i)\ .$$

2° Montrer que, pour tout cardinal λ, il existe un ensemble de paramètres de cardinal λ qui donne 2^λ types.

3° On considère un ensemble a_i, $i \in I$, de cardinal λ, contenu dans un modèle M de même cardinal, et $\bar{b}_j$, $j \in 2^I$, contenu dans une extension élémentaire N de M, tels que $\vdash f(a_i, \bar{b}_j)$ si, et seulement si, $i \in j$. A tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I, associer un type $p_{\mathcal{U}}$ de $S_1(N)$ qui cohérite de sa restriction à N ; montrer qu'il existe un type de $S_1(M)$ qui a 2^{2^λ} cohéritiers sur N.

4° Montrer que T a la propriété d'indépendance si, et seulement si, il existe une ω-suite indicernable sécable.

Exercice 16. - T stable.

1° Pour toute formule $f(x, \bar{y})$, il existe un entier n tel que, pour toute suite indicernable $S = a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$, et tout $\bar{b}$, le nombre de a_i qui satisfait $f(x, \bar{b})$ est inférieur à n, ou bien le nombre de a_i qui satisfait $\neg f(x, \bar{b})$ est inférieur à n. Trouver une définition $df(\bar{y})$ du type moyen de S qui n'utilise que $2^n + 1$ paramètres.

2° On suppose que T admet l'élimination des quanteurs dans un langage relationnel fini ; montrer que T est ω-catégorique. Montrer qu'il existe n fini tel que, si M est ω_1-saturé, tout $p \in S_1(M)$ ne dévie pas sur un certain ensemble de cardinal n ; en déduire que l'ordre fondamental de T est fini, et que la propriété précédente est vraie sur tout modèle M.

Exercice 17. - T stable.

1° Montrer que, si, dans l'ordre fondamental, il y a une suite ordinale descendante de longueur $\varkappa$, on peut trouver une suite $\bar{a}_\mu$, $\mu < \varkappa$, de uples finis, avec un type p sur leur réunion A, de restriction p_μ à $A_\mu = \{\bar{a}_\gamma ;\ \gamma < \mu\}$, tels que $p_{\mu+1}$ soit toujours extension déviante de p.

2° Montrer que, si $\lambda \geqslant \varkappa(T)$, $\mathrm{cof}(\lambda) < \varkappa(T)$, T n'a pas de modèle saturé de cardinal λ.

Hint : Par l'absurde : exprimer un tel modèle M comme réunion d'une suite croissante d'ensembles X_μ, $|X_\mu| < \lambda$, $\mu < \varkappa = \mathrm{cof}(\lambda)$; placer dans le modèle M un exemplaire de la suite $\bar{a}_\mu$ du 1°, de manière à ce que le type de $\bar{a}_\mu$ sur $X_\mu \cup A_\mu$ ne dévie pas sur A_μ et montrer que p est omis dans M.

Exercice 18. - T non superstable, dénombrable.

1° Montrer qu'il existe une suite de modèles dénombrables $M_0 < M_1 < \dots < M_n < \dots$, de réunion M, avec un type $p \in S_1(M)$, de restriction p_n à M_n, tels que p_{n+1} ne soit pas cohéritier de p_n.

2° Partant d'une extension élémentaire N_0 de M_0 de cardinal λ, construire une suite $N_0 \prec N_1 \prec \dots \prec N_n \prec \dots$ de modèles de cardinal λ, tels que $M_n \prec N_n$, et que le type de N_n sur M_{n+1} cohérite de sa restriction à M_n. Montrer que la réunion N des N_n, qui est de cardinal λ, n'est pas ω_1-saturée.