BRUNO POIZAT

Une théorie ω_1-catégorique à α_T fini

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. nº 8, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A8_0>

UNE THÉORIE ω_1-CATÉGORIQUE A α_T FINI

par Bruno POIZAT (*)

Je vais montrer que, dans une théorie T ω_1-catégorique, il y a une borne finie au rang de Morley des 1-types ; cette propriété s'exprime dans la littérature par " α_T est fini". La preuve originelle, utilisant un argument syntaxique élémentaire, mais compliqué, est de BALDWIN, celle que je donne ici est plus conceptuelle, mais demande quelques connaissances sur la **déviation.**

Soit donc T une théorie complète ω_1-catégorique ; soit $D(x)$ une formule fortement minimale : on peut supposer qu'elle est sans paramètre, car sinon on les ajouterait au langage de T ; par définition de la minimalité, si A est un ensemble de paramètres, tous les éléments, qui satisfont D et ne sont pas algébriques sur A, ont même type sur A. On sait que D ne donne pas de paire de Vaught, c'est-à-dire que si M est un modèle de T, et N une extension élémentaire propre de M, il y a dans $N - M$ des éléments qui satisfont D. Je note $t(a/A)$ le type de a sur A, $RM(a/A)$ le rang de Morley de ce type ; ^ désigne la concaténation.

Je vais démontrer, par récurrence sur l'entier n, la proposition suivante.

PROPOSITION.

1° _Si_ b _satisfait_ D, _et si_ $RM(a/A) \geq n+1$, _alors_ $RM(a/A \cup \{b\}) \geq n$.

2° _Si le type (sur_ $\emptyset$ _) de_ A_i ^ a_i _tend vers celui de_ A ^ a, _et si, pour tout_ i, $RM(a_i/A_i) \geq n+1$, _alors_ $RM(a/A) \geq n+1$.

Il faut amorcer la récurrence pour $n = 0$; le 1° est clair, car tout rang de Morley est ≥ 0 ; pour le 2°, si $RM(a/A) = 0$, c'est que a est algébrique sur A, qu'il existe une formule $f(x)$ à paramètres dans A, vraie pour a et qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments ; par hypothèse, ce serait le cas pour A_i ^ a_i, pour i assez grand, ce qui est contraire au fait que $RM(a_i/A_i) \geq 1$.

Montrons maintenant le pas n en commençant par le 1°. Je vais d'abord remplacer A par un modèle ω-saturé ; soit donc M un modèle ω-saturé contenant A, que je place par rapport à a et b de façon que le type de M sur $A \cup \{a, b\}$ ne dévie pas sur A ; il ne dévie pas non plus sur $A \cup \{b\}$, et, par symétrie, le type de a sur $A \cup \{b\} \cup M = M \cup \{b\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{b\}$, et

$$RM(a/M \cup \{b\}) = RM(a/A \cup \{b\}) ;$$

le type de M sur $A \cup \{a\}$ ne dévie pas sur A, par symétrie, le type de a sur M ne dévie pas sur A, et

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU

$$RM(a/M) = RM(a/A) .$$

Si le type de b sur $M \cup \{a\}$ n'est pas algébrique, il ne peut dévier sur M (car $RM(D) = 1$), par symétrie $t(a/M \cup \{b\})$ ne dévie pas sur M , et

$$RM(a/M \cup \{b\}) \geqslant n + 1 .$$

On suppose donc que $t(b/M \cup \{a\})$ est isolé par une formule $f(x , a , \bar{m})$; M étant ω-saturé, comme $RM(a/M) \geqslant n + 1$, $t(a/M)$ est point d'accumulation de types de rang de Morley supérieur à n ; soit donc une suite a_i telle que

$$RM(a_i/M) \geqslant n , \quad t(a_i/M) \neq t(a/M) , \text{ et } \quad t(a_i/M) \longrightarrow t(a/M) ;$$

pour i assez grand, il existe b_i dans D satisfaisant $f(x , a_i , \bar{m})$; $t(a_i \wedge b_i/M)$ tend vers $t(a \wedge b/M)$. Deux cas se présentent :

<u>1er cas</u> : Pour i arbitrairement grand, $b_i \notin M$, c'est-à-dire que b_i a même type sur M que b ; par hypothèse d'induction, $RM(a_i/M \cup \{b_i\}) \geqslant n - 1$, et en remplaçant b_i par b , j'obtiens une suite de types de rang de Morley $\geqslant n - 1$, qui s'accumulent sur leur limite $t(a/M \cup \{b\})$ $(t(a_i/M) \neq t(a/M))$; par conséquent

$$RM(a/M \cup \{b\}) \geqslant n .$$

<u>2e cas</u> : A partir d'un certain rang, tous les b_i sont dans M ; dans ce cas, $RM(a_i/M \cup \{b_i\}) = RM(a_i/M) \geqslant n$, et d'après la 2e clause de l'induction à l'étape précédente, comme le type de $M \wedge a_i \wedge b_i$ tend vers celui de $M \wedge a \wedge b$, $RM(a/M \cup \{b\}) \geqslant n$.

Montrons maintenant le 2°. Commencons par construire, grâce à la méthode de HENKIN, un modèle M_i contenant A_i ; cela consiste, si $\varkappa$ est le cardinal de A_i, à introduire $\varkappa$ nouveaux symboles de variables x_λ , $\lambda < \varkappa$, et à associer injectivement à chaque formule f à paramètres dans A_i , qui est de la forme $(\exists y)\ g(x_{\lambda_1} , \dots , x_{\lambda_n} , y)$, un ordinal $\lambda(f)$ inférieur à $\varkappa$ et supérieur aux indices $\lambda_1 , \dots , \lambda_n$ des x_λ apparaissant dans f , et à considérer la théorie comprenant, outre les énoncés satisfaits par les éléments de A_i , les formules

$$(\exists y) \quad g(x_{\lambda_1} , \dots , x_{\lambda_n} , y) \longrightarrow g(x_{\lambda_1} , \dots , x_{\lambda_n} , x_{\lambda(f)}) .$$

On vérifie sans peine que tout fragment fini de cette théorie est interprétable dans n'importe quel modèle contenant A_i , donc qu'elle est consistante ; et toute réalisation de ces x_λ constitue avec A_i un modèle M_i , puisque cet ensemble satisfait le test de Tarski. On remarquera qu'ainsi énumérés ces modèles forment un fermé de l'espace compact des types en $\varkappa + \varkappa$ variables.

Nous plaçons alors M_i de manière à ce que son type sur $A_i \cup \{a_i\}$ ne dévie pas sur A_i ; par compacité, quitte à extraire une suite, on peut supposer que le type de $M_i \wedge a_i$ a une limite réalisée par $M \wedge a$, où $A \subset M$; M est bien un modèle de T , car il satisfait les énoncés caractéristiques de la construction de HENKIN.

Comme $RM(a_i/M_i) \geqslant n + 1 \geqslant 1$, $a_i \notin M_i$, et par conséquent $a \notin M$; le modèle premier sur $M \cup \{a\}$ est donc strictement plus grand que M , et il existe b non dans M , satisfaisant D , dont le type sur $M \cup \{a\}$ est isolé par une formule $f(x)$; pour i assez grand, la formule correspondante sur $M_i \cup \{a_i\}$ est satisfaite par un élément b_i satisfaisant D . D'après ce que j'ai montré au 1°, $RM(a_i/M_i \cup \{b_i\}) \geq n$; $t(M_i \wedge a_i \wedge b_i)$ tend vers $t(M \wedge a \wedge b)$, et par hypothèse de récurrence, $RM(a/M \cup \{b\}) \geq n$; or, comme le type de b est isolé sur $M \cup \{a\}$, et non réalisé dans M (ou encore b est algébrique sur $M \cup \{a\}$ et transcendant sur M), le type de b sur $M \cup \{a\}$ dévie sur M ; par symétrie, le type de a sur $M \cup \{b\}$ dévie sur M , et $RM(a/M) > RM(a/M \cup \{b\})$.

COROLLAIRE 1. - <u>Il existe un entier</u> n <u>tel que, pour tout modèle</u> M , <u>et tout</u> $p \in S_1(M)$, $RM(p) \leq n$.

Sinon, il existerait sur un modèle M un type p de rang de Morley ω . Soit a réalisant p ; il existe b satisfaisant D , transcendant sur M et algébrique sur $M \cup \{a\}$; d'après la proposition $RM(a/M \cup \{b\}) \geq \omega$, ce qui est incompatible avec le fait que $t(a/M \cup \{b\})$ est extension déviante de $t(a/M)$.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout modèle</u> M , <u>et tout</u> $p \in S_1(M)$, $RM(p) = RU(p)$.

Supposons que $RM(p) = n + 1$; soit a réalisant p , et soit b satisfaisant D , algébrique sur $M \cup \{a\}$ et transcendant sur M ; $RM(a/M \cup \{b\}) \geq n$, mais en fait $RM(a/M \cup \{b\}) = n$, car, à cause de la déviation, $RM(a/M \cup \{b\}) < RM(a/M)$. Donc, tout type de rang de Morley $n + 1$ a un fils de rang de Morley n , et cette propriété caractérise le rang U .

<u>Remarque</u>. - Un système formé d'éléments du modèle premier sur $M \cup \{a\}$, satisfaisant D , et algébriquement indépendants sur M , est de cardinal au plus $RM(a/M)$; on prendra garde à ce qu'en général il n'existe pas de tel système de cardinal $RM(a/M)$ (Contre-exemple avec la théorie du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\omega}$).