FRANÇOISE DELON

Types localement isolés et théorème des deux cardinaux dans les théories stables dénombrables

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A7_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
1re année, 1977/78, n° 7, 10 p.

TYPES LOCALEMENT ISOLÉS ET THÉORÈME DES DEUX CARDINAUX DANS LES THÉORIES STABLES DÉNOMBRABLES

par Françoise DELON (*)

Le plan de cet exposé est très voisin de ceux qui traitaient de la construction des modèles atomiques et du théorème des deux cardinaux dans les théories ω-stables. Nous avions alors introduit la notion de type isolé, et montré la densité, dans $S_1(A)$, de l'ensemble des types isolés sur A, si A est un ensemble de paramètres. Pour cela, nous utilisions le rang de Morley. Dans le cadre plus général de la stabilité, ces notions ne sont plus adéquates : Nous commençons par définir une famille d'applications de l'ensemble des types non nécessairement complets sur A, dans $On \cup \{\infty\}$; ces applications, proches de notions de rang, vont jouer le rôle que jouait précédemment le rang de Morley : elles rangent tous les types si, et seulement si, la théorie est stable.

1. Définition du φ-rang d'un type.

Soit T une théorie dans un langage L, A un ensemble de paramètres.

Définition. - Soit p un type non nécessairement complet sur A, φ une formule à paramètres dans A et α un ordinal. Si p est consistant, on définit, par induction sur α, la relation

$$\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant \alpha$$

(le premier membre de l'inégalité se lit " φ-rang de p "). On pose :

$\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant 0$ est toujours vrai ;

Si α est limite, $\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, $\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant \beta$, $\forall \beta < \alpha$;

$\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant \alpha + 1$ si, et seulement si, pour tout fragment fini q de p, il existe un modèle $M \supseteq A$ de T et $\bar{m} \in M$ tels que

$$\mathcal{R}(q \cup \{\varphi(x , \bar{m})\} , \varphi) \geqslant \alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(q \cup \{\neg \varphi(x , \bar{m})\} , \varphi) \geqslant \alpha .$$

Le premier travail est d'établir la cohérence d'une telle définition. Pour cela, on ramène la satisfaction de la relation $\mathcal{R}(p , \varphi) \geqslant \alpha$ à la consistance de l'ensemble de formules

$$\Gamma(p , \varphi , \alpha) = \{\psi(x_\eta , \bar{a}) \; ; \; p \vdash \psi(x , \bar{a}) , \; \eta \in {}^{\alpha}2\} \cup \{\varphi(x_\eta , \bar{y}_{\eta|\beta})^{\eta(\beta)} \; ; \; \beta < \alpha , \; \eta \in {}^{\alpha}2\} \cup T ,$$

où ${}^{\alpha}2$ représente l'exponentiation ordinale, $\eta|\beta$ la restriction de η à β, et, avec la convention $\varphi(x , \bar{y})^0 = \varphi(x , \bar{y})$, $\varphi(x , \bar{y})^1 = \neg \varphi(x , \bar{y})$.

(*) Françoise DELON, UER Math., Tour 55, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION.

<u>Si</u> $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ <u>est consistant, et</u> $\alpha \geq \alpha'$, <u>alors</u> $\Gamma(p, \varphi, \alpha')$ <u>est consistant</u> ;

<u>Si</u> $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ <u>est consistant, et</u> $q \subset p$, <u>alors</u> $\Gamma(q, \varphi, \alpha)$ <u>est consistant.</u>

PROPOSITION. - <u>Si</u> $\Gamma(p, \varphi, \ell)$ <u>est consistant, pour tout entier</u> ℓ, <u>alors</u> $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ <u>est consistant, pour tout ordinal</u> α.

<u>Démonstration.</u> - Tout sous-ensemble fini de $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ est inclus dans un ensemble de la forme

$$\Delta = \{\psi(x_{\eta_i}, \bar{a}) ; p \vdash \psi(x, \bar{a}), i = 0 \dots n-1\}$$
$$\cup \{\varphi(x_{\eta_i}, \bar{y}_{\eta_i|\beta_j})^{\eta_i(\beta_j)} ; i = 0 \dots n-1, j = 0 \dots \ell - 1\} \cup T ,$$

où $\eta_i \in {}^{\alpha}2$, pour $i = 0 \dots n-1$, et $\beta_j < \alpha$, pour $j = 0 \dots \ell - 1$. On supposera que les β_j sont ordonnés de façon croissante, c'est-à-dire $j < j' \leq n-1$ implique $\beta_j < \beta_{j'}$. Définissons $\eta'_i \in 2^{\ell}$, $i = 0 \dots n-1$, par la relation

$$\eta'_i(j) = \eta_i(\beta_j) .$$

On a en vue les changements d'indices suivants dans l'expression de Δ

$$\eta_i \longrightarrow \eta'_i$$
$$\eta_i|\beta_j \longrightarrow \eta'_i|j$$
$$\eta_i(\beta_j) \longrightarrow \eta'_i(j)$$

Par défintion des η'_i, latroisième substitution est légitime.

La première substitution est correcte si, et seulement si, tous les η'_i sont distincts, ce qu'on impose par la condition suivante :

(*) Si $\eta_i \neq \eta_j$, on adjoint à l'ensemble $\{\beta_0, \dots, \beta_{\ell-1}\}$ le plus petit β séparant η_i et η_j.

Les η_i étant en nombre fini, on n'adjoint ainsi qu'un nombre fini de β.

La deuxième substitution est correcte si on a l'équivalence

$$\eta_i|\beta_j = \eta_k|\beta_j \quad \text{si, et seulement si,} \quad \eta'_i|j = \eta'_k|j .$$

Or la première égalité équivaut à

$$\forall \beta < \beta_j , \quad \eta_i(\beta) = \eta_k(\beta)$$
$$\Longleftrightarrow \forall \beta_{j'} < \beta_j , \quad \eta_i(\beta_{j'}) = \eta_k(\beta_{j'}) \quad (\text{par } (*))$$
$$\Longleftrightarrow \forall \ell, \forall j' < j , \quad \eta'_i(j') = \eta'_k(j')$$
$$\Longleftrightarrow \eta'_i|j = \eta'_k|j .$$

Tout sous-ensemble fini de $\Gamma(p, \varphi, a)$ est donc inclus dans un ensemble

$\Gamma(p, \varphi, \ell')$, pour un entier ℓ'. Par compacité, la consistance de ces ensembles implique celle de $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$.

PROPOSITION. - $(p, \varphi) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ est consistant.

La démonstration se fait par induction sur α.

1° Pas de problème pour $\alpha = 0$ puisqu'on a $\Gamma(p, \varphi, 0) = p$.

2° Soit α limite, donc $\alpha \geqslant \omega$. Si $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ est consistant, $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$ est consistant, pour tout ordinal γ ; par hypothèse d'induction, on a

$$\mathcal{R}(p, \varphi) \geqslant \gamma, \quad \forall \gamma < \alpha,$$

donc

$$\mathcal{R}(p, \varphi) \geqslant \alpha,$$

par définition du φ-rang.

Réciproquement, supposons qu'on a

$$\mathcal{R}(p, \varphi) \geqslant \alpha,$$

alors

$$\mathcal{R}(p, \varphi) \geqslant n, \quad \forall n \in \omega,$$

ce qui entraîne la consistance de $\Gamma(p, \varphi, n)$, $\forall n \in \omega$, et donc de $\Gamma(p, \varphi, \beta)$, pour tout ordinal β.

3° Reste le cas d'un ordinal successeur.

(a) Supposons $\mathcal{R}(p, \varphi) \geqslant \alpha + 1$; pour tout fragment fini q de p, il existe un modèle $M \supseteq A$ et $\bar{m} \in M$ tels que

$$\mathcal{R}(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geqslant \alpha ;$$

$$\mathcal{R}(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geqslant \alpha.$$

Par hypothèse d'induction, $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ et $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ sont consistants.

Dans le cas où α est infini, on conclut aussitôt que $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \gamma)$ est consistant, pour tout ordinal γ, donc à fortiori $\Gamma(q, \varphi, \gamma)$. Comme toute partie finie de $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$ est incluse dans un ensemble de ce genre, $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$ est consistant, pour tout ordinal γ.

Soit donc α fini. On va réunir les deux ensembles $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ et $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$, en prenant soin que les variables x_η et $\bar{y}_{\eta|\beta}$ intervenant dans l'un ou l'autre ne se confondent pas ; pour cela, on concatène 0 à l'indice des variables intervenant dans $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ et 1 à l'indice des variables intervenant dans $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$. On a ainsi la consistance de l'ensemble réunion

$$\{\psi(x_{0^\frown\eta}, \bar{a}) \; ; \; q \vdash \psi(x, \bar{a}) \, , \; \eta \in {}^{\alpha}2\}$$
$$\cup \{\varphi(x_{0^\frown\eta}, \bar{m}) \; ; \; \eta \in {}^{\alpha}2\} \cup \{\varphi(x_{0^\frown\eta}, \bar{y}_{\eta|\beta})^{\eta(\beta)} \; ; \; \eta \in {}^{\alpha}2 \, , \; \beta < \alpha\}$$
$$\cup \{\psi(x_{1^\frown\eta}, \bar{a}) \; ; \; q \vdash \psi(x, \bar{a}) \, , \; \eta \in {}^{\alpha}2\} \cup \{\neg\varphi(x_{1^\frown\eta}, \bar{m}) \; ; \; \eta \in {}^{\alpha}2\}$$
$$\cup \{\varphi(x_{1^\frown\eta}, \bar{y}_{1^\frown\eta|\beta})^{\eta(\beta)} \; ; \; \eta \in {}^{\alpha}2 \, , \; \beta < \alpha\} \cup T \, .$$

Cet ensemble est exactement $\Gamma(p , \varphi , 1 + \alpha)$ si on rebaptise $\bar{m} = \bar{y}_{\emptyset}$.

(b) Supposons $\Gamma(p , \varphi , \alpha + 1)$ consistant. Pour tout fragment fini q de p , $\Gamma(q , \varphi , \alpha + 1)$ est consistant. Séparons les variables dont l'indice η commence par 0 et celles où il commence par 1 . Le premier ensemble, par exemple, s'écrit

$$\{\psi(x_{\eta}, \bar{a}) \; ; \; q \vdash \psi(x, \bar{a}) \, , \; \eta \in {}^{\alpha+1}2 \, , \; \eta(0) = 0\}$$
$$\cup \{\varphi(x_{\eta}, \bar{y}_{\emptyset}) \, , \; \eta \in {}^{\alpha+1}2 \, , \; \eta(0) = 0\}$$
$$\cup \{\varphi(x_{\eta}, \bar{y}_{\eta|\beta})^{\eta(\beta)} \; ; \; \eta \in {}^{\alpha+1}2 \, , \; \eta(0) = 0 \, , \; 0 < \beta < \alpha + 1\} \, .$$

Grâce au changement de variable $\eta'(\beta) = \eta(\beta + 1)$, on reconnait dans cet ensemble $\Gamma(q \cup \{\varphi(x , \bar{y}_{\emptyset})\} , \varphi , \alpha)$ qui est donc consistant. Même raisonnement pour la consistance de $\Gamma(q \cup \{\neg\varphi(x , \bar{y}_{\emptyset})\} , \varphi , \alpha)$. Il suffit alors de réaliser $\bar{y}_{\emptyset}$ en $\bar{m}$ et d'utiliser l'hypothèse d'induction.

PROPOSITION (Propriétés des φ-rangs).

1° Si $\mathcal{R}(p , \varphi) \geq \alpha$ et $\alpha \geq \alpha'$, alors $\mathcal{R}(p , \varphi) \geq \alpha'$;

2° Si $\mathcal{R}(p , \varphi) \geq \alpha$ et $q \subset p$, alors $\mathcal{R}(q , \varphi) \geq \alpha$;

3° S'il existe un ordinal α tel qu'on n'ait pas $\mathcal{R}(p , \varphi) \geq \alpha$, alors il existe un plus grand entier n tel qu' on ait $\mathcal{R}(p , \varphi) \geq n$; cet entier est appelé φ-rang de p , et noté $n = \mathcal{R}(p , \varphi)$;

4° Si $\mathcal{R}(p , \varphi) = n \in \omega$, il existe un fragment fini p_0 de p vérifiant $\mathcal{R}(p_0 , \varphi) = \mathcal{R}(p , \varphi)$ (En particulier si p est complet, on peut prendre pour p_0 une formule de p) ;

5° Soit $p , q \in S_1(A)$ vérifiant

$$\mathcal{R}(p , \varphi) = n_0 = \mathcal{R}(p_0 , \varphi) = \mathcal{R}(q , \varphi) \, ,$$

où p_0 est un fragment fini de p , et $p_0 \subset q$. Alors toute formule $\varphi(x , \bar{a})$ est satisfaite en même temps par p et q .

Les quatre premiers points sont des corollaires de ce qui précède.

Démonstration du 5e point. - Supposons qu'il existe $\bar{a} \in A$ tel que

$$p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \, , \quad q \vdash \neg\varphi(x , \bar{a}) \, .$$

Des inclusions $p_0 \subset p_0 \cup \{\varphi(x , \bar{a})\} \subset p$, on déduit $\mathcal{R}(p_0 \cup \{\varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) = n_0$, et des inclusions $p_0 \subset p_0 \cup \{\neg\varphi(x , \bar{a})\} \subset q$, on déduit $\mathcal{R}(p_0 \cup \{\neg\varphi(x, \bar{a})\} , \varphi) = n_0$. Le φ-rang de p serait donc au moins $n_0 + 1$.

2. Propriétés des φ-rangs dans les théories stables.

PROPOSITION. - Les cinq conditions suivantes sont équivalentes.

1° T est stable ;

2° Pour toute formule φ , $\mathcal{R}(\{x = x\} , \varphi)$ est fini ;

3° Pour toute formule φ et tout type p , $\mathcal{R}(p , \varphi)$ est fini ;

4° Tout type complet est définissable ;

5° T est stable en tout cardinal λ vérifiant $\lambda^{\overline{\overline{T}}} = \lambda$.

Les implications $4° \Longrightarrow 5° \Longrightarrow 1°$ sont évidentes. De même, l'implication $2° \Longrightarrow 3°$ est évidente puisque le φ-rang ne peut que diminuer lorsqu'on augmente le type.

Démonstration de $\neg\, 2° \Longrightarrow \neg\, 1°$. - On suppose qu'on a, pour une formule φ

$$\mathcal{R}(\{x = x\} , \varphi) \geqslant \alpha \text{ , pour tout ordinal } \alpha ,$$

et on veut en déduire l'instabilité en tout λ .

Soit λ un cardinal quelconque ; posons

$$\mu = \inf\{\gamma \ ; \ 2^\gamma > \lambda\} \text{ , donc } \mu < \lambda .$$

On sait que $\Gamma(\{x = x\} , \varphi , \mu)$ est consistant. Réalisons dans un modèle de T les variables x_η et $\bar{y}_{\eta|\beta}$ intervenant dans cet ensemble. Dénombrons les $\bar{y}$: Ils sont indexés par l'ensemble

$$\{\eta|\beta \ ; \ \eta \in {}^{\mu}2 \ , \ \beta < \mu\} = \{\eta \ ; \ \eta \in {}^{\beta}2 \ , \ \beta < \mu\}$$

de cardinalité $\leq \lambda$. L'ensemble des x est de cardinalité $2^\mu > \lambda$. Pour montrer l'instabilité en λ , il suffit donc de vérifier que deux x distincts ont des types différents sur les $\bar{y}$. Or, si $\eta_1 \neq \eta_2$, soit β le premier ordinal tel que

$$\eta_1(\beta) \neq \eta_2(\beta) \ ;$$

on a donc

$$\eta_1|\beta = \eta_2|\beta \quad \text{et} \quad M \models \varphi(x_{\eta_1} , y_{\eta_1|\beta}) \wedge \neg\, \varphi(x_{\eta_2} , y_{\eta_2|\beta})$$

ou l'inverse

$$M \models \neg\, \varphi(x_{\eta_1} , y_{\eta_1|\beta}) \wedge \varphi(x_{\eta_2} , y_{\eta_2|\beta}) .$$

Démonstration de $3° \Longrightarrow 4°$. - Soit $p \in S_1(A)$ et φ une formule à paramètres dans A ; p est φ-rangé, donc, pour une formule $\psi \in p$, on a

$$\mathcal{R}(p , \varphi) = \mathcal{R}(\{\psi(x)\} , \varphi) = n_0 \in \omega .$$

Soit $\bar{a} \in A$. Alors

$$p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \mathcal{R}(\{\psi(x) \wedge \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) \geq n_0 .$$

On a, en effet, si $p \vdash \varphi(x , \bar{a})$,

$$\mathcal{R}(\{\psi(x)\} , \varphi) \geqslant \mathcal{R}(\{\psi(x) \wedge \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) \geqslant \mathcal{R}(p , \varphi) ,$$

d'où en fait l'égalité de ces trois φ-rangs.

On a de la même façon, si $p \vdash \neg \varphi(x , \bar{a})$,

$$\mathcal{R}(\{\psi(x) \wedge \neg \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) = n_0 .$$

Si on avait, en même temps, $\mathcal{R}(\{\psi(x) \wedge \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) \geqslant n_0$, le φ-rang de p serair au moins $n_0 + 1$.

On a donc établi l'équivalence suivante :

$p \vdash \varphi(x , \bar{a})$ si, et seulement si, $\Gamma(\{\psi(x) \wedge \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi , n_0)$ est consistant si, et seulement si,

$$T(A) \models \bigwedge_{\eta \in 2^{n_0}} \exists x_\eta [\psi(x_\eta) \wedge \varphi(x_\eta , \bar{a}) \wedge \bigwedge_{\beta < n_0} \exists y_{\eta|\beta} \varphi(x_\eta , y_{\eta|\beta})^{\eta(\beta)}]$$

(puisque dans ce cas Γ est un ensemble fini de formules). En conséquence, le type p est définissable.

3. Modèle localement atomique d'une théorie stable dénombrable.

Désormais, le langage L est <u>dénombrable</u> et T est une théorie <u>stable</u> ; A , B et C sont des ensembles de paramètres.

<u>Définitions</u>. - Soit $p \in S_1(A)$.

p est dit <u>localement isolé</u> sur A si, et seulement si, pour toute formule φ , il existe ψ , à paramètres dans A , telle que $p \vdash \psi(x)$ et, si $\bar{a} \in A$ et $p \vdash \varphi(x , \bar{a})$, alors

$$T(A) \vdash \forall x [\psi(x) \longrightarrow \varphi(x , \bar{a})] .$$

On appelle φ-<u>type</u> de p l'ensemble

$$\{\varphi(x , \bar{a}) , \bar{a} \in A , p \vdash \varphi(x , \bar{a})\} \cup \{\neg \varphi(x , \bar{a}) ; \bar{a} \in A , p \vdash \neg \varphi(x , \bar{a})\} .$$

On note cet ensemble $p(\varphi)$.

On emploiera l'expression " <u>φ-type isolé</u>" pour exprimer l'existence d'une formule Φ , consistante, telle que, $\forall \bar{a} \in A$, si $\varphi(x , \bar{a}) \in p$, alors

$$T(A) \vdash \forall x [\Phi(x) \longrightarrow \varphi(x , \bar{a})] ,$$

et, si $\neg \varphi(x , \bar{a}) \in p$, alors

$$T(A) \vdash \forall x [\Phi(x) \longrightarrow \neg \varphi(x , \bar{a})] .$$

On attire l'attention sur le fait qu'il y a abus de langage par rapport à la terminologie usuelle, en ce sens que

1° $p(\varphi)$ n'est pas clos par conséquence ;

2° La formule Φ n'a aucune raison d'être dans $p(\varphi)$.

Remarquons que p est localement isolé si, et seulement si, pour toute formule

φ , $p(\varphi)$ est isolé par une formule de p . En effet, si Φ isole

$$\{\varphi(x , \bar{a}) \ ; \ \bar{a} \in A , \ p \vdash \varphi(x , \bar{a})\}$$

et ψ isole $\{\neg\varphi(x , \bar{a}) \ ; \ \bar{a} \in A , \ p \vdash \neg\varphi(x , \bar{a})\}$, alors $\Phi \wedge \psi$ isole $p(\varphi)$. Réciproquement, une formule isolant $p(\varphi)$ isole chacun des deux ensembles ci-dessus.

PROPOSITION. - Soit $p \in S_1(A)$; p est localement isolé si, et seulement si, pour toute formule φ à paramètres dans A , l'ensemble $V_\varphi(p) = \{q \in S_1(A) ; \ q(\varphi) = p(\varphi)\}$ est un voisinage de p (plus précisément, le φ-type de p est isolé par une formule de p si, et seulement si, $V_\varphi(p)$ est un voisinage de p).

Démonstration.

Si p est localement isolé, soit $\Phi \in p$ une formule isolant $p(\varphi)$. Alors $V_\varphi(p)$ contient l'ouvert $\langle\Phi\rangle$ qui contient p .

Si $V_\varphi(p)$ est un voisinage de p , il contient un ouvert fondamental $\langle\Phi\rangle$ contenant p ; c'est-à-dire que tout $q \in S_1(A)$, tel que $q \vdash \Phi(x)$, satisfait $p(\varphi) = q(\varphi)$; ou encore $\forall \ \bar{a} \in A$, si $\varphi(x , \bar{a}) \in p$, on a

$$T(A) \vdash \forall \ x \ [\Phi(x) \longrightarrow \varphi(x , \bar{a})] \ .$$

Par ailleurs, $p \vdash \Phi(x)$.

PROPOSITION. - L'ensemble des types localement isolés sur A est dense dans $S_1(A)$.

Démonstration. - Le langage est dénombrable ; soit $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_N , \ldots$, $n < \omega$, une énumération des formules sans paramètre. Soit $\langle\psi\rangle$ un ouvert fondamental de $S_1(A)$. Prenons dans $\langle\psi\rangle$ un type p de φ_1-rang minimal. Il existe $\psi_1 \in p$ tel que

$$R(\psi_1 , \varphi_1) = R(p , \varphi_1) \ .$$

Alors, tout q contenant ψ et ψ_1 a même φ_1-rang et donc même φ_1-type que p . D'où l'inclusion

$$\langle\psi \wedge \psi_1\rangle \subset V_\varphi(p) = V_\varphi(q)$$

qui montre que q a son φ_1-type isolé par $\psi \wedge \psi_1$. On recommence l'opération en remplaçant $\langle\psi\rangle$ par $\langle\psi \wedge \psi_1\rangle$. On construit ainsi une suite de formules $\psi , \psi_1 , \ldots , \psi_n , \ldots$ telles que la conjonction des n premières soient consistante. Il existe un type les contenant toutes ; ce type, en fait unique, a, pour tout n , un φ_n-type isolé par une formule lui appartenant. Il est donc localement isolé.

Définition. - Soit $A \subset B$; B est dit localement atomique sur A quand tout type $p \in S_n(A)$ réalisé dans B est localement isolé sur A .

PROPOSITION. - Il y a transitivité de l'atomicité locale.

Démonstration. - Soit $A \subset B \subset C$, où C est supposé localement atomique sur B , ainsi que B sur A . Soit $\bar{c} \in C$ et φ une formule de L . Le type de $\bar{c}$ sur B, qu'on notera $t(\bar{c}, B)$, est localement isolé, d'où l'existence d'une formule f à paramètres $\bar{b} \in B$, vérifiant

$$\forall \bar{a} \in B \text{ tel que } t(\bar{c}, B) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) ,$$

donc, en particulier,

$$\forall \bar{a} \in A \text{ tel que } t(\bar{c}, A) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) , \quad t(B) \vdash \forall \bar{x} [f(\bar{x}, \bar{b}) \longrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})] .$$

De même $t(\bar{b}, A)$ est localement isolé sur A , d'où g vérifiant

$$t(A) \vdash \forall \bar{y} [g(\bar{y}) \longrightarrow [\forall \bar{x} [f(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})]]] ,$$

c'est-à-dire

$$t(A) \vdash \forall \bar{x} [\exists \bar{y} [g(\bar{y}) \wedge f(\bar{x}, \bar{y})] \longrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})] .$$

La formule $\exists \bar{y} [g(\bar{y}) \wedge f(\bar{x}, \bar{y})]$ isole donc $t(\bar{c}, A)$ et appartient à ce type puisque $g(\bar{b}) \wedge f(\bar{x}, \bar{b})$ est dans $t(\bar{c}, B)$.

PROPOSITION. - Soit M un modèle ω_1-saturé contenant A ; alors tout type localement isolé sur A est réalisé dans M .

Démonstration. - Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ énumèrent les formules du langage, et si p est un type localement isolé sur A , il suffit de considérer les formules $\psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ isolant $p(\varphi_1) \dots p(\varphi_n) \dots$ Le type incomplet $\{\psi_n(x), n \in \omega\}$ a pour seul prolongement p et est réalisé dans M .

Remarque. - Tout type p localement isolé sur un modèle M y est réalisé : En effet, considérons la formule $\bar{x} \neq \bar{m}$; il existe Φ telle que, si on suppose p non réalisé,

$$\forall \bar{m} \in M, \quad M \models \forall \bar{x} [\Phi(\bar{x}) \longrightarrow \bar{x} \neq \bar{m}] ,$$

ce qui prouverait que la formule Φ est inconsistante avec T .

Mais, si M est un modèle contenant A et que p est un type localement isolé sur A , il ne sera généralement pas réalisé dans M .

THÉORÈME. - Si T est une théorie stable dénombrable, il existe un modèle localement atomique construit au-dessus de tout système de paramètres.

Démonstration. - Soit A un ensemble de paramètres. On choisit un modèle M ω_1-saturé contenant A ; on va construire par induction une chaîne croissante d'ensembles A_i , $A \subset A_i \subset M$.

Rappel (cf. Exposé n° 2). - $A \models T(A)$ si, et seulement si, les types de $S_1(A)$ réalisés dans A constitue un ensemble dense dans $S_1(A)$.

Posons :

$A_0 = A$;

$A_{\alpha+1} = A_\alpha$ si A_α est un modèle. $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ sinon, où $a_\alpha \in M$ est tel que $t(q_\alpha, A)$ est localement isolé sur A ;

$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ si α est limite.

On vérifie par induction que chaque A_α est localement atomique sur A_β , $\beta < \alpha$ (pour passer des 1-types aux n-types, remarquer simplement que, si Φ isole $t(a_\alpha , A_\alpha)$, alors la formule

$$(x_1 = a_{\alpha_1}) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} = a_{\alpha_{n-1}}) \wedge \Phi(x_n)$$

isole $t((a_{\alpha_1} , \dots , a_{\alpha_{n-1}} , a_\alpha) , A_\alpha)$, où $\alpha_i < \alpha$).

La suite A_α stationne nécessairement pour un ordinal γ de cardinalité $\bar{\bar{\gamma}} \leq \bar{\bar{M}}$. Par construction, A_γ est un modèle, et il est localement atomique sur A .

4. Application au théorème des deux cardinaux.

On se contentera d'établir le théorème ci-dessous. Pour ses conséquences, en particulier, le résultat : Si T admet $\langle \alpha , \beta \rangle$, $\alpha > \beta \geq \omega$, elle admet $\langle \lambda , \mu \rangle$, $\forall \lambda , \mu$, $\lambda \geq \mu \geq \omega$, on se reportera à l'exposé n° 2.

THÉORÈME. - Soit T une théorie stable dénombrable. Si T admet une paire de Vaught (M , N) , elle admet une paire de Vaught (M_1 , M_1') quelque soit la sur-structure $M_1 \succ M$.

La démonstration utilise les mêmes résultats intermédiaires que dans les théories ω-stables. Dans tout ce qui suit, T est stable dénombrable.

PROPOSITION. - Soit M un modèle de T , A un ensemble de paramètres, N un modèle localement atomique sur $M \cup A$, x un élément de $N - M$. Alors $t(x , M \cup A)$ ne cohérite pas de sa restriction à M .

Démonstration. - Le $\neq$-type de x au-dessus de M est isolé par une formule Φ , soit

$$\forall\, m \in M ,\quad T(M) \vdash \forall y\, [\Phi(y) \longrightarrow y \neq m] .$$

Si $t(x , M \cup A)$ cohéritait de $t(x , M)$, on aurait un $\alpha \in M$ tel que

$$T(M) \vdash \Phi(\alpha) ,$$

ce qui est une contradiction.

PROPOSITION. - Soit $M \prec N$ deux modèles de T , p un type sur M , réalisé par $x_0 \in N$; φ est une formule de L et $\Phi_M = \{x ;\ x \in M \text{ et } M \vdash \varphi(x)\}$. Les trois situations suivantes sont équivalentes :

1° p ne fait pas augmenter φ ;

2° Si α est un paramètre vérifiant φ , $q = t(x_0 , M \cup \{\alpha\})$ hérite de sa restriction à M ;

3° φ n'augmente pas dans un modèle localement atomique au-dessus de $M \cup \{x_0\}$.

Démonstration.

$1° \Longrightarrow 2°$: Soit ψ une formule telle que $q \vdash \psi(x , \alpha , \bar{m})$, où $\bar{m} \in M$,

$$q \vdash \exists y \, \psi(x , y , \bar{m}) \wedge \varphi(y) .$$

Le type p satisfait donc la même formule. Considérons le modèle N_1 dans lequel p est réalisé, par x_1 , et φ n'augmente pas

$$N_1 \vdash \exists y \, \varphi(x_1 , y , \bar{m}) \wedge \varphi(y) .$$

Il existe donc $y_1 \in \Phi_{N_1}$ vérifiant $\psi(x_1 , y_1 , \bar{m})$, et on a

$$p \vdash \psi(x , y_1 , \bar{m}) ,$$

où $y_1 \in M$ puisque $\Phi_{N_1} = \Phi_M$.

$2° \Longrightarrow 3°$: Soit N_0 un modèle localement atomique au-dessus de $M \cup \{x_0\}$. Si z est un élément quelconque de $N_0 - M$, $t(z , M \cup \{x_0\})$ ne cohérite pas de $t(z , M)$, ou de façon équivalente, $t(x_0 , M \cup \{z\})$ n'hérite pas de $t(x_0 , M)$. L'hypothèse $\varphi(z)$ n'est donc jamais vérifiée quand on a $z \in N_0 - M$.

$3° \Longrightarrow 1°$: C'est trivial.

PROPOSITION. - Soit M et N deux modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. Si p et q sont équivalents, et que p n'augmente pas Φ_M , alors q n'augmente pas Φ_N .

La démonstration est la même que dans l'exposé n° 2. Le théorème s'établit maintenant sans difficulté : On considère le type $p \in S_1(M)$ d'un élément de $N - M$. Son héritier p_1 sur M_1 n'augmente pas Φ_{M_1} (par la proposition qui précède). Il suffit de prendre pour M_1' un modèle où p_1 est réalisé sans augmenter φ , par exemple, un modèle localement atomique construit.