GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

BRUNO POIZAT

**Rangs des types dans les corps différentiels**

*Groupe d'étude de théories stables*, tome 1 (1977-1978), exp. n° 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A6_0>

# RANGS DES TYPES DANS LES CORPS DIFFÉRENTIELS

par Bruno POIZAT (*)

## 1. Quelques lemmes algébriques faciles.

Un corps différentiel (c. d.) est un corps $k$ (commutatif), que je supposerai toujours de caractéristique nulle, muni d'une dérivation, c'est-à-dire d'une application $d$ de $k$ dans $k$ satisfaisant

$$d(x + y) = dx + dy \ , \quad dxy = x\,dy + y\,dx \ ;$$

on note habituellement $x'$ , $x''$ , ... au lieu de $dx$ , $d(dx)$ , ... Une constante est, par définition, un élément de dérivée nulle ; les constantes de $k$ forment un sous-corps de $k$ , contenant le corps des nombres rationnels.

L'anneau différentiel $k\{X\}$ des polynômes différentiels en la variable $X$ , à coefficients dans $k$ , est, par définition, l'anneau $k[X , X' , \ldots , X^{(n)} , \ldots]$ des polynômes en une infinité dénombrable de variables, muni de l'unique dérivation prolongeant celle de $k$ et telle que la dérivée de $X^{(n)}$ soit $X^{(n+1)}$ ; en d'autres termes,

$$P' = P^* + \sum X^{(n+1)}\ \partial P/\partial X^{(n)} \ ,$$

où $P^*$ est obtenu en dérivant les coefficients de $P$ , les $\partial$ étant les dérivées partielles des polynômes au sens ordinaire. L'ordre d'un polynôme différentiel $P$ , qui n'est pas dans $k$ , est, par définition, l'indice $N$ de la plus haute dérivée de l'inconnue qui y intervient ; pour faire l'économie de cas particuliers parasites dans l'énoncé des résultats qui vont suivre, on convient que $0$ n'a pas d'ordre, et que les autres éléments de $k$ sont d'ordre $-1$ . Si $P$ est d'ordre $N \geqslant 0$, sa séparante $S(P)$ est, par définition, $\partial P/\partial X^{(N)}$ ; on remarque que $S(P)$ est non nul (cette situation est propre à la caractéristique $0$ ), et de degré en $X^{(N)}$ inférieur à celui de $P$ : $P$ ne peut diviser $S(P)$ . $k\{X\}$ , anneau de polynômes à coefficients dans un corps, est factoriel.

Un idéal $I$ de $k\{X\}$ est dit différentiel s'il est clos par dérivation ; dans ce cas-là, la dérivation de $k\{X\}$ induit une dérivation sur le quotient $k\{X\}/I$ ; si $A$ est un ensemble de polynomes différentiels, l'idéal $\langle A\rangle$ engendré, au sens ordinaire, par les éléments de $A$ et leurs dérivées successives est le plus petit idéal différentiel contenant $A$ , qu'on appelle idéal différentiel engendré par $A$ . Un autre résultat trivial est que toute dérivation définie sur un anneau intègre s'étend, et de manière unique, à son corps des quotients.

Si $a$ est un élément d'un sur-corps différentiel $K$ du c. d. $k$ , le plus petit

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU.

sous-corps différentiel de $K$ contenant $k$ et $a$ ("corps différentiel engendré par $a$ au-dessus de $k$ ") est isomorphe au corps des quotients de l'anneau différentiel $k\{X\}/I_a$ où $I_a$ est l'idéal différentiel et premier, différent de $k\{X\}$ tout entier (convenons d'exclure ce dernier de la famille des idéaux premiers), des polynômes différentiels annulés par $a$. Réciproquement, à tout idéal différentiel premier de $k\{X\}$ est associée une extension de $k$ engendrée par un seul élément ; et, par conséquent, l'étude des extensions de c. d. necessite celle des idéaux premiers différentiels de $k\{X\}$, qui est l'objet des quatres lemmes suivants.

LEMME 1. - *Soit $P$ un polynôme différentiel d'ordre $N \geqslant 0$, sans facteur commun avec sa séparante ; l'idéal $\langle P \rangle$ ne contient pas de polynôme différentiel d'ordre inférieur à $N$, et ses éléments d'ordre $N$ sont multiples de $P$.*

Soit $Q$ dans $\langle P \rangle$, d'ordre au plus $N$ ;

$$Q = Q_0 P + Q_1 P' + \dots + Q_m P^{(m)} ;$$

remarquons que $P^{(m)} = S(P) X^{(N+m)} + R_m$, où $R_m$ est nul ou d'ordre inférieur strictement à $N + m$ ; dans l'égalité ci-dessus entre polynômes, nous pouvons substituer $X^{(N+m)}$ par $-R_m/S(P)$, et ensuite rendre entier en multipliant par une puissance convenable de $S(P)$. On obtient une égalité

$$S(P)^{k_1} Q = Q_{0,1} P + \dots + Q_{m-1,1} P^{(m-1)} .$$

En répétant $m$ fois ce procédé, on obtient $S(P)^k Q = RP$, et comme $P$ et $S(P)$ sont étrangers, $P$ divise $Q$.

LEMME 2. - *Soit $P$ un polynôme différentiel irréductible d'ordre $N \geqslant 0$, et soit $I(P)$ l'ensemble des polynômes différentiels $Q$ tels que, pour $m$ assez grand, $S(P)^m Q \in \langle P \rangle$. $I(P)$ est un idéal différentiel premier qui ne contient pas d'éléments d'ordre inférieur à $N$, ses éléments d'ordre $N$ étant multiples de $P$.*

$I(P)$ est un idéal différentiel, car si $S(P)^m Q \in \langle P \rangle$, $S(P)^{m+1} Q' \in \langle P \rangle$. Par ailleurs, si $Q$ est d'ordre au plus $N$, et si $S(P)^m Q \in \langle P \rangle$, d'après le lemme 1, $P$ divise $S(P)^m Q$, donc $P$ divise $Q$.

Reste à voir que $I(P)$ est premier ; supposons que $UV$ soit dans $I(P)$ ; en utilisant les formules $P^{(n)} = S(P) X^{(N+n)} + R_n$, où $R_n$ est d'ordre inférieur à $N + n$, on élimine successivement les dérivées de l'inconnue d'ordre supérieur à $N$, et on obtient des entiers $u$ et $v$, et des polynômes $U_1$ et $V_1$ d'ordre au plus $N$, tels que $S(P)^u U$ soit congru à $U_1$ modulo $\langle P \rangle$, et que $S(P)^v V$ soit congru à $V_1$ modulo $\langle P \rangle$ ; $U_1 V_1$ est dans $I(P)$, donc est divisible par $P$ ; donc $P$ divise $U_1$, c'est-à-dire $U \in I(P)$, ou $P$ divise $V_1$, c'est-à-dire $V \in I(P)$.

LEMME 3. - *Tout idéal différentiel premier non nul est de la forme* $I(P)$.

Soit $I$ un idéal différentiel premier non nul ; je rappelle que, par convention,

$I$ n'est pas $k\{X\}$ , considérons l'ensemble des éléments de $I$ d'ordre $N$ minimum, puis, parmi ceux-ci, ceux qui sont de degré en $X^{(N)}$ minimum ($N \geqslant 0$ !!) , et enfin, parmi ces derniers, un élément $P$ de degré total minimum.

Je dis tout d'abord que $P$ est irréductible ; en effet, si $P = P_1 P_2$ , et si $P_1$ est d'ordre inférieur à $N$ , $P_1$ n'est pas dans $I$ et, comme ce dernier est premier, $P_2$ est dans $I$ : c'est contraire au choix de degré total minimum ; et si les deux facteurs sont d'ordre $N$ , on a une contradiction avec le choix de degré minimum en $X^{(N)}$ . Montrons maintenant que $I = I(P)$ .

Si $Q \in I(P)$ , pour $m$ assez grand $S(P)^m Q$ est dans $\langle P \rangle$ , donc dans $I$ , et comme notre choix de $P$ impose $S(P) \notin I$ , et que $I$ est premier, $Q$ est dans $I$.

Soit maintenant $Q$ dans $I$ ; en appliquant le même procédé d'élimination que dans la preuve du lemme 2, on obtient un entier $m$ et un polynôme $Q_1$ , d'ordre au plus $N$ , tel que $S(P)^m Q$ soit congru à $Q_1$ modulo $\langle P \rangle$ , donc $Q_1 \in I$ . Si nous considérons $Q_1$ et $P$ comme polynômes en $X^{(N)}$ sur le corps $k(X , X' , \ldots , X^{(N-1)})$ , nous pouvons effectuer la division euclidienne de $Q_1$ par $P$ , et ensuite rendre entier, en multipliant par une puissance convenable du coefficient majeur de $P$ , $M(P)$ (qui est un polynôme en $X , \ldots , X^{(N-1)}$ ) ; on obtient alors une égalité $M(P)^k Q_1 = UP + R$ , où le degré de $R$ (en $X^{(N)}$ !) est strictement inférieur à celui de $P$ ; $R$ est dans $I$ , et par suite du choix de $P$ , $R = 0$ ; comme $P$ est irréductible et ne peut diviser $M(P)$ , $P$ divise $Q_1$ ; donc $Q \in I(P)$ .

Remarque 1. - Le processus d'élimination des dérivées d'ordre supérieur à $N$ montre que l'entier $m$ , à partir duquel $S(P)^m Q$ appartient ou non à $\langle P \rangle$ , peut être borné en fonction de l'ordre de $Q$ et de son degré total.

Remarque 2. - Comme dans le cas algébrique, les idéaux premiers en une variable correspondent aux polynômes irréductibles, ces derniers n'intervenant qu'à multiplication près par un élément de $k$ . Mais ici le lien qui unit $P$ à $I(P)$ est plus subtil ; $I(P)$ est le plus petit idéal différentiel premier qui contient $P$ et pas $S(P)$ ; en général, il n'existe pas de plus petit idéal différentiel premier contenant $P$ ($P = X'^2 - X$) .

Remarque 3. - Tout idéal différentiel premier, qui contient $P$ et qui n'est pas $I(P)$ , contient des éléments d'ordre inférieur à $N$ ; en effet, un tel idéal est un $I(Q)$ , et si $Q$ était d'ordre $N$ , il diviserait $P$ .

Remarque 4. - Si l'idéal des polynômes différentiels annulés par $a$ n'est pas nul, l'ordre $N$ de son équation minimale est aussi le degré de transcendance sur $k$ , en tant que corps ordinaire, du c. d. engendré par $a$ au-dessus de $k$ ; ce corps est en effet, engendré par $a , a' , \ldots , a^{(N)}$ , puisque les dérivées d'ordre supérieur s'obtiennent rationellement à partir de celles-ci, et les $N$ premiers éléments de cette suite constituent une base de transcendance de l'extension.

Lorsque $a$ n'annule aucune équation non nulle à coefficients dans $k$ , on dit que $a$ est <u>différentiellement transcendant</u> sur $k$ ; on convient alors que son polynôme minimal, qui est associé à l'idéal nul, est un être mythique d'ordre $\omega$ .

<u>Remarque</u> 5. - Si $P$ est irréductible sur le corps $k$ algébriquement clos, d'après le théorème des zéros, il reste irréductible sur toute extension de $k$ . Si $k$ n'est pas algébriquement clos, on obtient les facteurs irréductibles définitifs de $P$ sur la clôture algébrique $K$ de $k$ (on peut vérifier, si on veut, que la dérivation de $k$ s'étend, et de manière unique, à sa clôture algébrique) ; si $P_1$ est un tel facteur, on remarque que le produit des conjugués de $P_1$ par k-automorphismes de $K$ divise $P$ , et est à coefficients dans $k$ puisqu'il est conservé par tout k-automorphisme (rappelons que nous sommes en caractéristique nulle), donc est égal à $P$ . Il suit de cette remarque que tous les facteurs irréductibles définitifs de $P$ sont conjugués, et que chacun n'intervient qu'une seule fois, J'appellerai <u>multiplicité</u> de $P$ le nombre de ces facteurs irréductibles définitifs; par convention, le polynôme différentiel d'ordre $\omega$ est de multiplicité $1$ .

Quand plusieurs corps différentiels sont en jeu, je note $I(P , k)$ l'idéal premier de $k\{X\}$ dont le polynôme minimal est $P$ .

LEMME 4. - <u>Soient</u> $K$ <u>un c. d. étendant le c. d.</u> $k$ , $P$ <u>un polynôme irréductible de</u> $k\{X\}$ , $P_1$ <u>un diviseur irréductible de</u> $P$ <u>dans</u> $K\{X\}$ ; <u>la trace de</u> $I(P_1 , K)$ <u>sur</u> $k\{X\}$ <u>est exactement</u> $I(P , k)$ .

$P = P_1 P_2$ ; $S(P) = P_2 S(P_1) + P_1 \partial P_2/\partial X^{(N)}$ ; et, d'après la remarque 5, $P_1$ ne divise pas $P_2$ .

Soit donc $Q$ dans $k\{X\}$ ; si $Q \in I(P , k)$ , pour $m$ assez grand, $S(P)^m Q$ est dans $\langle P , k\rangle$ , qui est contenu dans $\langle P_1 , K\rangle$ , qui est contenu dans $I(P_1 , K)$ ; $P_2^m S(P_1)^m Q$ est dans $I(P_1 , K)$ , ainsi que $Q$ , puisque cet idéal est premier.

Si $Q \in I(P_1 , K)$ , $S(P_1)^m Q \in \langle P_1 , K\rangle$ , $P_2^m S(P_1)^m Q \in \langle P_1 , K\rangle$ , $S(P)^m Q \in \langle P_1 , K\rangle$ , et le polynôme $Q_1$ des lemmes précédents, qui est à coefficients dans $k$ , doit être divisible par $P_1$ : il l'est aussi par $P$ .

## 2. Un peu de logique.

Un <u>corps différentiellement clos</u> (de caractéristique nulle) est un c. d. $k$ dans lequel tout système formé d'une équation $P(X) = 0$ d'ordre $N \geqslant 0$ , et d'une inéquation $Q(X) \neq 0$ d'ordre strictement inférieur à $N$ , à coefficients dans $k$ , a une solution dans $k$ . On voit que cette solution s'axiomatise élémentairement, et que les corps différentiels clos sont en particulier algébriquement clos. On remarquera finement qu'un système fini d'inéquations peut se remplacer par une seule, leur produit.

LEMME 5. <u>Tout c. d. se plonge dans un corps différentiellement clos.</u>

D'après le lemme 2, tout polynôme différentiel $P$ d'ordre $N \geqslant 0$ , à coefficients dans $k$ , a, dans une certaine extension de $k$ , une solution qui n'annule aucun polynôme de $k\{X\}$ d'ordre inférieur à $N$ . On ajoute successivement un tel élément pour chaque polynôme de $k\{X\}$ , et on obtient un corps différentiel $k_1$ ; puis on répète cette opération avec $k_1$ pour obtenir $k_2$ , etc. La réunion des $k_n$ est un c. d. c.

LEMME 6. - Soient $K$ et $L$ deux c. d. c. $\omega$-saturés, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux n-uples extraits respectivement de $K$ et de $L$ et qui satisfont les mêmes équations (à coefficients rationnels) ; $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient infini.

Ajoutons un élément $\alpha$ à $\bar{a}$ ; soit $P$ l'équation minimale de $\alpha$ sur le c. d. engendré par $\bar{a}$ , et soit $Q$ le polynôme correspondant en face. D'après la remarque 3 du § 1, pour dire que $Q$ est le polynôme minimal de $X$ , il suffit de dire que $X$ annule $Q$ et aucun polynôme d'ordre inférieur : comme $L$ est différentiellement clos, c'est finiement satisfaisable dans $L$ , et comme $L$ est $\omega$-saturé, c'est satisfait par un élément $\beta$ de $L$ . $\bar{a} \wedge \alpha$ et $\bar{b} \wedge \beta$ satisfont les mêmes équations.

Le lemme 6 prouve que la théorie $T$ des corps différentiellement clos de caractéristique nulle est complète et admet l'élimination des quanteurs : le lemme 5 prouve, en outre, que c'est le modèle-complétion de la théorie des c. d. de caractéristique nulle. Rappelons que cela signifie que, si on plonge le c. d. $k$ , d'une part dans le c. d. c. $K$ , d'autre part dans le c. d. c. $L$ , les énoncés élémentaires, satsifaits par les éléments de $k$ , sont les mêmes dans $K$ et dans $L$ ; une illustration d'une semblable situation est le théorème des zéros de Hilbert, pour les corps ordinaires ; il lui correspond donc une version différentielle.

Vu l'élimination des quanteurs, il est clair que deux éléments d'un c. d. c. contenant le c. d. $k$ ont même type au-dessus de $k$ si, et seulement si, ils ont même polynôme minimal à coefficients dans $k$ .

Si $p$ est un type au-dessus de $k$ , et si $K$ est un c. d. étendant $k$ , nous distinguons, parmi les extensions de $p$ à $K$ , celles qui n'abaissent pas l'ordre de l'équation minimale, c'est-à-dire celles qui correspondent aux facteurs irréductibles du polynôme minimal $P$ de $p$ , et que nous appelons fils non déviant de $p$ . Les autres extensions sont appelées fils déviant de $p$ . Suivant nos conventions, le seul fils non déviant du type différentiel transcendant est le type différentiel transcendant. La multiplicité de $p$ est, par définition, le nombre de fils non déviant qu'on finit par obtenir ; elle est égale à la multiplicité de $P$ définie dans la remarque 5 du § 1. On remarque en passant qu'au-dessus d'un corps algébriquement clos, donc en particulier au-dessus d'un corps différentiellement clos, tout type est de multiplicité 1 .

Arrivés à ce point de l'exposé, les auditeurs ayant une très légère familiarité avec la stabilité voient immédiatement que la théorie $T$ est stable, et même $\omega$-stable, la méthode de preuve la plus primitive consistant à compter les types. Ils reconnaissent, dans la notion de déviation présentée ici, le cas particulier de cette notion telle qu'on la définit dans le cadre général des théories stables. A ceux-ci est destiné l'exercice facile suivant.

EXERCICE 1. - Soit $P$ un polynôme différentiel à coefficients dans un c. d. c. $k$, dont un des coefficients est égal à 1 ; montrer que les coefficients de $P$ s'expriment rationellement à partir d'un certain nombre de solutions de $P$ contenues dans $k$ et de leurs dérivées successives (Analogue du résultat bien connu qui exprime les coefficients d'un polynôme algébrique par les fonctions symétriques élémentaires de ses racines).

[Si SABBAGH arrive à le faire, je m'engage à lui payer un café !]

## 3. Quelques rangs.

Suivant la définition de LASCAR, une notion de rang est une fonction $R$ qui attribue à chaque type $p$ de la théorie $T$ une valeur ordinale (on dit alors que $p$ est rangé par $R$) ou bien le symbole $\infty$, supposé supérieur à tous les ordinaux (dans ce cas, on dit que $p$ est non rangé par $R$), et qui satisfait les axiomes suivants :

1° Si $p$ et $q$ sont isomorphes, $R(p) = R(q)$.

2° Si $q$ est fils de $p$, $R(q) \leqslant R(p)$.

3° (Extension) Si $p \in S_1(A)$, et si $A \subset B$, $p$ a dans $S_1(B)$ un fils de même rang.

4° (Multiplicité bornée) Etant donné $p$ rangé par $R$, il existe un cardinal qui borne le nombre de fils équirangs de $p$ sur toute extension de son ensemble de paramètres.

Une théorie $T$ est dite superstable lorsqu'il existe une notion de rang qui range tous les types. Le théorème le plus étrange de la thèse de LASCAR affirme que, si deux rangs $R_1$ et $R_2$ rangent tous deux le type $p$, les fils équirangs de $p$ sont les mêmes au sens de $R_1$ qu'au sens de $R_2$ ; ce résultat ne s'éclaire que lorsqu'on se rend compte que ces fils équirangs sont exactement les fils non déviants de $p$ ! Cela permet de définir le plus petit de tous les rangs, appelé rang $U$ ou rang de Lascar, par l'induction suivante :

$RU(p) \geqslant \alpha + 1$ si $p$ a un fils déviant $q$, avec $RU(q) \geqslant \alpha$ ;

$RU(p) \geqslant \alpha$ limite si $RU(p) \geqslant \beta$, pour tout $\beta < \alpha$.

Naturellement, s'il existe un plus petit $\alpha$ tel que $RU(p) \not\geqslant \alpha + 1$, on pose $RU(p) = \alpha$ ; sinon, on pose $RU(p) = \infty$.

Un rang est dit continu si, pour tout $\alpha$, les types de rang supérieur à $\alpha$ forment un fermé ; on montre, sans trop de peine, qu'il existe un plus petit rang continu $RC$, et que, si la théorie est superstable (i. e. si $RU$ range tous les types !), RC range tous les types. Le premier en date de tous les rangs, qui est continu, est le rang de Morley, défini par l'induction suivante :

$RM(p) \geqslant \alpha + 1$ si $p$ a un fils qui est point d'accumulation de types de $RM \geqslant \alpha$ ;

$RM(p) \geqslant \alpha$ limite si $RM(p) \geqslant \beta$ , pour tout $\beta < \alpha$ .

Montrer que RM est une notion de rang est maintenant un exercice classique sur la compacité ; si RM range tous les types, on dit que T est totalement transcendante ou $\omega$-stable ; ces notions sont à l'origine de l'étude de la déviation. Tout type rangé par RM doit être de multiplicité finie.

En résumé, pour tout type p, $RM(p) \geqslant RC(p) \geqslant RU(p)$. Remarquons que les types de RM , comme de RC , comme de RU nul, sont les types algébriques, c'est-à-dire ceux qui n'ont qu'un nombre fini de réalisations possibles ; au-dessus d'un modèle, ce sont les types réalisés.

Dans le cas particulier des corps différentiellement clos, d'autres rangs s'imposent d'eux même ; appelons RD ( D comme dimension) du type p l'ordre de son équation minimale (le type différentiellement transcendant est donc de RD $\omega$ ) : le lemme 4 du § 1 nous assure que c'est une notion de rang, ce qui prouve d'ailleurs, d'après le théorème de Lascar, que les fils déviants sont bien ceux que j'ai dits. En outre RD majore le rang de Morley, car un type est isolé par son équation minimale des types de même RD ; par conséquent, la théorie T est totalement transcendante.

Une meilleure approximation du rang de Morley est le rang $RH^{**}$ ( H comme hauteur) défini par l'induction suivante : $RH^{**}(p) \geqslant n + 1$ , où p est d'équation minimale P , s'il existe q d'équations minimale Q d'ordre inférieur à celle de p tel que $RH^{**}(q) \geqslant n$ et que $P \in I(Q)$ . Puisque $P \in I(Q)$ est un énoncé élémentaire, on remarque que, pour calculer la hauteur d'un polynôme, il suffit de se placer dans un corps différentiellement clos contenant ses coefficients ; contrairement à ce qui se passe pour les idéaux de polynômes en plusieurs variables de corps ordinaires, où la hauteur d'un idéal ne dépend pas du corps, même non algébriquement clos, dans lequel on est placé, ici il est nécessaire de se placer dans un corps différentiel clos : $X' = 1$ est de hauteur 0 sur tout corps de constantes !

Une approximation encore meilleure est fournie par le rang RH , où, dans l'induction, on impose $P \in I(Q)$ , $S(P) \notin I(Q)$ ; la formule isolante est cette fois $P = 0 \wedge S(P) \neq 0$ ; on remarque que cette condition impose $I(P) \subset I(Q)$ .

On peut aussi définir un rang intermédiaire $RH^{*}$ associé à $I(P) \subset I(Q)$ , quitte à remplacer P par un de ses facteurs irréductibles définitifs, qui sont tous conjugués.

En résumé,

$$RD \geqslant RH^{**} \geqslant RH^{*} \geqslant RH \geqslant RM \geqslant RC \geqslant RU .$$

4. Les équations linéaires.

Une équation linéaire est une équation de la forme

$$X^{(N)} + a_{N-1}\, X^{(N-1)} + \dots + a_0\, X = b\ ;$$

dans la mesure où nous voulons calculer un rang du type qui lui est associé, d'après le théorème de Lascar, nous pouvons supposer qu'elle est à coefficients dans un corps différentiel clos $k$, et s'il s'agit d'un des rangs défini au § 3.. Quitte à retrancher de l'inconnue une "solution particulière" de l'équation, nous pouvons supposer qu'elle est "sans second membre", c'est-à-dire que $b = 0$, car cette transformation n'affecte aucun de ces rangs (Il ne faut pas en conclure que cela est vrai pour toute notion de rang !). Si donc $b = 0$, je dis que $N + 1$ solutions de l'équation sont toujours linéairement dépendantes au-dessus des constantes.

Nous savons que la valeur de vérité de l'expression

" $X, X_1, \dots, X_N$ vérifient une liaison linéaire non triviale à coefficients constants"

est indépendante du corps différentiel dans lequel on est plongé (nous allons voir que c'est même indépendant du corps différentiel dans lequel on se place), et que cet énoncé est équivalent à un énoncé sans quanteurs, que nous allons expliciter. Le déterminant de Wronski, ou wronskien, $W(X, X_1, \dots, X_N)$, de $X, X_1, \dots, X_N$ est celui dont les lignes sont $X^{(n)}, X_1^{(n)}, \dots, X_N^{(n)}$, $n$ variant de $0$ à $N$.

LEMME 7. - $X, X_1, \dots, X_N$ sont linéairement dépendantes au-dessus des constantes si, et seulement si, leur wronskien est nul.

Soit une liaison non triviale à coefficients constants,

$$cX + c_1\, X_1 + \dots + c_N\, X_N = 0\ ;$$

si on la dérive $N$ fois, on obtient une liaison entre les colonnes du wronskien, qui est donc nul. Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur $N$ ; c'est clair si $N = 0$ ; on suppose donc que $W(X_1, \dots, X_N) \neq 0$. Exprimons la première colonne comme combinaison linéaire des autres :

$$X - c_1\, X_1 - \dots - c_N\, X_N = 0\ ,\ \dots\ ,\ X^{(N)} - c_1\, X_1^{(N)} - \dots - c_N\, X_N^{(N)} = 0\ ;$$

en retranchant chacune de ces expressions de la dérivée de la précédente, on obtient une liaison entre les colonnes de $W(X_1, \dots, X_N)$ dont les coefficients sont $c_1', \dots, c_N'$. Cette liaison doit être triviale.

On remarque en passant qu'en developpant le wronskien par rapport à sa dernière ligne, on obtient les $c_i$ comme polynômes en $X, \dots, X^{(N-1)}$.

Ce que j'ai affirmé au début de ce paragraphe est alors clair, car si nous écrivons que $X, X_1, \dots, X_N$ sont tous solutions de la même équation linéaire homogène d'ordre $N$ (pas à coefficients constants !), nous obtenons une liaison entre les lignes du wronskien. Appelons <u>système fondamental</u> (ou système de Picard) de cette équation des solutions $X_1 , \dots , X_N$ de wronskien non nul.

LEMME 8. - <u>Toute équation linéaire homogène possède un système fondamental de solutions.</u>

Choisissons $X_1$, solution non nulle de l'équation, puis $X_2$ solution de l'équation telle que $W(X_1 , X_2) \neq 0 , \dots ,$ puis $X_N$, solution de l'équation telle que $W(X_1 , X_2 , \dots , X_N) \neq 0$ ; c'est toujours possible car l'inéquation est chaque fois d'ordre inférieur à $N$.

EXERCICE 2. - <u>Soit une équation différentielle linéaire homogène d'ordre</u> $N$, <u>à coefficients dans le c. d.</u> $k$ <u>dont le corps de constantes est algébriquement clos; une extension</u> $K$ <u>de</u> $k$ <u>est dite extension de Picard-Vessiot associée à cette équation si elle est engendrée par un système fondamental de ses solutions, et si</u> $K$ <u>ne contient pas de constantes autres que celles de</u> $k$. <u>Montrer l'existence d'une telle extension, et son unicité.</u>

Cet exercice est un bon exemple de l'utilité de la théorie des modèles ; les algébristes ont toujours considéré que faire l'extension sans ajouter de constantes à $k$ était un problème difficile ; pour nous, ce n'est rien qu'un exercice sur les modèles premiers dans les théories totalement transcendantes.

Prenons donc dans $k$ un système fondamental de solutions, $x_1 , \dots , x_N$ ; toute solution se met sous la forme $X = C_1 x_1 + \dots + C_N x_N$, et nous voyons que le type de $X$ sur $k$ est équivalent à la donnée du type du $N$-uple de constantes qui lui est associé ; comme, par ailleurs, $RD$ est le degré de transcendance du corps différentiel engendré par $X$, ce dernier admettra l'équation en question comme équation minimale si, et seulement si, $C_1 , \dots , C_N$ sont algébriquement indépendantes au-dessus de $k$. Il est d'ailleurs clair qu'une liaison algébrique entre les $C_i$ donne une équation d'ordre inférieur.

Dans ces conditions, il est clair qu'on obtient notre équation en développant le wronskien $W(X , x_1 , \dots , x_N)$ par rapport à sa première colonne, ce qui nous donne un cas particulier de l'exercice 1, et nous suggère le problème suivant.

PROBLÈME 1. - <u>Trouver une démonstration purement algébrique pour l'exercice</u> 1.

Cherchons maintenant à faire dévier notre type ; pour cela, considérons le corps $k_1$ engendré par $k$ et par $C_1$, qui est un corps différentiel. L'équation minimale de $X$ sur $k_1$ est linéaire d'ordre $N - 1$, et s'obtient en exprimant que le wronskien de $X - C_1 x_1 , x_2 , \dots , x_N$ est nul ; on peut faire dévier une deuxième fois en considérant le corps $k_2$ engendré par $C_1$ et $C_2$, etc. En tout, on fait dévier $N$ fois, et par conséquent le $RU$ de notre type, et tous les autres rangs définis au § 3, sont égaux à son $RD$.

Il ne faut pas croire que les seules façons de faire dévier notre type sont celles que nous avons indiquées : à la première étape, on aurait pu introduire $C_1 + C_2$ , ou les coefficients d'une quelconque liaison algébrique entre les $C_i$ . Dans l'ordre fondamental de la théorie des oorps algébriquement clos, en-dessous du type " $C_1$ et $C_2$ sont algébriquement indépendants", il y a toutes les classes de courbes ! Et les fils déviants, que nous obtenons, ne sont pas tous linéaires.

Ces fils vérifieront également $RU = RD$ ; et même, tout type $p$ de polynôme minimal $P$ tel que $I(P)$ contienne une équation linéaire a cette propriété. En effet, si $P$ est d'ordre $N$ et l'équation linéaire d'ordre $N + n$ , on exprime $X$ au moyen de $N + n$ constantes, et de ces constantes on peut en trouver $N$ qui sont algébriquement indépendahtes ; il suffit par exemple de les introduire une par une pour faire dévier le type $N$ fois.

PROBLÈME 2. - <u>Décrire tous les</u> $P$ <u>tels que</u> $I(P)$ <u>contienne une équation linéaire.</u>

Ajoutons que si $a$ est différentiellement transcendant sur $k$ , son équation minimale sur le c. d. engendré par $a^{(N)}$ et $k$ est clairement $X^{(N)} = a^{(N)}$ ; par conséquent, pour le type différentiellement transcendant, on a aussi $RD = RU = \omega$ .

Depuis longtemps, les algébristes ont remarqué qu'il était possible de définir des bases de transcendance différentielles et un degré de transcendance différentiel, cardinal commun de toutes ces bases, pour un c. d. $k$ ; leur démonstration copiait celle concernant les bases de transcendance algébrique. En fait, ceci n'est qu'un cas particulier du phénomène suivant, dû à la propriété d'addition du rang U mise en évidence par LASCAR : chaque fois qu'on a un type de <u>rang</u> U (<u>pas</u> de rang Morley, ou d'un autre rang) égal à une puissance de $\omega$ $(1 , \omega , \omega^2 , \ldots)$, on peut définir des bases de transcendance relativement à ce type et montrer qu'elles ont toutes même cardinal.

EXERCICE 3. - <u>Etant donné deux cardinaux</u> $\lambda$ <u>et</u> $\mu$ , <u>construire un corps différentiellement clos de degré de transcendance différentiel</u> $\lambda$ , <u>et dont le corps des constantes soit de degré de transcendance</u> $\mu$ .

## 5. Un espoir déçu.

Il est naturel de penser que ce que nous avons prouvé dans le cas des équations linéaires est un phénomène général, à savoir que, pour tout type, $RD = RU$ . En effet, notre intuition analytique nous suggère que la solution d'une équation d'ordre $N$ possède $N$ degrés de liberté indépendants ; rappelons qu'on appelle <u>intégrale</u> d'une équation différentielle une fonction qui est constante pour chaque solution de l'équation ; on montre en analyse, sous des hypothèses convenables pour pouvoir appliquer un théorème de fonctions implicites, que localement une équation d'ordre $N$ possède $N$ intégrales indépendantes (i. e. qui ne sont pas fonction les unes des autres), et qu'une solution de l'équation est déterminée par la donnée de la valeur de ces $N$ intégrales. Dans le cas linéaire, nous avons effectivement obtenu $N$ intégrales, $C_1(X)$ , ... , $C_N(X)$ .

Supposons maintenant avoir une équation de la forme $X'' = X' P(X)$ , où $P(X)$ est un polynôme à coefficients constants ; si nous intégrons les deux termes, nous obtenons $X' = Q(X) + C$ , où $Q$ est un polynôme primitif de $P$ et où $C$ est une constante, qui nous donne un degré de liberté. Le type va dévier une première fois sur le corps engendré par $C$ , puis une deuxième fois lorsqu'on le réalise. Mais que va-t-il se passer avec l'équation $X'' = X'/X$ , dont l'intégrale, $X' = \log X + C$ , n'est pas exprimable dans le cadre des corps différentiels ? Eh bien, nous allons perdre le degré de liberté correspondant, et en effet, nous avons le lemme suivant.

LEMME 9. - Le type d'équation minimale $P = XX'' - X'$ est de RM et de RU égaux à 1 ; la condition $P = 0 \wedge S(P) \neq 0$ ne l'isole pas des types de RM = 1 , et son RH vaut 2 .

Il est tout d'abord clair que $P$ est irréductible. Soit $Q$ un polynôme irréductible du premier ordre, tel que $P \in I(Q)$ .

$$Q = \textstyle\sum_0^N a_n(X)\, X'^n \ , \quad Q' = \sum a_n^*(X)\, X'^n + \sum(\partial a_n/\partial X)\, X'^{n+1} + \sum X'' n a_n(X)\, X'^{n-1} \ .$$

Multiplions par la séparante, et substituons $X''$ modulo $Q$ : nous obtenons

$$P_1 = \textstyle\sum n a_n\, X'^n + X(\sum a_n^*\, X'^n + \sum(\partial a_n/\partial X)\, X'^{n+1})$$

qui doit être divisible par $Q$ . Le coefficient du terme de plus haut degré, en $X'^{N+1}$ , vaut $X(\partial a_N/\partial X)$ et doit être divisible par $a_N$ , soit $X(\partial a_N/\partial X) = \lambda\, a_N$ , $\lambda$ étant de degré $0$ , ce qui impose $a_N = \mu X^\lambda$ ; $\lambda$ est donc un entier $m$ , puisque $a_N$ est un polynôme, et quitte à multiplier $P$ par $\mu^{-1}$ , $a_N = X^m$ .

1er cas. - $m > 0$ : $P_1 = m(X' + u(X))(\sum a_n X'^n)$ ; en identifiant les termes en $X'^0$ , on obtient $m\, u(X)\, a_0 = X\, a_0^*$ , ce qui implique que $u$ est divisible par $X$ ou que $a_0 = 0$ ; dans ce dernier cas, par irréducibilité, on aurait $Q = X'$ , ce qui contredit l'hypothèse $a_N = X^m$ ; donc $u = \alpha X$ . L'identification des termes en $X'^N$ donne alors

$$X(\partial a_{N-1}/\partial X) - m a_{N-1} = - N X^m + m\alpha X^{m+1} \ .$$

On intègre tout d'abord l'équation sans second membre, puis on emploie la méthode dite de variation des constantes

$$a_{N-1} = \varkappa X^m \ , \quad \partial\varkappa/\partial X = - N/X + m\alpha$$

qui n'a pas de solution en fraction rationnelle. Ce cas aboutit donc à une impossibilité.

2e cas. - $m = 0$ : $a_N = 1$ . Comme le coefficient en $X'^N$ de $P_1$ est est $N + X(\partial a_{N-1}/\partial X)$ , on a donc $P_1 = (X(\partial a_{N-1}/\partial X) + N)Q$ , et l'identification des termes en $X'^0$ donne

$$(X(\partial a_{N-1}/\partial X) + N)a_0 = X a_0^* \ ;$$

comme $X$ ne divise pas la parenthèse, $a_0 = 0$ , et $Q = X'$ , qui convient manifestement.

Il est clair que $P \in I(X')$ , $S(P) = X \notin I(X')$ ; donc le type $p$ de polynôme minimal $P$ est de $RH = 2$ . Les types autres que $p$ qui satisfont $P = 0 \wedge X' \neq 0$ sont algébriques, et, par conséquent, $RM(p) = RU(p) = 1$ ; toutefois la formule $P = 0 \wedge S(P) \neq 0$ contient aussi le type de la constante transcendante, dont le RM vaut 1 .

Une autre façon d'énoncer le lemme 9 est la suivante : Si $x$ est une solution non constante de $P = XX'' - X' = 0$ , et si $k$ est un corps différentiel, ou bien $P$ est le polynôme minimal de $x$ sur $k$ , ou bien $x$ est algébrique sur $k$ ; il n'est pas possible de trouver une étape intermédiaire où l'équation minimale de $x$ serait du premier ordre.

Dans une lettre que j'ai envoyée à SHELAH, j'ai prouvé l'analogue du lemme 9, pour toute équation de la forme $X'' = X'^2 f(X)$ , où $f$ est un polynôme en $X$ de degré au moins égal à 1 ; cette dernière restriction est bien sûr nécessaire car une équation $F(X'', X') = 0$ est de RU 1 relativement à $X'$ , et on a un deuxième degré de liberté en intégrant $X'$ .

On peut se demander si le rang U est le nombre d'intégrales indépendantes qu'on peut exprimer dans le cadre de la théorie des corps différentiels ; en termes plus précis, si $q$ est fils déviant de $p$ , $q$ représente-t-il plus de constantes que $p$ ? C'est malheureusement faux, comme le montre l'exercice suivant.

EXERCICE 4. - <u>Soit</u> $a$ <u>différentiellement transcendant sur le c. d. c.</u> $k$ ; <u>montrer qu'il existe un c. d. c.</u> $K$ , <u>contenant</u> $k$ <u>et</u> $a$ , <u>dont toutes les constantes sont dans</u> $k$ .

Cet exemple n'a pas l'air bien décisif ; plus grave est le fait que SHELAH a prouvé que des solutions distinctes de l'équation $XX' = X + 1$ sont toujours algébriquement indépendantes au-dessus des constantes , on en déduit alors facilement un analogue de l'exercice 4. On peut réaliser le type correspondant à cette équation sans augmenter les constantes.

PROBLÈME 3. - <u>Prouver le résultat de</u> SHELAH, <u>ou même seulement sa conséquence exposée ci-dessus, en moins de</u> 10 <u>lignes</u>.

PROBLÈME 4. - <u>Est-il exact qu'en général</u> (<u>préciser le sens de cette expression</u>) <u>une équation d'ordre</u> $N$ <u>est de</u> $RH^{**}$ 1 ?

PROBLÈME 5. - <u>Peut-on trouver un type</u> $p$ <u>tel que</u> :

$$RD(p) > RH^{**}(p) > RH^{*}(p) > RH(p) > RM(p) > RC(p) > RU(p) \ ?$$

On pourra tout d'abord chercher des exemples partiels ; il serait particulièrement intéressant de savoir s'il est possible que $RM(p) > RU(p)$ .

Soit $P$ le polynôme minimal du type $p$ ; pour calculer le rang $RU$ , il faut, parmi les $Q$ tels que $P \in I(Q)$ , $S(P) \notin I(Q)$ , éliminer ceux qui ne correspondent pas à un fils de $p$ , ou même seulement, d'après le théorème de Lascar, ceux qui ne sont pas fils de la restriction de $p$ au corps différentiel $k$ engendré par les coefficients de $P$ . J'appelle donc <u>parasites</u> ces polynômes $Q$ tels que $I(Q) \cap k\{X\} \subsetneq I(P, k)$ , et <u>parasites essentiels</u> ceux qui sont à coefficients dans $k$ .

Si un type $p$ , ainsi que tous ses fils, n'a qu'un nombre fini de parasites essentiels, on prouve, en isolant $p$ par

$$P = 0 \wedge S(P) \neq 0 \wedge Q_1 \neq 0 \wedge \ldots \wedge Q_n \neq 0 ,$$

que $RM(p) = RU(p)$ . Je ne sais pas s'il existe un tel type ; la condition n'est évidemment pas suffisante, car $X' = 0$ admet tous les polynômes en $X$ à coefficients rationnels comme parasites essentiels. En tous cas l'étude du rang de Morley semble passer par le problème suivant.

PROBLEME 6. <u>Etudier les parasites essentiels.</u>