Bruno Poizat

Suites d'indicernables dans les théories stables

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A5_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
1ere année, 1977/78, n° 5, 7 p.

SUITES D'INDICERNABLES DANS LES THÉORIES STABLES

par Bruno POIZAT (*)

Dans ce qui suit, on considère une théorie T stable, de cardinal $|T|$ quelconque, un ensemble A de paramètres et des éléments a_λ, $\lambda < \kappa$ (κ ordinal), extraits d'un modèle de T . On adopte les notations suivantes :

$$A_\lambda = A \cup \{\ldots a_\mu \ldots ; \mu < \lambda\} , \quad p_\lambda \text{ est le type de } a_\lambda \text{ sur } A_\lambda .$$

Je dirai que la suite est croissante si $p_\mu \subset p_\lambda$ chaque fois que $\mu < \lambda$; si donc λ est limite, p_λ est la limite des p_μ, pour $\mu < \lambda$; $p_{\lambda+1}$ est fils de p_λ. En particulier, une suite est dite indicernable (sur A) si, chaque fois que $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \kappa$, le type sur A de $a_{\lambda_0}, a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}$ est le même que celui de $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Elle est dite totalement indicernable si, chaque fois que $\lambda_0 \ldots \lambda_n$ sont deux à deux distincts, $a_{\lambda_0}, \ldots, a_{\lambda_n}$ a même type sur A que $a_0, \ldots, a_n$: dans ce cas, l'énumération de la suite n'a plus d'importance, et on peut parler d'ensemble indicernable.

LEMME 1. - Si S est une ω-suite indicernable, elle se prolonge, et d'une seule manière (à A-isomorphisme près), en une suite de longueur $\kappa > \omega$.

Introduisons des variables x_λ, pour $\omega \leq \lambda < \kappa$; si nous voulons construire une suite d'indicernables prolongeant S , il faut satisfaire la formule

$$f(a_{n_0}, \ldots, a_{n_u}, x_{\lambda_0}, \ldots, x_{\lambda_v}) ,$$

où les indices sont rangés dans l'ordre croissant si, et seulement si, la formule $f(a_{n_0}, \ldots, a_{n_u}, a_{n_u+1}, \ldots, a_{n_u+v})$ est satisfaite ; cela donne une théorie complète qui est bien consistante, puisque finiement satisfaisable dans S .

Une suite infinie est dite insécable si, pour toute formule $f(x, \bar{y})$ du langage de T , et tout $\bar{b}$ situé dans quelque extension élémentaire du modèle dans lequel on est placé, l'ensemble des λ tels que $\vdash f(a_\lambda, \bar{b})$ est fini ou cofini. Si B est un ensemble quelconque de paramètres, on définit alors le type moyen, ou type limite de S sur B , $tm(S/B)$, par l'ensemble des formules à paramètres dans B satisfaites par tous les éléments de S sauf un nombre fini ; il est clair que c'est un type consistant et complet, qui n'est pas isolé si B contient une infinité d'éléments de S .

La définition suivante fait intervenir la stabilité. La suite S est dite indépendante (au-dessus de A) si, pour tout λ, p_λ ne dévie pas sur A (i. e. est

---

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU

extension non déviante de sa restriction à A).

LEMME 2. - <u>La suite</u> S <u>est indépendante si, et seulement si, pour tout</u> λ , <u>le type de</u> a_λ , <u>sur</u> $A \cup S - \{a_\lambda\}$, <u>ne dévie pas sur</u> A .

Si ce type ne dévie pas sur A , il en est de même de sa restriction p_λ ; donc la condition du lemme est apparemment plus forte que l'indépendance. Réciproquement, supposons que S soit indépendante ; je vais montrer par récurrence sur l'entier i que, pour toute suite $\lambda_n < \ldots < \lambda_i < \ldots < \lambda_0 < \varkappa$, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n}, \ldots, a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-1}}, \ldots, a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A . Par définition, c'est vrai pour $i = 0$; si c'est vrai pour $i - 1$, le type de $a_{\lambda_{i-1}}$ sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \ldots a_{\lambda_i}, a_{\lambda_{i-2}} \ldots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A , donc ne dévie pas non plus sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \ldots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-2}} \ldots a_{\lambda_0}\}$. Par symétrie, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \ldots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_i} \ldots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \ldots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-1}} \ldots a_{\lambda_0}\}$; or, dans la suite $\lambda_n < \ldots < \lambda_{i+1} < \lambda_i < \lambda_{i-2} < \ldots < \lambda_0$, λ_i s'est rapproché d'une unité de λ_0 , et, par hypothèse de récurrence, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \ldots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-2}} \ldots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A , d'où le résultat par transitivité.

Maintenant, pour toute partie s de $S - \{a_\lambda\}$, le type de a_λ sur $A \cup s$ ne dévie pas sur A ; il en est de même de son type sur $A \cup S - \{a_\lambda\}$.

Le lemme 2 prouve donc que la notion de suite indépendante ne dépend pas de la façon dont on a énuméré ses éléments, et qu'on peut parler d'<u>ensemble indépendant</u>.

Nous avons déjà défini, dans le cours, la notion de <u>suite de Morley</u> associées à un type p sur un modèle M ; partant de $A = M$, on la définit inductivement en réalisant en a_λ l'héritier p_λ de p sur A_λ . Il s'agit donc d'une suite indépendante ; elle est totalement indicernable, car d'après le lemme 2, si $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, le type de a_{λ_n} sur $A \cup \{a_{\lambda_0}, \ldots, a_{\lambda_{n-1}}\}$ est l'héritier de p ; elle est enfin insécable par unicité du cohéritier de p . Le type moyen de la suite de Morley de p est l'héritier de p .

LEMME 3. - <u>Si</u> S <u>est une suite infinie indicernable sur</u> A , <u>il existe un modèle</u> M <u>contenant</u> A <u>tel que</u> S <u>soit la suite de Morley d'un type</u> p <u>de</u> $S_1(M)$.

Si S n'est pas assez longue, on la prolonge de manière à avoir une suite de longueur $|T|^+$ au moins ; le nombre de $\lambda < |T|^+$, tels que $p_{\lambda+1}$ est extension déviante de p_λ , est au plus $|T|$, car la borne de $p_{\lambda+1}$ doit représenter une formule omise par celle de p_λ ; donc, à partir d'un certain μ , la suite $s = a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots, a_{\mu+n}, \ldots$ est indépendante sur A ; si E est une relation d'équivalence finie à paramètres dans A , par indicernabilité, il est nécessaire que tous les $a_{\mu+n}$ soient congrus modulo E à a_μ . Soit M un modèle contenant

$A_{\mu+1}$, que nous plaçons de manière à ce que le type de M sur $A_{\mu+\omega}$ ne dévie pas sur $A_{\mu+1}$; comme le type de M sur $A_{\mu+n+1}$ ne dévie pas sur $A_{\mu+1}$, donc sur $A_{\mu+n}$, par symétrie, le type de $a_{\mu+n}$ sur $M \cup A_{\mu+n}$ est extension non déviante de $p_{\mu+n}$, lui-même extension non déviante de $p_{\mu+1}$; mais, d'après le théorème de la relation d'équivalence finie, ce dernier type est stationnaire (il détermine en effet toutes les classes modulo les relations d'équivalence finies à paramètres dans A_μ , sur lequel il ne dévie pas), il n'a sur M qu'un seul fils non déviant q , dont s privée de son premier élément est la suite de Morley. On peut alors prolonger cette suite de Morley en une suite S' de même longueur que S , et le résultat suit de ce que S et S' ont même type au-dessus de A .

COROLLAIRE 1. - Toute suite indicernable est totalement indicernable et insécable.

Remarques.

1° S'il y a une suite indicernable non totalement, on en prend une indiciée par un ordre I , et avec ces paramètres on fait au moins autant de types qu'il y a de coupures dans I , ce qui contredit la stabilité (exercice classique). Il y a une réciproque : Si T est instable, il y a une suite de n-uples (pour un certain n peut-être supérieur à 1) indicernable, mais pas totalement.

2° La situation est différente en ce qui concerne l'insécabilité. S'il y a une ω-suite indicernable sécable, on dit que T a la propriété d'indépendance (voir le problème d'examen). Ces théories sont très instables : avec λ paramètres, on fait 2^λ types (exemple : l'arithmétique). Il y a des théories instables, mais sans propriété d'indépendance : l'ordre Q , les corps valués henséliens, à corps résiduel algébriquement clos et Z-groupe de valuation.

Nous allons maintenant généraliser la notion de suite de Morley en partant cette fois d'un type p sur un ensemble A quelconque de paramètres ; on réalise p en a_0 ; on réalise ensuite en a_1 une extension non déviante de p sur A_1 ; nous savons que notre arbitraire réside dans le choix, pour toute relation d'équivalence finie E à paramètres dans A , d'une classe modulo E ; mais, si a_0 et a_1 ne sont pas congrus modulo E , il est clair qu'une suite d'indicernables qui commence par eux ne peut avoir plus d'éléments qu'il n'y a de classes modulo E . Si donc nous voulons un procédé qui se répète à l'infini, il faut prendre a_0 et a_1 congrus modulo E , prendre pour p_λ l'unique extension non déviante de p telle que $p_\lambda \vdash E(x\ ,\ a_0)$ pour toute E ; l'ensemble obtenu est alors indépendant et totalement indicernable sur A . Il est déterminé par le type fort p^* , extension de p , sur A que réalise chacun de ses éléments, et nous parlerons de la suite de Morley du type fort p^* . Son type moyen est l'unique extension non déviante de p dans ce type fort (on pourrait parler de l'héritier du type fort p^*).

Introduisons maintenant une nouvelle notation. Soit $\varkappa(T)$ le plus petit cardinal infini tel qu'il n'y ait pas dans l'ordre fondamental (des 1-types) de suite ordinale descendante de longueur $\varkappa(T)$. T est superstable si, et seulement si,

$\varkappa(T) = \omega$. On sait que $\varkappa(T) \leq |T|^+$, car, dans une suite ordinale p_λ descendante, il y a une formule f_λ omise par p_λ (et ses prédécesseurs) et représentée par $p_{\lambda+1}$ (et ses successeurs).

LEMME 4. - <u>Le type de</u> $\bar{a} \wedge \bar{b}$ <u>sur</u> $A \cup B$ <u>ne dévie pas sur</u> A <u>si, et seulement si, le type de</u> $\bar{b}$ <u>sur</u> $A \cup B$ <u>ne dévie pas sur</u> A , <u>et le type de</u> $\bar{a}$ <u>sur</u> $A \cup B \cup \{\bar{b}\}$ <u>ne dévie pas sur</u> $A \cup \{\bar{b}\}$.

Supposons que $t(\bar{a} \wedge \bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A ; par symétrie, $t(B/A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\})$ ne dévie pas sur A , et il en est de même de sa restriction $t(B/A \cup \{\bar{b}\})$, et, par symétrie, $t(\bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A ; $t(B/A \cup \{\bar{a} , \bar{b}\})$ ne dévie pas non plus sur $A \cup \{\bar{b}\}$, et, par symétrie, $t(\bar{a}/A \cup B \cup \{\bar{b}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\bar{b}\}$.

Supposons maintenant qu'on ait les deux conditions de la 2e partie ; par symétrie, $t(B/A \cup \{\bar{a} , \bar{b}\})$ est extension non déviante de $t(B/A \cup \{\bar{b}\})$, lui-même extension non déviante de $t(B/A)$; par transitivité, $t(B/A \cup \{\bar{a} , \bar{b}\})$ ne dévie pas sur A , et, par symétrie, $t(\bar{a} \wedge \bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A .

COROLLAIRE 2. - <u>Dans l'ordre fondamental des</u> n-<u>uples, il n'y a pas de suite ordinale descendante de longueur</u> $\varkappa(T)$.

Prouvons-le pour $n = 2$. S'il y avait une telle suite, on pourrait trouver des modèles M_λ , $\lambda < \varkappa(T)$, avec $M_\mu \prec M_\lambda$, quand $\mu < \lambda$, a et b tels que, pour tout λ , le type $p_{\lambda+1}$ de $a \wedge b$ sur $M_{\lambda+1}$ soit extension déviante du type p_λ de $a \wedge b$ sur M_λ . Soit X l'ensemble des λ tels que le type de b sur $M_{\lambda+1}$ dévie sur M_λ : $|X| < \varkappa(T)$; soit Y l'ensemble des λ tels que le type de a sur $M_{\lambda+1} \cup \{b\}$ dévie sur $M_\lambda \cup \{b\}$: $|Y| < \varkappa(T)$. On a une contradiction car, d'après le lemme, $|X| \cup |Y| = \varkappa(T)$.

<u>Remarque</u>. - Dans l'ordre fondamental des ω-types, il y a toujours des ω-suites descendantes : prendre la suite de Morley d'un type non réalisé, et réaliser un par un ses éléments. Pour obtenir un énoncé correct sur les λ-types, on peut remplacer $\varkappa(T)$ par $\varkappa(T)^\lambda$ (lemme de Koenig) ou $(\lambda \times \varkappa(T))^+$.

J'énonce maintenant les trois théorèmes principaux, qui interviennent partout, et de façon essentielle dans les constructions de modèles.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> S <u>une suite indicernable sur</u> A . <u>Il existe</u> $\lambda < \varkappa(T)$ (λ <u>dénombrable si</u> T <u>est dénombrable</u>, λ <u>fini si</u> T <u>est superstable</u>) <u>tel que</u> S <u>privée de ses</u> λ <u>premiers éléments soit de Morley sur</u> A_λ .

Supposons que, pour un certain λ , $p_{\lambda+\omega}$ soit extension non déviante de p_λ ; pour toute relation d'équivalence finie E à paramètres dans A , il est nécessaire que tous les $a_{\lambda+n}$ soient congrus modulo E à a_λ , sinon, par indicernabilité, il y aurait une infinité de classes. Par conséquent, $p_{\lambda+1}$ est un type stationnaire, et $a_{\lambda+1} , \dots , a_{\lambda+n} , \dots$ est sa suite de Morley ; d'après le lemme 1, il en est de même au-delà, et, pour tout $\mu > \lambda$, p_μ est extension non déviante de p_λ .

Définissons alors $\lambda_0 = 0$, λ_1 = le plus petit indice, s'il existe, tel que p_{λ_1} dévie sur A_0 , etc. : si μ est limite, λ_μ est la borne supérieure des λ_ν , $\nu < \mu$; $\lambda_{\mu+1}$ est le plus petit ordinal, s'il existe, tel que $p_{\lambda_{\mu+1}}$ dévie sur A_{λ_μ} . On poursuit ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus continuer ; la suite λ_μ obtenue est de cardinal inférieur à $\varkappa(T)$, et comme entre deux termes consécutifs on ne saute qu'un nombre fini d'éléments, elle se termine avant $\varkappa(T)$. Il existe donc $\lambda < \varkappa(T)$ à partir duquel ça ne dévie plus, et notre suite devient de Morley sur $A_{\lambda+1}$.

THÉORÈME 2. - Soit S une suite croissante de longueur $\varkappa$ (ordinal) de cofinalité supérieure ou égale à $\varkappa(T)$; il existe λ tel que, pour $\mu > \lambda$, p_μ ne dévie pas sur A_λ ; S , privé de ses $\lambda + \omega$ premiers éléments, est de Morley sur $A_{\lambda+\omega}$; si p_λ est de multiplicité finie n , S privée de ses $\lambda + n$ premiers éléments est de Morley sur $A_{\lambda+n}$.

Considérons les indices μ tels que $p_{\mu+1}$ dévie sur A_μ ; il y en a moins que $\varkappa(T)$, et ils ne peuvent être cofinaux dans $\varkappa$. Il existe donc λ tel que, pour tout $\mu > \lambda$, p_μ ne dévie pas sur A_λ ; si E est une relation d'équivalence finie à paramètres dans A_λ , et si a_λ n'est pas congru à $a_{\lambda+1}$, par croissance il ne le sera pas non plus à tous les $a_{\lambda+m}$; donc, pour un certain n inférieur au nombre de classes de E , $a_{\lambda+n}$ est congru à tous les suivants modulo E . On voit que, de λ à $\lambda + \omega$, la suite choisit un type fort au-dessus de p_λ . $p_{\lambda+\omega}$ est extension non déviante et stationnaire de p_λ , et ce qu'il y a après est sa suite de Morley. Le phénomène se produit déjà à l'étape $\lambda + n$ si p_λ est de multiplicité n .

THÉORÈME 3. - Soient S un ensemble indépendant au-dessus de A , et $\bar{b}$ un n-uple de paramètres. Il existe une partie X de S , de cardinal inférieur à $\varkappa(T)$, telle que, pour tout $a \in S' = S - X$, le type de a sur $S' \cup A \cup \{\bar{b}\} - \{a\}$ ne dévie pas sur A . On voit que $\bar{b}$ ne peut faire dévier sur A que les types de moins de $\varkappa(T)$ éléments de S ; que S' reste indépendant au-dessus de $A \cup \{\bar{b}\}$; que si S est de Morley, S' reste de Morley sur $A \cup \{\bar{b}\}$.

Soit X l'ensemble de cardinal inférieur à $\varkappa(T)$ des a_λ tels que le type de $\bar{b}$ sur $A_{\lambda+1}$ dévie sur A_λ . En dehors de cet ensemble, par symétrie, le type de a_λ sur $A_\lambda \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A_λ , ni sur A par transitivité, puisque le type de a_λ sur A_λ ne dévie pas sur A . Enumérons S' en sautant les éléments de X ; $S' = \{\ldots c_\lambda \ldots\}$; c_λ est de la forme $a_{f(\lambda)}$, avec $C_\lambda \subset A_{f(\lambda)}$; donc, le type de c_λ sur $C_\lambda \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A , ni sur $A \cup \{\bar{b}\}$, et donc S' est indépendant sur $A \cup \{\bar{b}\}$; d'après le lemme 2, le type de c_λ sur $S' \cup A \cup \{\bar{b}\} - \{c_\lambda\}$ est extension non déviante de sa restriction à $A \cup \{\bar{b}\}$, elle même extension non déviante de sa restriction à A .

Si S est la suite de Morley du type fort p^* , comme ça ne dévie pas, tous les éléments de S' vont être dans le même type fort au-dessus de $A \cup \{\bar{b}\}$, S' est la suite de Morley de l'héritier de p^* .

Exemple d'application : Modèles saturés.

Je rappelle qu'il n'y a aucune restriction sur $|T|$.

LEMME 5. - Si T est stable en λ , $\varkappa(T) \leq cf(\lambda)$.

D'après le lemme de Koenig, $\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$; si donc il existait une suite descendante de longueur $cf(\lambda)$, il en existerait une de longueur $\varkappa$, où $\varkappa$ est le plus petit cardinal tel que $\lambda^{\varkappa} > \lambda$. A l'aide de cette suite, on construit un arbre de type de hauteur $\varkappa$, de chaque noeud duquel part λ branchements, c'est-à-dire qu'on fait autant de types qu'il y a de branches, soit $\lambda^{\varkappa}$, avec pas plus de paramètres qu'il y a de noeuds, soit $\sum_{\mu<\varkappa} \lambda^{\mu} = \varkappa \times \lambda = \lambda$. Ceci contredit la stabilité en λ .

Remarques.

1° Soit λ_0 le plus petit cardinal en lequel T est stable. Alors T est stable en λ si, et seulement si, $\lambda \geq \lambda_0$ et $\lambda^{<\varkappa(T)} = \lambda$ ($\lambda^{<\varkappa} = \sup \lambda^{\mu}$, pour $\mu < \varkappa$). On remarquera que $\lambda_0 \leq 2^{|T|}$.

La condition est nécessaire d'après le lemme.

Réciproquement, supposons que λ satisfasse ces conditions, et soit p dans $S_1(A)$, $|A| = \lambda$; si p dévie sur $\emptyset$, une de ses restriction finie p_0 dévie sur $\emptyset$; si p est fils déviant de p_0 , il en est de même d'une de ses restrictions finies p_1 , etc. Cela ne peut se faire que moins de $\varkappa(T)$ fois, il existe donc une partie B de A , de cardinal $\varkappa < \varkappa(T)$, telle que p soit extension non déviante de p/B . Il y a $\lambda^{\varkappa}$ choix possibles pour une partie de A de cardinal $\varkappa$; comme $\varkappa(T) \leq \lambda_0$, ça ne fait pas plus de $\lambda_0 \times \lambda = \lambda$ choix pour B . $|B| \leq \lambda_0$, et, par λ_0-stabilité, il n'y a pas plus de λ_0 choix possibles pour p/B ; et, toujours par λ_0-stabilité, B se plonge dans un modèle M de cardinal λ_0 (compléter ω fois par le test de Tarski) : la multiplicité de p/B est donc au plus λ_0 . Le nombre de choix possibles pour p est $\lambda \times \lambda_0 \times \lambda_0 = \lambda$.

2° Si T est stable en λ , T est stable en λ^+ .

Si $\varkappa < \varkappa(T)$, comme λ^+ est régulier, une fonction de $\varkappa$ dans λ^+ a une image non cofinale, et $(\lambda^+)^{\varkappa} = \lambda^{\varkappa} \times \lambda^+ = \lambda^+$.

PROPOSITION 1 (HARNIK). - Si T est stable en λ , T a un modèle saturé de cardinal λ .

T a donc un modèle M_0 de cardinal λ ; on réalise tous les types sur M_0 en un modèle M_1 de cardinal λ , et on poursuit ce procédé λ fois. Le modèle M obtenu est notre candidat.

Soit donc $A \subset M$, avec $|A| < \lambda$. Si λ est régulier, A est inclus dans un M_μ , et tout type sur A est réalisé dans $M_{\mu+1}$. On suppose dorénavant λ singulier.

Soit $p \in S_1(A)$, soit q un fils de p sur M , de restriction q_μ à M_μ . Comme, d'après le lemme, il n'y a pas dans l'ordre fondamental de suite descendante cofinale à λ , pour un certain μ , q est l'héritier de q_μ , et, par construction, le modèle M contient une suite de Morley S de q_μ de longueur λ ; un n-uple $\bar{a}$ extrait de A ne fait dévier que moins de $\varkappa(T)$ élément de S (théorème 3), ce qui n'élimine en tout que $|A| \times \varkappa(T) \leq |A| \times cf(\lambda) < \lambda$ d'entre eux ; il en reste donc λ qui réalisent sur $M_\mu \cup A$ l'héritier de q_μ , dont la restriction à A est p .