

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

SÉBASTIEN EHRSAM

L'ordre fondamental, le théorème de la borne, le théorème de la relation d'équivalence finie

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 4, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A4_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ORDRE FONDAMENTAL, LE THÉOREME DE LA BORNE,
LE THÉOREME DE LA RELATION D'ÉQUIVALENCE FINIE

par Sébastien EHRSAM (*)

Il sera largement fait appel aux résultats mentionnés dans l'exposé n° 1 ; $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A , λ^+ le cardinal successeur de λ ; pour tous ensembles de paramètres X et Y , $t(X, Y)$ est le type de X sur Y ; si p et q sont deux types, " q est une extension de p " se note $p \subset q$; enfin, si p est un type sur A et si $X \subset A$, la restriction de p à X se note $p|_X$.

1. L'ordre fondamental.

Cette partie 1 ne concerne que des types complets au-dessus de modèles d'une théorie T complète.

A. Définitions ; propriétés élémentaires ; notion de fils maximal.

1° Soient M et N deux modèles de T , $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$. $p \geq q$ si, et seulement si, pour toute formule $f(x, \bar{y})$ telle qu'il existe \bar{a} dans M^n , avec $p \vdash f(x, \bar{a})$, il existe \bar{a}' dans N^n tel que $q \vdash f(x, \bar{a}')$.

\geq est clairement un préordre, et " $p \geq q$ et $q \geq p$ ", noté $p \sim q$, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des types sur les modèles de T . Le quotient de ce préordre par la relation d'équivalence \sim s'appelle l'ordre fondamental de T .

2° On dit que p représente $f(x, \bar{y})$ s'il existe \bar{a} dans M^n tel que $p \vdash f(x, \bar{a})$; sinon, on dit que p omet $f(x, \bar{y})$. Une classe d'équivalence de types est donc caractérisée par les formules que ses éléments représentent ; il y a donc au plus 2^{ω} classes.

On montre aisément qu'un père est plus grand que son fils, que deux types isomorphes sont équivalents et que si $p \geq q$, p et q ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres.

LEMME 1.1. - Tout type majore un type minimal pour l'ordre fondamental ; les types minimaux correspondent aux types réalisés, deux tels types étant équivalents si, et seulement si, ils ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres.

Si q et q' , réalisés dans M et M' , ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres, $q \vdash (x = b)$ et $q' \vdash (x = b')$, et b et b' ont même type sur \emptyset . Si $q \vdash f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, alors $M \vdash f(b, \bar{a})$, i. e. $M \vdash (\exists \bar{y}) f(b, \bar{y})$, et

(*) Sébastien EHRSAM, C. E. S. de Wintzenheim, 68000 COLMAR

donc $\vdash (\exists \bar{y}) f(b', \bar{y})$, i. e., parce que M' est un modèle, il existe \bar{a}' dans M'^n tel que $M' \vdash f(b', \bar{a}')$, soit $q' \vdash f(x, \bar{a}')$; ce qui prouve que $q \geq q'$ et par symétrie $q \sim q'$.

Tout type réalisé représente $x = y$, et donc tout type qui lui est inférieur est aussi réalisé : Les types réalisés sont minimaux et, évidemment, tout type a un fils réalisé.

On peut dire que la classe de p est d'autant "plus basse" dans l'ordre fondamental que p est près d'être réalisé. Ainsi, dans la théorie des corps différentiels, si p , non réalisé, satisfait $(x' = a)$, p est "plus bas" dans l'ordre fondamental que si l'on avait seulement $p \vdash (x'' = b)$, par exemple.

PROPOSITION 1.1.

1° Soient M, N deux modèles de T , avec $M < N$, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. Si q héríte de p , p et q sont équivalents.

2° Soient M et N deux modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. $p \geq q$ si, et seulement si, il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et un plongement élémentaire σ de M dans $N^{\mathcal{U}}$, qui fasse de $q^{\mathcal{U}}$ un fils de $\sigma(p)$, type isomorphe à p .

1° On a $p \geq q$; de plus, si $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M^j$, $\bar{b} \in N^k$, par définition de l'héritier, il existe $\bar{b}' \in M^k$ tel que $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$, i. e. $q \geq p$.

(2 \leftarrow) $p \geq q^{\mathcal{U}}$, $q^{\mathcal{U}}$ étant héritier de q , on a $p \geq q$ (par le 1°).

(2 \rightarrow) Soit I l'ensemble des injections d'une partie finie de M dans N . Chaque fois que $p \vdash f(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in M^k$, on considère

$$I[f(x, \bar{a})] = \{i \in I; i \text{ définie en } \bar{a} \text{ et } q \vdash f(x, i\bar{a})\};$$

Ces ensembles, non vides par hypothèse, forment une base de filtre sur I , qui est contenue dans un ultrafiltre \mathcal{U} . L'application

$$\sigma: M \rightarrow N$$

$$a \mapsto (\dots, ia, \dots) \text{ si } i \text{ définie en } a, \text{ n'importe quoi sinon,}$$

est un plongement élémentaire qui convient.

Remarque. - Contrairement aux modèles élémentairement équivalents d'une théorie complète, deux types équivalents n'ont pas nécessairement d'ultrapuissances isomorphes (cf. exemples).

LEMME 1.2. - L'ordre fondamental est complet : Toute chaîne de types admet une unique borne supérieure et une unique borne inférieure.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une chaîne telle que, pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \geq j$ implique $p_i \geq p_j$. Notons, pour tout $i \in I$, $I_i = \{j \in I; j \geq i\}$; les I_i forment une base de filtre, qui est contenue dans un ultrafiltre \mathcal{U} . Si $\prod_i p_i / \mathcal{U} \vdash f(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod_i \bar{a}_i / \mathcal{U}$, pour tout $i \in I$, il existe $j \geq i$ tel que $p_j \vdash f(x, \bar{a}_j)$;

Or $p_j \geq p_i$, donc il existe \bar{a}'_i tel que $p_i \mid -f(x, \bar{a}'_i) : \prod_i p_i / u \geq p_i$, pour tout $i \in I$. Soit $q \geq p_i$, pour tout i ; il est évident que $q \geq (\prod_i p_i) / u$, car toute formule représentée par q est représentée par tous les p_i , donc par leur ultra-produit par u . On fait un raisonnement analogue pour la borne inférieure.

LEMME 1.3. - Soient M un modèle de T et F un fermé non vide de $S_1(M)$; il existe dans F des fils maximaux pour l'ordre fondamental induit sur F .

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une chaîne maximale formée d'éléments de F ; $\prod_i p_i / u$, type sur M^u , est alors la borne supérieure des p_i . Tous les p_i satisfont les formules définissant F , et donc $(\prod_i p_i / u) \mid_M$ aussi; $(\prod_i p_i / u) \mid_M$, élément de F , est tel que, pour tout i , $(\prod_i p_i / u) \mid_M \geq \prod_i p_i / u \geq p_i$.

PROPOSITION 1.2. - Soient $p \in S_1(A)$ et M un modèle contenant A ; il existe dans $S_1(M)$ des fils de p maximaux dans l'ensemble des fils de p sur M , et chacun d'eux est maximal dans l'ensemble de tous les fils de p sur les modèles contenant A .

L'ensemble des fils de p sur M forme un fermé F , et donc il existe, d'après le lemme 1.3, des fils de p maximaux pour l'ordre fondamental induit sur F . Soient q l'un d'eux, M' un modèle contenant A et $q' \in S_1(M')$, tel que $p \subset q'$ et $q' \geq q$. Sur une extension élémentaire N commune à M et M' , $h(q')$ étant un héritier de q' sur N et q'' sa restriction à M , qui appartient à F , on obtient: $q'' \geq h(q') \sim q' \geq q$ et, par maximalité de q dans F , $q'' \sim q$ et donc $q' \sim q$.

Par la suite, q , fils de $p \in S_1(A)$ sur un modèle, sera dit maximal s'il est maximal parmi les fils de p sur des modèles.

B. Exemples. Application aux types stables.

Exemples. - L'ordre fondamental sera représenté en chaînes maximales suivant des points reliés par des flèches qui indiqueront leur position dans l'ordre fondamental.

1° La théorie de l'ensemble infini, ω -stable, admet pour ordre fondamental

$$\begin{array}{ccc} \text{(non réalisé)} & & \text{(réalisé)} \\ \longleftarrow & \longrightarrow & \end{array}$$

2° La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée, ω -stable, si l'on excepte les éléments algébriques sur le corps premier qui forment un point, admet le même ordre fondamental :

$$\begin{array}{ccc} \text{(non réalisé)} & & \text{(réalisé)} \\ \longleftarrow & \longrightarrow & \end{array}$$

3° La notation des types pour l'ordre dense sans extrémités, théorie instable, est la suivante : (1) type $-\infty$; (2) type $+\infty$; (3) type irrationnel; (3⁺) type rationnel q^+ ; (3⁻) type rationnel q^- ; (4) type réalisé.

sage de α à $\alpha + 1$; Si α est limite, chacune des branches de l'arbre définit l'ensemble des formules d'un type, qui est équivalent à p ; on considère un cardinal λ tel que $\lambda = \lambda^{|T|} \geq |M|$, et on poursuit le procédé jusqu'à μ , le plus petit cardinal tel que $\lambda < 2^\mu$. On fabrique ainsi λ^+ fils (équivalents à p), avec $\lambda^+ > \lambda^{|T|}$, sur une extension de M de cardinal λ obtenue en conservant les λ paramètres distinguant les fils de p introduits précédemment. Cela contredit la stabilité de p .

COROLLAIRE. - Soient M, N deux modèles de T , $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ stables ; p et q sont équivalents si, et seulement si, ils ont, à isomorphisme près, un héritier commun.

(\leftarrow) C'est évident (n'utilise pas la stabilité).

(\rightarrow) $p \geq q$, et donc il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et M' , restriction élémentaire de $N^{\mathcal{U}}$, tels que p soit isomorphe à $p' \in S_1(M')$, avec $p' \subset q^{\mathcal{U}}$. On a donc $p \sim p' \geq q^{\mathcal{U}} \sim q \geq p$. Par conséquent, $p' \sim q^{\mathcal{U}}$ et donc (théorème 1) $q^{\mathcal{U}}$, héritier de q sur $N^{\mathcal{U}}$, est aussi héritier de p' , isomorphe à p .

C. Ordre fondamental avec paramètres.

Soit A un ensemble de paramètres quelconques. On définit l'ordre fondamental \geq_A pour les types sur des modèles contenant A de la manière suivante : Soient M, N des modèles contenant A , $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$; $p \geq_A q$ si, et seulement si, pour toute formule $f(x, \bar{y}, \bar{a})$, $\bar{a} \in A^k$, chaque fois que $p \vdash f(x, \bar{m}, \bar{a})$, avec $\bar{m} \in M^n$, il existe $\bar{n} \in N^n$ tel que $q \vdash f(x, \bar{n}, \bar{a})$.

Le quotient de cette relation de préordre par la relation d'équivalence \sim_A associé ($p \sim_A q$ si, et seulement si $p \geq_A q$ et $q \geq_A p$) est l'ordre fondamental à paramètres dans A , qui est complet (même preuve que dans le lemme 1.2).

Exemple. - Soit $p \in S_1(M)$, M modèle de T ; si q hérite de p sur une extension élémentaire N de M , alors $p \sim_M q$.

La proposition 1.1 se transpose aisément de la manière suivante.

PROPOSITION 1.3. - Soient M et N deux modèles de T contenant A , $p \in S_1(M)$; $q \in S_1(N)$; $p \geq_A q$ si, et seulement si, il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et un A -plongement élémentaire σ (i. e. laissant A invariant point par point), qui fasse de $q^{\mathcal{U}}$ un fils de $\sigma(p)$, type isomorphe à p .

Même preuve que pour la proposition 1.1, en remplaçant T par $T(A)$, où l'on a nommé les éléments de A , car tout modèle de T contenant A est modèle de $T(A)$.

Le lemme 1.3, la proposition 1.2 se transposent aisément pour l'ordre fondamental \geq_A .

Deux types A -équivalents étant évidemment équivalents, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.

1° Soient M et N , modèles de T contenant A , avec $M < N$ et $p \in S_1(M)$ stable ; le seul fils de p sur N qui lui soit A -équivalent est son héritier.

2° Soient M et N , deux modèles de T contenant A , $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ stables ; p et q sont A -équivalents si, et seulement si, ils ont, à A -isomorphisme près, un héritier commun.

1° C'est évident.

2° $p \geq_A q$, donc il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et M' , restriction élémentaire de $N^{\mathcal{U}}$, tels que p soit A -isomorphe à $p' \in S_1(M')$ (proposition 1.3), avec $p' \subset q^{\mathcal{U}}$. Or $p \sim_A p' \geq_A q^{\mathcal{U}} \sim_A q \geq_A p$. Par conséquent, $p' \sim_A q^{\mathcal{U}}$, et donc $q^{\mathcal{U}}$ est héritier de q et p' , type A -isomorphe à p .

2. Le théorème de la borne.

On considère dorénavant des types (complets) sur des ensembles de paramètres quelconques. $p \in S_1(A)$ est dit stable, si toutes ses extensions sur des modèles le sont. La caractérisation de la stabilité par le nombre de fils sur un modèle reste donc valable. Si T est stable, bien sûr, tous les types sont stables.

De plus, ce qui a été fait en stabilité (ultrapuissance, héritier, cohéritier, stabilité) pour les 1-types sur des modèles peut être transposé pour les n -types, et de manière générale pour les I -types sur des modèles ; de même, ce qui suit dans ce paragraphe 2 pour les 1-types se généralise pour les n - et I -types.

A. Le théorème de la borne.

Soit $p \in S_1(A)$; on appelle borne de p (notée $\beta(p)$), la classe d'un fils maximal de p sur un modèle étendant A . De l'existence de fils maximaux, on déduit que tout type a au moins une borne.

D'après la proposition 1.2, il est clair que q , fils de $p \in S_1(A)$ sur M étendant A , est fils maximal de p si, et seulement si, sa classe est une borne de p . De plus, tout ultraproduct d'éléments p_i d'une borne de p est un élément de cette même borne, car il représente les mêmes formules que les p_i , exactement.

On étend la définition de fils maximal à des fils sur des ensembles de paramètres quelconques : Si $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$, $A < B$ et $p \subset q$, q est fils maximal de p s'il est possible de trouver un modèle M contenant B et un prolongement de q en un fils maximal de p sur M (au sens premier).

LEMME 2.1. - Soient $A < B$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$; si q est fils maximal de p , q se laisse prolonger en un fils maximal de p sur n'importe quel modèle N contenant B .

Soient r un fils de q sur $M \supset B$, qui soit fils maximal de p , P un exten-

sion élémentaire commune à M et N , r_1 un héritier de r sur P et r_2 la restriction de r_1 à N : r_2 , fils de q , est fils maximal de p : $r_2 \geq r_1 \sim r$, donc, par maximalité de r , $r_2 \sim r$, et donc r_2 est fils maximal de p .

LEMME 2.2. - Soient $A < B < C$, $p \in S_1(A)$, $q \in C_1(C)$, q fils maximal de p sur B ; q se laisse prolonger en un fils maximal de p sur C .

Par le lemme 2.1, il existe une extension maximale de p prolongeant q sur un modèle M contenant p , et sa restriction à C convient.

LEMME 2.3. - Soient $A < B < C$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$, $r \in S_1(C)$, avec $p < q < r$; si r est fils maximal de p , r est fils maximal de q , et q fils maximal de p .

On prend pour C un modèle grâce au lemme 2.1. Le fermé de $S_1(C)$ des fils de q sur C est contenu dans celui des fils de p , ce qui prouve la maximalité de r parmi les fils de q ; le reste est trivial.

THÉOREME 2 (Théorème de la borne). - Soit $p \in S_1(A)$, stable; p n'a qu'une seule borne.

La démonstration est très difficile dans le cas général, nous n'allons la faire que dans le cas où la théorie T est stable.

Soit ξ une réalisation de p et M un modèle étendant A . On prolonge le type de M au-dessus de A de façon maximale en un type sur $A \cup \{\xi\}$, réalisé en M_1 . Soit p_1 le type de ξ sur M_1 ; p_1 est fils de p , et je dis que tout fils q de p sur N contenant A a un héritier qui est fils d'un type A -isomorphe à p_1 ; cela prouvera que, pour tout q , $p_1 \geq q$ et que, donc, la classe de p_1 est l'unique borne de p .

On déplace N par A -isomorphisme de manière à ce que ξ réalise q , ce qui est possible car, si ξ' réalise q , ξ et ξ' s'échangent par A -isomorphisme (théorème de SVENONIUS). D'après le lemme 2.2, on étend le type de M_1 sur $A \cup \{\xi\}$ en un type sur $N \cup \{\xi\}$, réalisé en M_2 , qui soit extension maximale de sa restriction à A . D'après le lemme 2.3, le type de M_2 sur $N \cup \{\xi\}$ est extension maximale de sa restriction à N . Donc, sur un modèle P contenant $N \cup \{\xi\}$, le type de M_2 sur N se prolonge de façon maximale sur P , soit, d'après le théorème 1, pour les I -types stables, le type de M_2 sur P hérite de sa restriction à N , d'où le type de M_2 sur $N \cup \{\xi\}$ hérite de sa restriction à N ; donc, par définition, le type de ξ sur $M_2 \cup N$ cohérite (i. e. hérite) de sa restriction à N , qui est q . Le type de ξ sur $M_2 \cup N$, qui hérite de q , est fils du type de ξ sur M_2 , qui est A -isomorphe au type de ξ sur M_1 , i. e. p_1 (en effet, M_1 et M_2 , ayant même type sur $A \cup \{\xi\}$, s'échangent par $A \cup \{\xi\}$ -isomorphisme, et donc les types de ξ sur M_1 et M_2 s'échangent par A -isomorphisme).

Remarque. - Cette démonstration prouve, en outre, que $p_1 \geq_{\mathcal{L}} q$, pour tout fils q de p sur N contenant \mathcal{L} , i. e. que p_1 est \mathcal{L} -maximal et qu'il n'existe qu'une seule \mathcal{L} -borne.

B. Caractérisations des fils maximaux de types stables.

Le lecteur voulant simplifier pourra supposer que la théorie est stable.

PROPOSITION 2.1. - Soit $p \in S_1(\mathcal{L})$ stable ; Si q est un fils de p sur un modèle M contenant \mathcal{L} , q est fils maximal de p si, et seulement si, pour toute extension élémentaire N de M , et toute restriction élémentaire P de N contenant \mathcal{L} , l'héritier de q sur N héríte de sa restriction à P .

(\rightarrow) Si q est fils maximal de p , son héritier $h(q)$ sur N lui est équivalent et la restriction q' de $h(q)$ à P est telle que $q' \geq h(q) \sim q$. Par maximalité de q , $q' \sim h(q)$. q' a un fils $h(q)$ qui lui est équivalent, c'est son héritier (Théorème 1).

(\leftarrow) En reprenant la démonstration du théorème de la borne, ξ réalisant p , et p_1 étant le type de ξ sur M_1 , $p_1 \geq q$, pour tout fils q de p sur un modèle le contenant \mathcal{L} . Par la proposition 1.1, il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et $M_1^{\mathcal{U}} < M^{\mathcal{U}}$ tels que $q^{\mathcal{U}}$ est fils de $p_1^{\mathcal{U}} \in S_1(M_1^{\mathcal{U}})$, isomorphe à p_1 . $q^{\mathcal{U}}$ héríte de $p_1^{\mathcal{U}}$, on en déduit $q \sim q^{\mathcal{U}} \sim p_1^{\mathcal{U}} \sim p_1$; q est fils maximal de p .

COROLLAIRE. - Soient $p \in S_1(\mathcal{L})$ stable et q un fils de p sur M ; q est fils maximal de p si, et seulement si, q est fils \mathcal{L} -maximal de p .

(\rightarrow) Dans la démonstration précédente, p_1 et q ont, à \mathcal{L} -isomorphisme près (car $p_1 \geq_{\mathcal{L}} q$), un héritier commun, et donc, d'après la proposition 1.4, p_1 et q sont \mathcal{L} -équivalents, et donc q est fils \mathcal{L} -maximal de p .

PROPOSITION 2.2. - Soient $\mathcal{L} < B$, $p \in S_1(\mathcal{L})$ stable et q un fils de p sur B ; q est fils maximal de p si, et seulement si, p et q ont même borne, i. e. si, et seulement si, la borne de q n'est pas strictement inférieure à celle de p .

(\rightarrow) q se laisse prolonger en un fils maximal de p , r , sur un modèle M contenant B . La classe de r est à la fois la borne de p et celle de q .

(\leftarrow) Soit r un fils maximal de q sur M contenant B . La classe de r , qui est fils de p sur M , est la borne de q , donc celle de p , ce qui implique que r est fils maximal de p , et donc q est fils maximal de p , par définition.

COROLLAIRE. - Soient $\mathcal{L} < B < C$, $p \in S_1(\mathcal{L})$, $q \in S_1(B)$, $r \in S_1(C)$, p stable $p < q < r$; r est fils maximal de p si, et seulement si, r est fils maximal de q , et q fils maximal de p .

On a $\beta(p) \geq \beta(q) \geq \beta(r)$. Les trois bornes sont égales si, et seulement si, $\beta(p) = \beta(r)$.

PROPOSITION 2.3. - Soit $p \in S_1(\mathcal{A})$ stable, et q fils de p sur $B \supseteq \mathcal{A}$; q est fils maximal de p si, et seulement si, chaque fois que $q \vdash f(x, \bar{b})$, la formule $f(x, \bar{y})$ est représentée par la borne de p .

La nécessité est claire.

Pour la suffisance : Soit I l'ensemble des fragments finis de q . Je montre que, pour tout $i \in I$, dont la conjonction s'écrit $f_i(x_i, \bar{b}_i)$, $\bar{b}_i \in B^n$, il existe un plongement élémentaire σ_i de B dans un modèle M_i contenant B , et r_i élément de la borne de p sur M_i , tel que $r_i \vdash f_i(x, \sigma_i(\bar{b}_i))$.

Soient $i \in I$ et E_i l'ensemble des formules $\{f_i(x, \bar{b}_i) \wedge \varphi_e(\bar{b}_i)\}$, où $\varphi_e(\bar{b}_i)$ parcourt l'ensemble des fragments finis du type de \bar{b}_i sur \emptyset . Par hypothèse, pour tout $e \in E_i$, il existe un fils maximal p_e de p sur $N_e \supseteq B$ et $\bar{\beta}_e \in N_e^n$ tels que $p_e \vdash f_i(x, \bar{\beta}_e) \wedge \varphi_e(\bar{\beta}_e)$. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur E_i contenant les ensembles $E_i(e) = \{f \in E_i; f \supseteq e\}$. En notant $N_i = \prod_e N_e / \mathcal{U}$, et $\bar{\beta}_i = \prod_e \bar{\beta}_e / \mathcal{U}$, le type $r_i = \prod_e p_e / \mathcal{U}$, élément de la borne de p , vérifie

pour tout e dans E_i , $r_i \vdash f_i(x, \bar{\beta}_i) \wedge \varphi_e(\bar{\beta}_i)$.

\bar{b}_i et $\bar{\beta}_i \in M_i^n$ ayant même type sur \emptyset , il existe σ , plongement élémentaire de B dans M_i qui envoie \bar{b}_i sur $\bar{\beta}_i$, et qui convient.

Pour tout $i \in I$, soit $I_i = \{j \in I; j \supseteq i\}$, et soit \mathcal{U} un ultrafiltre les contenant. $\prod_i r_i / \mathcal{U}$ est élément de la borne de p , et si σ est l'application

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \prod_i M_i / \mathcal{U} \\ b &\longmapsto (\dots, \sigma_i(b), \dots) = \sigma(b), \end{aligned}$$

si le fragment i contient b , n'importe quoi sinon, σ est un plongement, élémentaire par construction, qui fait de $\sigma(q)$, isomorphe à q , un père de $\prod_i r_i / \mathcal{U}$, et donc q est fils maximal de p .

De ces trois caractérisations, la troisième est plus maniable dans la pratique, surtout sous sa forme négative :

q n'est pas fils maximal de p stable si, et seulement si, $q \vdash f(x, \bar{b})$, et $f(x, \bar{y})$ omise par la borne de p .

LEMME 2.4. - Soient \mathcal{A} infini, $p \in S_1(\mathcal{A})$ stable et q fils non maximal de p sur M , modèle $|M|^+$ -saturé, il existe une restriction M' de M de même cardinal que \mathcal{A} , contenant \mathcal{A} , telle que q n'hérite pas de sa restriction à M' .

Par la proposition 2.1, il existe P , extension élémentaire de M , et N restriction élémentaire de P contenant \mathcal{A} , telle que l'héritier de q sur P n'hérite pas de sa restriction q' à N . Soit M_1 , de cardinal $|\mathcal{A}|$, restriction élémentaire de N telle q' hérite de $q'|_{M_1}$. $q'|_{M_1}$ et q ne sont pas équivalents. M est suffisamment saturé pour y réaliser le type de M_1 sur \mathcal{A} en M' , et alors

q n'hérite pas de l'image correspondante de $q' \upharpoonright_{M_1}$.

C. Déviaton.

Dans ce sous-paragraphe C, la théorie T est stable. Dans ce cas, " $q \in S_1(B)$, $\Lambda < B$, est une extension maximale de sa restriction à Λ " se dit " q ne dévie pas sur Λ " ou " q est fils non déviant de $q \upharpoonright_{\Lambda}$ ". Nous emploierons toujours cette terminologie dans le cadre des théories stables.

Outre les caractérisations précédentes, qui sont évidemment valables, citons les propriétés "canoniques" de la déviation :

1° Si $p \in S_1(\Lambda)$, p ne dévie pas sur Λ (évident) ;

2° (Propriété de prolongement) Soient $\Lambda < B < C$, et $p \in S_1(B)$ qui ne dévie pas sur Λ ; p se laisse prolonger sur C en un type qui ne dévie pas sur Λ (cf. lemme 2.2) ;

3° (Propriété de transitivité) Soient $\Lambda < B < C$; $p \in S_1(C)$ ne dévie pas sur Λ si, et seulement si, p ne dévie pas sur Λ et $p \upharpoonright_B$ ne dévie pas sur Λ (cf. corollaire de la proposition 2.2) ;

4° Soient $\Lambda < B$; les types de $S_1(B)$ qui ne dévient pas sur Λ forment un fermé.

On se ramène au cas où B est un modèle. En effet, soit M , un modèle contenant B ; si l'ensemble des types de $S_1(M)$ qui ne dévient pas sur Λ est un fermé, donc un compact, son image continue par l'application restriction à B , compacte et donc fermée dans $S_1(B)$, forme l'ensemble des types de $S_1(B)$ qui ne dévient pas sur Λ ; Soit $q \in S_1(M)$ adhérent à l'ensemble X des types de $S_1(M)$ non déviant sur Λ . Soient N une extension élémentaire de M , P une restriction de N contenant Λ . L'héritier q_1 de q sur N est adhérent à l'ensemble X_1 des types sur N non déviant sur Λ , par continuité de l'application "héritier" (cf. Exposé n° 1) ; ces derniers cohéritent de leurs restrictions à P , i. e. sont adhérents à des types réalisés dans P , et il en est donc de même de q_1 , qui hérite de sa restriction à P . On conclut à l'aide de la proposition 2.1.

5° (Propriété de symétrie) Soient \bar{a} et \bar{b} , réalisant des types sur Λ : le type de \bar{a} sur $\Lambda \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur Λ si, et seulement si, le type de \bar{b} sur $\Lambda \cup \{\bar{a}\}$ ne dévie pas sur Λ .

Si $t(\bar{a}, \Lambda \cup \{\bar{b}\})$ ne dévie pas sur Λ , il existe donc M_1 , modèle contenant $\Lambda \cup \{\bar{b}\}$, tel que $t(\bar{a}, M_1)$ ne dévie pas sur Λ . Il existe aussi M'_1 , contenant Λ , telle que $t(\bar{b}, M'_1)$ ne dévie pas sur Λ . L'héritier (i. e. le cohéritier) sur $M_1 \cup \{\bar{a}\}$ de $t(M'_1, M_1)$ étant réalisé en M_2 , M'_1 et M_2 sont M_1 -isomorphes, donc $t(\bar{b}, M_2)$ est M_1 -isomorphe, donc équivalent, à $t(\bar{b}, M'_1)$ et par conséquent ne dévie pas sur Λ . Par définition, $t(\bar{a}, M_2 \cup M_1)$ hérite de sa restriction à M_1 , et donc $t(\bar{a}, M_2) \geq t(\bar{a}, M_1)$. Par maximalité de $t(\bar{a}, M_1)$, $t(\bar{a}, M_2) \sim t(\bar{a}, M_1)$, et donc $t(\bar{a}, M_1 \cup M_2)$ est l'héritier de $t(\bar{a}, M_2)$; par

restriction, $t(\bar{a}, M_2 \cup \{\bar{b}\})$ hérite de $t(\bar{a}, M_2)$, donc cohérite aussi, d'où, par définition, $t(\bar{b}, M_2 \cup \{\bar{a}\})$ hérite de $t(\bar{b}, M_2)$, i. e. ne dévie pas sur M_2 , et par transitivité, $t(\bar{b}, M_2 \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur Λ . D'où par restriction, $t(\bar{b}, \Lambda \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur Λ .

D. Application aux rangs.

Soient q et $q' \in S_1(M)$, fils maximaux quelconques de $p \in S_1(\Lambda)$ stable. D'après le corollaire de la proposition 2.1, q et q' sont Λ -équivalents, et, par la proposition 1.4, q et q' ont, à Λ -isomorphisme près, un héritier commun; dans un modèle N , contenant élémentairement M qui soit suffisamment homogène pour prolonger tous les Λ -isomorphismes ainsi considérés entre fils maximaux de p sur M , les fils maximaux de p sur N sont conjugués par Λ -automorphismes de N : Si r et r' sont fils maximaux de p sur N , ils héritent respectivement de leurs restrictions q et q' à M , fils maximaux de p . Le Λ -automorphisme σ de N qui envoie q sur σq , q' et σq ayant même héritier sur toute extension commune à M et σM , envoie l'héritier r de q sur N sur l'héritier de σq sur N , i. e. l'héritier r' de q' sur N .

PROPOSITION 2.4. - Soient $p \in S_1(\Lambda)$, stable, et un modèle $M \supset \Lambda$; λ cardinal quelconque; Il existe un modèle P , extension élémentaire de M , tel que tous les fils maximaux de p sur P soient conjugués par Λ -automorphismes de P , et que tous les autres fils de p aient au moins λ conjugués par Λ -automorphismes de P .

Démonstration analogue à celle du théorème 3, page 18 de l'exposé n° 1.

Soit N , extension élémentaire de M , où tous les fils maximaux de p sur N sont conjugués par Λ -automorphismes. Je dis qu'il existe P_1 , extension élémentaire de N , tel que tout fils non maximal de p sur P_1 , mais qui hérite de sa restriction à N , ait au moins λ -conjugués par Λ -automorphisme de P .

Pour tout fils q_α non maximal de p sur N , il existe une extension élémentaire N'_α de N , et $M_\alpha < N'_\alpha$, M_α contenant Λ tels que l'héritier de q_α sur N'_α n'hérite pas de sa restriction à M_α . Par le théorème 3, page 18 de l'exposé n° 1, il existe $N_\alpha > N'_\alpha$, tel que l'héritier de q_α sur N_α ait λ conjugués par M_α - (soit Λ -) automorphismes de N_α . On regroupe les N_α élémentairement dans un modèle P_1 , extension élémentaire de N , assez homogène pour prolonger les Λ -automorphismes des N_α déjà introduits, et si q est un fils non maximal de p sur P_1 , qui hérite de sa restriction à N , $q|_N$ est fils non maximal de p et donc égal à un q_α . Par stabilité, q , héritier de q_α , est héritier et donc fils de $q|_{N_\alpha}$, qui possède au moins λ conjugués par Λ -automorphismes de P_1 . Ceux-ci transforment q en au moins λ conjugués distincts car leurs restrictions à N_α le sont.

En réitérant le procédé comme dans le théorème précité, le modèle $P = P_{\omega_1}$, construit à l'étape ω_1 , convient : Si q est fils non maximal de p sur P , il existe R , restriction dénombrable de P telle que q hérite de $q|_R$. Alors R est inclus dans un P_K , et, par stabilité de $q|_R$, q hérite de $q|_{P_K}$, et $q|_{P_{K+1}}$, père de q , à λ conjugués distincts au moins par A -automorphismes de P_{K+1} , qui sont prolongés en A -automorphismes de P .

PROPOSITION 2.5. - Soit R un rang (Ici les rangs sont définis sur des ensembles de paramètres quelconques, les axiomes étant ceux que l'on devine).

- 1° Les fils équirangs d'un type rangé sont exactement des fils maximaux ;
- 2° Tout fils maximal d'un type stable est équirang avec lui ;
- 3° Deux types stables équivalents (définis sur des modèles) ont même rang ;
- 4° Deux types stables, ayant même borne, ont même rang R .

1° Soit $p \in S_1(A)$, avec $R(p) = \alpha$, qui est donc stable ; un fils q équirang avec p sur B contenant A admet un fils q' équirang avec lui sur un modèle M contenant B : Montrons, par l'absurde, que q' est fils maximal de p ; sinon, on pouvait trouver $N > M$ sur lequel tout fils de q' (en particulier un fils équirang q'' de q sur N), qui est fils non maximal de p , a au moins μ^+ (où μ est la constante de multiplicité bornée de p) conjugués par A -automorphismes de N tous équirangs avec p pour le cas de q'' . Impossible. De plus, tous les fils maximaux de p finissant par être conjugués par A -automorphismes, ce sont exactement les fils équirangs de p .

2° Soit $p \in S_1(A)$ stable et q fils maximal de p . Il suffit de prouver par induction que, si $R(p) \geq \alpha$, $R(q) \geq \alpha$, où q est un fils maximal de p sur un modèle M où tous les fils maximaux sont conjugués. Si α est limite, c'est évident. Si $R(p) \geq \alpha + 1$, p a un fils p' sur M , avec $R(p') \geq \alpha + 1$; si p' est fils maximal de p , par A -automorphisme, $R(q) \geq \alpha + 1$; sinon, en déplaçant M par A -automorphisme, q est isomorphe au père d'un héritier p'' de p' ; donc $R(q) \geq R(p'')$, et, par hypothèse d'induction, $R(p'') \geq \alpha$; mais alors, comme p'' n'hérite de q , ou bien q n'est pas rangé, ou bien $R(q) > R(p'')$ (par le 1°), et donc $R(q) \geq \alpha + 1$.

3° Si $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ stables sont équivalents, à isomorphisme près, ils ont un héritier commun, donc ils ont même rang (par le 2°).

4° Si p et q stables ont même borne, ils ont des fils maximaux respectifs sur des modèles qui sont équivalents, donc équirangs, par conséquent p et q ont même rang.

3. Le théorème de la relation d'équivalence finie.

A. Multiplicité et Δ -multiplicité.

Définition 1. - Soient $p \in S_1(A)$ stable, et M et N modèles contenant A . A un fils maximal q de p sur M , j'associe un fils maximal r de p sur N de la manière suivante : Dans une extension élémentaire P commune à M et N , on prend la restriction r à N de l'héritier de q sur P , qui est fils maximal de p . Il est immédiat, par stabilité, que ce procédé est indépendant de l'extension commune à M et N choisie. Cette transformation définit alors une involution entre les fils maximaux de p sur M et les fils maximaux de p sur N , car le même raisonnement, fait à partir de r , nous donne q . L'existence de cette bijection prouve que le cardinal de l'ensemble des fils maximaux de p sur un modèle contenant A est indépendant de ce modèle, et donc constant : On l'appelle multiplicité du type stable p ; elle désigne le nombre de fils maximaux de p sur n'importe quel modèle. Un type de multiplicité i est dit stationnaire.

Exemple. - Tout type (stable) sur un modèle est stationnaire.

Définition 2. - Soit Δ un ensemble de formules sans paramètres $f(x, \bar{y})$; on dit que $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ (M modèle de T) sont Δ -distincts s'il existe $\bar{a} \in M^k$, $f \in \Delta$, avec $p \vdash f(x, \bar{a})$ et $q \vdash \neg f(x, \bar{a})$. Sinon, on dit que p et q sont Δ -confondus.

Remarque. - Si p et q , types stables sur M , sont Δ -confondus, leurs héritiers, sur toute extension élémentaire N de M , sont Δ -confondus, grâce à la définition de p et celle de q , que l'on peut prendre identiques pour les formules de Δ .

Définition 3. - Deux fils maximaux $q \in S_1(M)$, $q' \in S_1(N)$ (M, N modèles de T contenant A) d'un type stable $p \in S_1(A)$ sont associés s'ils ont des héritiers respectifs Δ -confondus sur une extension commune à M et à N (en fait sur toute extension, d'après la remarque). Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fils maximaux de p sur des modèles. On peut évidemment trouver un représentant de chaque classe dans tout modèle contenant A . Le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence s'appelle la Δ -multiplicité de p . C'est le nombre de fils maximaux de p 2 à 2 Δ -distincts sur tout modèle contenant A .

Si Δ est l'ensemble de toutes les formules $f(x, \bar{y})$ du langage, on retrouve la multiplicité.

PROPOSITION 3.1. - Soit $p \in S_1(A)$ stable ; pour tout ensemble fini Δ de formules $f(x, \bar{y})$, la Δ -multiplicité de p est finie.

Supposons, par l'absurde, que, sur M , il existe une infinité a_1, \dots, a_n, \dots de fils maximaux de p , deux à deux Δ -distincts. Soit ω^u une ultrapuissance de ω , u étant un ultrafiltre sur I . A $\xi \in \omega^u$, on associe q_ξ sur M^u , qui est un élément de la borne de p par

Si $\xi = \prod_i n_i / \mathcal{U}$, $q_\xi \vdash \varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod \bar{a}_i / \mathcal{U} \in M^{\mathcal{U}}$, si, et seulement si, $q_{n_i} \vdash \varphi(x, \bar{a}_i)$, pour presque tout $i \in I$. Alors, si $\xi \neq \eta = \prod_i n'_i / \mathcal{U}$, q_ξ et q_η sont distincts.

[Pour tout $K \in \mathcal{P}(\Delta)^* = \mathcal{P}(\Delta) \setminus \{\emptyset\}$, on note K^c son complémentaire dans Δ , et on note $D(K) = \{i \in I; q_{n_i} \text{ et } q_{n'_i} \text{ sont } f\text{-distincts, pour tout } f \in K, \text{ et } K^c\text{-confondus}\}$. On a $\bigcup_{K \in \mathcal{P}(\Delta)^*} D(K) = \{i \in I; n_i \neq n'_i\} \in \mathcal{U}$. Les $D(K)$ étant 2 à 2 disjoints et en nombre fini, l'un des $D(K)$, $D(K_0)$, est dans \mathcal{U} , ce qui signifie que, pour $f(x, y) \in K_0$, $D(K_0) \subset \{i \in I; q_{n_i} \text{ et } q_{n'_i} \text{ } f\text{-distincts}\} \in \mathcal{U}$.

Donc, pour presque tout i , $q_{n_i} \vdash f(x, \bar{a}_i)$ et $q_{n'_i} \vdash \neg f(x, \bar{a}_i)$, avec $\bar{a}_i \in M^k$. En complétant arbitrairement les \bar{a}_i , on voit que $q_\xi \vdash f(x, \bar{a})$ et $q_\eta \vdash \neg f(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod_i \bar{a}_i / \mathcal{U}$.]

Mais, comme $\omega^{\mathcal{U}}$ est de cardinalité arbitrairement grande, on obtient un nombre de fils maximaux de p sur $M^{\mathcal{U}}$ supérieur à la multiplicité de p , ce qui est impossible.

On montre que la multiplicité d'un type stable est finie ou 2^{ω} .

B. Le théorème de la relation d'équivalence finie.

PROPOSITION 3.2. - Soit $p \in S_1(A)$ stable, et $f(x, \bar{y})$ une formule; il existe une relation d'équivalence $E_{p,f}(\bar{y}, \bar{y}')$ à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A , telle que \bar{m} et \bar{m}' sont congrus modulo $E_{p,f}$ si, et seulement si, pour tout fils maximal q de p sur un modèle contenant \bar{m} et \bar{m}' , $q \vdash f(x, \bar{m})$ si, et seulement si, $q \vdash f(x, \bar{m}')$.

Soient q un fils maximal de p sur M , et $\delta f(\bar{y}, \bar{b})$ une définition de q pour f , i. e. $q \vdash f(x, \bar{m})$ si, et seulement si, $\vdash \delta f(\bar{m}, \bar{b})$. La formule

$$E(\bar{z}, \bar{z}') = (\forall \bar{y}) \delta f(\bar{y}, \bar{z}) \iff \delta f(\bar{y}, \bar{z}')$$

définit une relation d'équivalence. Soit n la f -multiplicité de p ; la théorie suivante est inconsistante: $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n+1}$ réalisent le type de \bar{b} sur A et sont non congrus 2 à 2 modulo E ; en effet, sinon, les \bar{b}_i seraient conjugués de \bar{b} par A -isomorphismes d'un modèle N , les $\delta f(\bar{y}, \bar{b}_i)$ seraient des définitions pour f de fils maximaux de p sur N , et on en obtiendrait $(n+1)$ tous f -distincts, ce qui est impossible. Cette inconsistance est induite par un fragment fini $g(\bar{z})$ du type de \bar{b} sur A , qui est inconsistant. Donc E découpe l'ensemble des \bar{z} vérifiant $g(\bar{z})$ en au plus n classes, et, en fait, en exactement n classes, car tous les fils maximaux de P sur un modèle $P \succ M$ étant conjugués par A -isomorphismes, ont tous une définition pour f de la forme $\delta f(\bar{y}, \bar{b}')$, où $\vdash g(\bar{b}')$. La relation d'équivalence $E_{p,f}(\bar{y}, \bar{y}')$ est alors

$$(\forall \bar{z}) g(\bar{z}) \implies (\delta f(\bar{y}, \bar{z}) \iff \delta f(\bar{y}', \bar{z})) .$$

THÉORÈME 3 (dit "de la relation d'équivalence finie"). - Soient $p \in S_1(A)$ stable,

M un modèle contenant A et q, q' des fils maximaux distincts de p sur M ; il existe une relation d'équivalence E, à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A, telle que, si x et x' réalisent q et q',

$$q(x) \wedge q'(x') \vdash \neg E(x, x') .$$

La démonstration est assez difficile dans le cas général. Nous n'allons la faire que dans le cas où la théorie est stable.

Il existe $\bar{a} \in M^{\aleph}$, et une formule $f(x, \bar{y})$ tels que $q \vdash f(x, \bar{a})$ et $q' \vdash \neg f(x, \bar{a})$. On réalise q en x et q' en x' , de manière à ce que le type de x' sur $M \cup \{x\}$ ne dévie pas sur M . Alors le type de \bar{a} sur $A \cup \{x, x'\}$ ne dévie pas sur A : Par restriction, le type de x' sur $A \cup \{\bar{a}, x\}$ ne dévie pas sur A , donc ne dévie pas non plus sur $A \cup \{x\}$; par symétrie, le type de \bar{a} sur $A \cup \{x, x'\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{x\}$; le type de x sur M ne dévie pas sur A , donc le type de x sur $A \cup \{\bar{a}\}$ ne dévie pas sur \bar{a} , et donc par symétrie le type de \bar{a} sur $A \cup \{x\}$ ne dévie pas sur A . On conclut par transitivité. Appelons π , le type de \bar{a} sur A : Alors x et x' ne sont pas congrus modulo E_{π, f^*} , ou f^* désigne $f(x, \bar{y})$, avec \bar{y} variable de type et x variable de paramètre. On considère la proposition 3.2 pour le type de \bar{a} sur A , qui est stable, et une de ses extensions maximales (qui existent) sur un modèle N contenant $A \cup \{x, x'\}$, tel que le type de \bar{a} sur N ne dévie pas sur A . Il est donc consistant de dire que x vérifie q , x' vérifie q' et que x et x' sont non congrus modulo E_{π, f^*} . Cette équivalence n'a qu'un nombre fini de classes, par conséquent, chacune de ces classes a un représentant sur n'importe quel modèle contenant A , et la classe de x est déterminée par q , celle de x' par q' .

C. Notion de type fort.

Définition. - On appelle type fort de a sur A la donnée, pour toute relation d'équivalence $E(x, x')$ à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A , de la classe de a modulo E .

Remarques.

1° Le type fort sur A se définit plus généralement comme la donnée, pour toute relation d'équivalence E à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A , de la classe de la variable de type x modulo E .

2° Le type fort sur A contient le type sur A : Pour toute formule $f(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in A^n$, on associe $E(\xi, \xi') = f(\xi, \bar{b}) \iff f(\xi', \bar{b})$, qui n'a que deux classes.

3° Si A est un modèle, le type fort coïncide avec le type : En effet, comme toutes les relations d'équivalence définissables à paramètres dans A ont un nombre fini de classes, il existe un représentant au moins de chaque classe dans le modèle A , et cela revient à écrire : $x \sim \alpha$, $\alpha \in A$, ce qui est une formule du type de x sur A .

4° Les différents types forts étendant un type p stable sur A sont conjugués par A -isomorphismes, et le théorème 3 nous dit que, si q est fils maximal de p , type stable, sur M , il est entièrement déterminé, parmi les fils maximaux de p , par le type fort qu'il réalise.
