SÉBASTIEN EHRSAM

Théories ω_1-catégoriques

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. nº 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A3_0>

THÉORIES ω_1-CATÉGORIQUES

par Sébastien EHRSAM (*)

Introduction. - Une théorie T, toujours supposée complète sans modèle fini et dénombrable dans ce qui suit, est dite λ-catégorique (λ cardinal quelconque), si elle n'admet qu'un seul modèle de cardinal λ, à isomorphisme près. Après qu'on eut trouvé des exemples de théories ω_1-catégoriques non ω-catégoriques (corps algébriquement clos de caractéristique 0), ou ω-catégoriques et non ω_1-catégoriques (ordre dense sans extrémités). LOŠ s'est posé le problème suivant : T étant λ-catégorique ($\lambda \geq \omega_1$), T est-elle catégorique en tout cardinal non dénombrable ? La réponse affirmative, trouvée par MORLEY en 1962, reposait sur un résultat plus fort : " T étant λ-catégorique ($\lambda \geq \omega_1$), tout modèle de T non dénombrable est saturé " ; elle utilisait l'analogue de la dérivation des espaces topologiques et du théorème de CANTOR-BENDIXON pour certains espaces de types.

Notre exposé s'attachera plus particulièrement à placer ce théorème dans le cadre des théories ω-stables. A cet effet, nous utiliserons sans démonstration préalable, outre les résultats du cours de B. POIZAT sur les théories stables, les notions basiques de skolémisation, la totale indiscernabilité des suites d'indiscernables dans une théorie stable, le théorème des 2 cardinaux de Vaught et l'existence de modèles premiers dans les théories ω-stables.

Notations. - $|X|$ = cardinal de X, $\mathcal{L}$ est le langage dans lequel T est définie, $M < N$ désigne la restriction élémentaire M de N, $RM(p)$ est le rang de Morley de p, $C(p)$ son "rang de Cantor" et $t_A(x)$ le type de x au-dessus de A. Si M est un modèle de T, et $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, une formule, on note $\Phi(M) = \{m \in M ; M \models \varphi(m, \bar{a})\}$. Il est rappelé qu'une paire de Vaught est la donnée de M, N modèles de T et $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, $M \underset{\neq}{<} N$, avec $\Phi(M) = \Phi(N)$ et $|\Phi(M)| \geq \omega$. $t(\bar{a})$ désigne un terme construit sur $\bar{a}$.

THÉORÈME de Morley. - T catégorique en $\lambda \geq \omega_1$ si, et seulement si, T catégorique en tout cardinal non dénombrable.

1re étape : Elle n'utilise nullement l'hypothèse de catégoricité.

THÉORÈME d'Ehrenfeucht. - Soit T ayant un modèle infini et λ un cardinal $\geq \omega_1$; il existe M, modèle de T, de cardinal λ tel que, si $A \subset M$, $|A| = \omega$, M ne réalise pas plus de ω types de $S_1(A)$.

Soit $(I, \geq)$ ensemble ordonné de cardinal λ. Soit T^* une skolémisée de T. On prend N^* un modèle de T^* possédant une suite d'indiscernables $(a_i)_{i \in I}$, et

(*) Sébastien EHRSAM, C. E. S. de Wintzenheim, 68000 COLMAR

soit M^* le skolémisé dans $\mathcal{L}^*$, skolémisé de $\mathcal{L}$, des $(a_i)_{i\in I}$ noté $h(\{a_i\}_{i\in I})$: M est un modèle de T. Soit $A \subseteq M$ dénombrable. Tout élément de A est formé à partir d'un nombre fini de a_i, et donc $A \subset h(\{a_i\}_{i\in J})$, J dénombrable.

Alors, le type de a_i sur A <u>ne dépend que de la manière dont</u> i <u>est placé par rapport à</u> J : Si a_{i_0} et $a_{i'_0}$ sont tels que, pour tout $j \in J$, $i_0 \leq j$ si, et seulement si, $i'_0 \leq j$, alors, si $M \vdash \varphi(a_{i_0}, b_1, \dots, b_n)$, avec $b_i \in M$, $M^* \vdash \varphi(a_{i_0}, t_1(\overrightarrow{a_{i_1}}), t_n(\overrightarrow{a_{i_n}}))$, avec $\vec{i_1}, \dots, \vec{i_n}$ extraits de J, et donc, par indiscernabilité, $M^* \vdash \varphi(a_{i'_0}, t_1(\overrightarrow{a_{i_1}}), \dots, t_n(\overrightarrow{a_{i_n}}))$, soit $M \vdash \varphi(a_{i'_0}, b_1, \dots, b_n)$.

De même, si $x \in M$ est de la forme $t(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, $(i_j)_{1\leq j\leq n} \in J^n$, son type au-dessus de A, $t_A(x)$, <u>ne dépend que de</u> t <u>et de la façon dont se place</u> $(i_1, \dots, i_n)$ <u>par rapport à</u> J (même argument).

Il suffit donc de trouver I ordonné, avec $|I| = \lambda$, tel que, pour toute partie J dénombrable de I, et pour tout entier n, la relation $\cong (n, J)$, exprimant que 2 suites croissantes indexées par n sont placées de la même façon par rapport à J, <u>n'a qu'un nombre dénombrable de classes</u>.

On considère λ comme ensemble, i. e. comme <u>ordinal</u> ; le résultat se montre par récurrence sur n :

<u>Pour</u> $n = 1$: Soit $J \subset \lambda$ quelconque ; si $i \in \lambda$, alors $\inf(j\ ;\ j \in J\ ;\ i < j)$ est dans J et détermine la classe de i.

<u>Le passage de</u> n <u>à</u> $n+1$ se fait en remarquant que la classe de $(i_1, \dots, i_{n+1})$ est déterminée par la classe de i_{n+1} modulo $\cong (1, J' = J \cup \{i_1, \dots, i_n\})$ et la classe de $(i_1, \dots, i_n)$ modulo $\cong (n, J)$. Cela ne donne qu'un nombre dénombrable de classes modulo $\cong (n+1, J)$.

<u>2e étape</u> : <u>Si</u> T <u>est</u> λ-<u>catégorique</u>, $\lambda \geq \omega_1$, T <u>est</u> ω-<u>stable</u>.

Si T est non ω-stable, il existe A, ensemble dénombrable de paramètres, produisant ω_1 types qu'on réalise dans un modèle M contenant A de cardinal λ ; M ne peut pas être isomorphe au modèle construit dans le théorème d'Ehrenfencht, et donc T n'est pas λ-catégorique.

<u>3e étape</u> : <u>Si</u> T <u>est</u> λ-<u>catégorique</u>, $\lambda \geq \omega_1$, T <u>est sans paire de Vaught</u>.

Par l'absurde, d'après le théorème des 2 cardinaux de Vaught, T étant ω-stable, si T admettrait une paire de Vaught, T admettrait $\langle K, \lambda\rangle$, i. e. il existerait un modèle M et une formule $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, avec $\omega \leq K < \lambda$, et $|\Phi(M)| = K$ et $|M| = \lambda$. Or M n'est pas saturé.

L'ensemble des formules $\{\varphi(x, \bar{a})$, $x \neq \xi$, pour tout ξ dans $\Phi(M)\}$ se laisse prolonger en un <u>type</u> sur $\Phi(M)$, non réalisé dans M. Or, T étant ω-stable, donc λ-stable, il existe un modèle N saturé de cardinal λ (théorème de HARNIK). M et N étant non isomorphes, on obtient une contradiction.

4e étape : Etude préliminaire sur les formules minimales.

Définitions. - Une formule minimale est une formule $\varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in A^n$, admettant une infinité de réalisations et telle que, pour toute extension B de A, tout $\bar{b} \in B^k$, et toute formule $\psi(x, \bar{y})$, $\psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ ou $\neg \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ n'a qu'un nombre fini de réalisations.

D'autre part, si $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A^n$, est une formule minimale, on définit sur tout B, ensemble de paramètres contenant A, le type moyen π de φ sur B par les formules $\psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ ayant une infinité de réalisationn. On vérifie aisément sa consistance et sa complétion. On remarque qu'il ne peut avoir sur C contenant B, deux fils distincts non-algébriques.

La proposition suivante donne le lien entre formules minimales et type de RM égal à 1.

PROPOSITION.

1° Si $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A^n$, est minimale, le type moyen π de φ sur $B \supseteq A$ est de RM égal à 1, et $\varphi(x, \bar{a})$ l'isole des types de RM $\geqslant 1$ dans $S_1(B)$.

2° Soit $p \in S_1(M)$, M étant un modèle de T, avec $RM(p) = 1$. Si $\varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in M^n$, isole p des types de RM $\geqslant 1$, $\varphi(x, \bar{a})$ est minimale.

1° π a une infinité de réalisations : Si G, modèle de T, contient toutes les réalisations de π, $S_1(G)$ contient une infinité de fils de π distincts, qui s'accumulent en un point au moins : $RM(\pi) \geqslant 1$. $\varphi(x, \bar{a})$ isole π des types de RM $\geqslant 1$ dans $S_1(B)$. En effet, sinon, il existe une formule $\psi(x, \bar{b})$ telle que $\pi \vdash \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ et $\pi' \vdash \neg \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$, avec π et π' de RM $\geqslant 1$; cela signifie que π' est non algébrique et que $\neg \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ admet donc une infinité de réalisation, ce qui contredit la minimalité de $\varphi(x, \bar{a})$. Si $RM(\pi) \geqslant 2$, π aurait sur M, modèle contenant B, un fils q, point d'accumulation de types de RM $\geqslant 1$ (i. e. $RM(q) \geqslant 2$) ; q n'est pas le type moyen de φ sur M car sinon il serait isolé par $\varphi(x, \bar{a})$ dans $S_1(M)$ parmi les types de RM $\geqslant 1$; donc $q \vdash \psi(x, \bar{m}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$, qui n'admet qu'un nombre fini de réalisations, soit $RM(q) = 0$. Contradiction : $RM(\pi) = 1$.

2° Si $\varphi(x, \bar{a})$ n'est pas minimale, il existe N, extension élémentaire de M, et $\psi(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in N^k$, tels que $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \psi(x, \bar{b})$ et $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg \psi(x, \bar{b})$ ont une infinité de réalisations, dont une infinité existe alors dans N. Soit $(x_i)_{i \in \omega}$ et $(y_i)_{i \in \omega}$ des éléments de N vérifiant respectivement $\varphi(x,\bar{a}) \wedge \psi(x,\bar{b})$ et $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg \psi(x, \bar{b})$. Les types $t_N(x_i)$ et $t_N(y_i)$ s'accumulent en deux points $t_N(x^*)$ et $t_N(y^*)$. On a $RM(t_N(x^*)) \geqslant 1$ et $RM(t_N(y^*)) \geqslant 1$, ce qui entraîne, x^* et y^* vérifiant tous deux $\varphi(x, \bar{a})$, et leurs types sur M étant de RM $\geqslant 1$, $t_M(x^*) = t_M(y^*) = p$; d'où $RM(t_N(x^*)) = RM(t_N(y^*)) = 1$. Donc p a sur N deux fils équirangs avec lui, ce qui contredit la stabilité de p, car p est rangé par RM.

THÉORÈME. – T <u>est</u> <u>ω-stable et sans paire de Vaught si, et seulement si,</u> T <u>est catégorique en tout</u> $\lambda \geq \omega_1$.

<u>1re partie</u> : On suppose $\varphi(x)$ minimale sans paramètre. Soit M , modèle de cardinal $\lambda \geq \omega_1$, et $\Phi(M)$ l'ensemble associé à $\varphi(x)$ et M ; la ω-stabilité nous assure de l'existence de P , modèle premier sur $\Phi(M)$, avec donc $P < M$. Comme il n'y a pas de paire de Vaught, $P = M$. Donc M <u>est premier sur</u> $\Phi(M)$ et même <u>minimal</u> sur $\Phi(M)$, ce qui entraîne que $|\Phi(M)| = \lambda$. On construit dans $\Phi(M)$ une suite de la manière suivante : Le type moyen de φ sur $\emptyset$ est réalisé dans M en a_0 , a_1 réalise dans M le type moyen de φ sur $\{a_0\}$, ... , $a_{\alpha+1}$ réalise dans M le type moyen de φ sur $\{a_0 , \dots , a_\alpha\} = A_\alpha$. On poursuit cette construction aussi longtemps que l'on peut réaliser le type moyen de φ sur A_α <u>dans</u> M . Dès que cela s'avère impossible, on s'arrête.

$A = \{a_\rho\}_{\rho\in\mu}$ étant la suite ainsi trouvée, $\Phi(M)$ <u>est exactement l'ensemble des éléments de la clôture algébrique</u> A^* <u>de</u> A <u>satisfaisant</u> $\varphi(x)$. En effet, si $\xi \in \Phi(M)$, ξ ne réalise pas le type moyen de φ sur A ; il existe donc $\psi(x , \bar{a})$, $\bar{a} \in A^n$, satisfaite par ξ , et algébrique ; par conséquent, $t_A(\xi)$ est algébrique. De plus, $|A| = \lambda$, car $|A| < \lambda$ impliquerait $|\Phi(M)| \leq |A^*| < \lambda$, ce qui contredit le fait que M et $\Phi(M)$ ont même cardinal λ .

La suite $A = (a_i)_{i\in I}$ est <u>indiscernable sur</u> $\emptyset$. Montrons le par récurrence sur n:

a_0 et a_i , pour tout $i \in I$, réalisant tous deux le type moyen de φ sur Φ , ont même type sur $\emptyset$.

Supposons que, pour tous indices $k_0 < \dots < k_n$, les suites $\{a_0 , \dots , a_n\}$ et $\{a_{k_0} , \dots , a_{k_n}\}$ ont même type sur $\emptyset$. a_{n+1} réalise le type moyen de φ sur $A_n = \{a_0 , \dots , a_n\}$, et $a_{k_{n+1}}$ réalise le type moyen de φ sur $A_{k_{n+1}-1}$, et donc aussi le type moyen de φ sur $\{a_{k_0} , \dots , a_{k_n}\}$; a_{n+1} et $a_{k_{n+1}}$ ont alors même type sur $\{a_0 , \dots , a_n\}$ et $\{a_{k_0} , \dots , a_{k_n}\}$, d'où le résultat à l'ordre $(n + 2)$.

On sait que, dans une théorie ω-stable, toute suite d'indiscernables est totalement indiscernable. A est donc <u>totalement indiscernable sur</u> $\emptyset$. Soient M_1 et M_2 deux modèles de T de cardinal λ . Alors, dans $\Phi(M_1)$ et $\Phi(M_2)$, on construit A_1 et A_2 , suites d'indiscernables totaux de cardinal λ , qui sont donc isomorphes, les clôtures algébriques suivant $\varphi(x)$ le sont aussi et, par conséquent, M_1 et M_2 modèles premiers et minimaux sur $\Phi(M_1)$ et $\Phi(M_2)$ le sont aussi. Ceci achève le raisonnement dans le cas où φ est minimale sans paramètre.

<u>2e partie</u> : Pour pouvoir refaire le précédent raisonnement avec une formule minimale $\varphi(x , \bar{a})$ à paramètres en partant du type moyen de $\varphi(x , \bar{a})$ sur $\{\bar{a}\}$, il est nécessaire et suffisant de pouvoir reproduire dans tout modèle de T un n-uple $\bar{a}^*$ de même type sur $\emptyset$ que $\bar{a}$; pour ce faire, le type de $\bar{a}$ sur $\emptyset$ doit être <u>isolé</u>.

Si nous considérons un type p sur M_0, modèle atomique ou premier sur $\emptyset$, de RM égal à 1, toute formule $\varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in M_0^n$, qui isole p parmi les types de $RM \geq 1$, sera <u>minimale</u> d'après la proposition précédente, et le type de $\bar{a}$ sur $\emptyset$ sera <u>isolé</u>. L'existence de ce type découle de deux assertions :

LEMME 1. – <u>Si T n'admet pas de paire de Vaught, et si $\varphi(x, \bar{y}, \bar{a})$, $\bar{a} \in A^n$, a une infinité de réalisations en x pour des valeurs de $\bar{y}$, on peut trouver un entier K ne dépendant que de la formule et exprimer cette infinité de x par</u> :

$$\exists x_1, \ldots, \exists x_K \ (\textstyle\bigwedge_i \varphi(x_i, \bar{y}, \bar{a})) \wedge (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) .$$

Par l'absurde, supposons que $(n_s)_{s \in \omega}$ soit une suite strictement croissante d'entiers telle que, pour tout $s \in \omega$, il y a $\bar{y}_s$ et n_s éléments x qui satisfont $\varphi(x, \bar{y}_s, \bar{a})$ et pas $n_s + 1$. On regroupe ces éléments dans un modèle M contenant A. Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur ω, et $\vec{y}^* = \prod_s \bar{y}_s / \mathcal{U} \in M^{\mathcal{U}}$. Alors $\varphi(x, \vec{y}^*, \bar{a})$ est non algébrique, car on peut construire à partir des x_s et de $\mathcal{U}$ une infinité de réalisations de $\varphi(x, \vec{y}^*, a)$ dans M, et, si N est une extension élémentaire propre de M, cette formule détermine une paire de Vaught sur $M^{\mathcal{U}}$ et $N^{\mathcal{U}}$.

LEMME 2. – <u>Soient T sans paire de Vaught et M un modèle de T ; si $p \in S_1(M)$ est de "rang de Cantor" $C(p)$ égal à 1, alors $RM(p) = 1$</u>.

On rappelle que, pour tout type p, $RM(p) \geq C(p)$. Soit $\varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in M^n$, qui isole p parmi les types non isolés ($C(p) = 1$). Alors, <u>dans toute extension élémentaire N de M, l'ouvert-fermé $\langle \varphi(x, \bar{a}) \rangle_N$ de $S_1(N)$ ne contient qu'un seul type non isolé</u>.

Supposons, par l'absurde, que, dans $S_1(N)$, il y ait deux types non isolés vérifiant $\varphi(x, \bar{a})$: il existe $\bar{b} \in N^k$, et $\psi(x, \bar{y})$ tels que $\psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ et $\neg \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ ont une infinité de réalisations. D'après le lemme 1, il existe 2 entiers K et K' tels que cela s'écrive : il existe Kx tels que $\vdash \varphi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$, et il existe $K'x$ tels que $\vdash \neg \psi(x, \bar{b}) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ (on peut prendre le même entier pour les deux cas, que je note K''). On a donc

$$N \vdash (\exists y) \, [[(\exists K'' x) \ (\psi(x,\bar{y}) \wedge \varphi(x,\bar{a}))] \wedge [(\exists K'' x) \ (\neg \psi(x,\bar{y}) \wedge \varphi(x,\bar{a}))] .$$

Il existe donc, dans M^k, $\bar{b}'$ tel que $\psi(x, \bar{b}') \wedge \varphi(x, \bar{a})$ et $\neg \varphi(x, \bar{b}') \wedge \varphi(x, \bar{a})$ aient une infinité de réalisations. Cela signifierait de manière évidente que $\langle \varphi(x, \bar{a}) \rangle_M$ contiendrait deux types non isolés, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $RM(p) \geq 2$, p aurait dans une extension élémentaire N de M, un fils p, point d'accumulation de types de $RM \geq 1$. Dans $\langle \varphi(x, \bar{a}) \rangle_N$, il existe p' et p'' de $RM \geq 1$, ce qui signifie que dans P, extension élémentaire de N, p' et p'' ont des fils q' et q'' points d'accumulation de types, donc non isolés et qui appartiennent à $\langle \varphi(x, \bar{a}) \rangle_P$, contradiction.

On a donc $1 = C(p) \leq RM(p) < 2$.

On conclut en prenant M_0 , modèle premier sur $\emptyset$, qui est dénombrable. $S_1(M_0)$ est dénombrable par ω-stabilité. L'ensemble E des points d'accumulation de $S_1(M_0)$ est un compact fini ou dénombrable.

D'après le théorème de Baire, il n'existe pas de compact parfait (i. e. sans point isolé) dénombrable : E admet un point isolé $p \in S_1(M_0)$ qui est donc tel que $C(p) = 1$, et donc $RM(p) = 1$, d'après le lemme 2.