GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

ELIZABETH BOUSCAREN
ZOÉ CHATZIDAKIS

Modèles premiers et atomiques. Théorème des deux cardinaux dans les théories totalement transcendantes

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. nº 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A2_0>

MODÈLES PREMIERS ET ATOMIQUES
THÉORÈME DES DEUX CARDINAUX DANS LES THÉORIES TOTALEMENT TRANSCENDANTES

par Elizabeth BOUSCAREN et Zoé CHATZIDAKIS (*)

1. Soit A un ensemble de paramètres. A est un modèle de $T(A)$ si, et seulement si, les types de $S_1(A)$ réalisés dans A sont denses dans $S_1(A)$.

En effet, un ouvert $\langle f(x, \bar{a})\rangle$ est non vide si, et seulement si,

$$T(A) \vdash \exists x \ f(x, \bar{a}) ;$$

d'après le test de Tarski, A est un modèle de $T(A)$ si, et seulement si, il existe $b \in A$ tel que $A \models f(b, a)$.

2. Définition. - Soient A, B deux ensembles de paramètres, $A \subset B$; B est atomique sur A si tous les n-types de $S_n(A)$, réalisés dans B, sont isolés dans $S_n(A)$.

3. Quelques propriétés.

(a) Soient A, B, C ensembles de paramètres tels que $A \subset B \subset C$; Si C est atomique sur B, et B est atomique sur A, alors C est atomique sur A.

Soient $c_1 \dots c_n \in C^n$, on veut montrer que le type de $c_1 \dots c_n$ sur A est isolé.

C est atomique sur B, donc $t(c_1 \dots c_n)$ sur B est isolé par une formule $f(x_1 \dots x_n, b_1 \dots b_m)$, $b_1 \dots b_m \in B$; B est atomique sur A, donc $t(b_1 \dots b_m)$ sur A est isolé par une formule $g(x_1 \dots x_m, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$.

On vérifie facilement que $t(c_1 \dots c_n)$ sur A est isolé par la formule suivante

$$\exists y_1 \dots y_m, \ f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) \wedge g(y_1 \dots y_m, \bar{a}) .$$

(b) Soient A, B, C ensembles de paramètres tels que $A \subset B \subset C$, et $B - A$ est fini ; si C est atomique sur A, alors C est atomique sur B.

On peut supposer que $B = A \cup \{b\}$, le cas où $B - A$ a n éléments se faisant par récurrence.

Soient $c_1 \dots c_n \in C$, $t(c_1 \dots c_n, b)$ sur A est, par hypothèse, isolé par une formule $f(x_1 \dots x_n, y, \bar{a})$; la formule $f(x_1 \dots x_n, b, \bar{a})$ isole $t(c_1 \dots c_n)$ sur B.

(*) Elizabeth BOUSCAREN, 53 boulevard Saint-Marcel, 75013 PARIS.
Zoé CHATZIDAKIS, 19 rue Trétaigne, 75018 PARIS.

4. Si T est une théorie totalement transcendante, alors, pour tout ensemble A, les points isolés de $S_1(A)$ sont denses dans $S_1(A)$.

Soit O un ouvert non vide de $S_1(A)$; considérons un type p, $p \in O$ et p de rang de Morley minimal dans O. Si α est le rang de Morley de p, nous savons que p est isolé parmi les types de rang de Morley supérieur ou égal à α, par une formule $f(x, \bar{a})$. D'après l'hypothèse de minimalité faite sur p, tout type appartenant à O est de rang de Morley supérieur ou égal à α ; donc la formule $f(x, \bar{a})$ isole p dans l'ouvert O.

On remarque qu'il n'est pas nécessaire que la théorie T soit totalement transcendante pour avoir cette propriété. Il suffit, par exemple, que T soit "quasi totalement transcendante", c'est-à-dire que les types rangés par le rang de Morley soient denses dans $S(T)$. Dans la suite, nous considèrerons une théorie T ayant la propriété que, pour tout ensemble A, les points isolés de $S_1(A)$ sont denses dans $S_1(A)$. Nous noterons cette hypothèse (H).

5. Modèles construits.

THÉORÈME. - Sous l'hypothèse (H), pour tout ensemble A, il existe un modèle M de $T(A)$, $M \supseteq A$, et une énumération de $M - A$, $(a_\mu)_{\mu<\lambda}$, tels que, si $A_\mu = A \cup \{a_\nu ; \nu < \mu\}$, le type de a_μ sur A_μ est isolé. Nous appellerons construction une telle énumération de M.

On construit la suite suivante par induction :

$A_0 = A$, si λ est un ordinal limite, $A_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} A_\lambda$,

si A_μ est modèle de $T(A_\mu)$, $A_{\mu+1} = A_\mu$,

si A_μ n'est pas modèle de $T(A_\mu)$, d'après l'hypothèse, il existe un type p_μ isolé sur A_μ et non réalisé dans A_μ ; on réalise ce type en a_μ, et on pose $A_{\mu+1} = A_\mu \cup \{a_\mu\}$.

Nous allons voir que cette construction s'arrête ; soit M un modèle de $T(A)$, $M \supseteq A$. On construit par induction une suite d'applications :

f_0 est l'inclusion de A dans M,

si λ est un ordinal limite, $f_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} f_\mu$,

si $A_{\mu+1} = A_\mu$, on pose $f_{\mu+1} = f_\mu$; sinon, $A_{\mu+1} = A_\mu \cup \{a_\mu\}$, le type de a_μ sur A_μ, p_μ étant isolé. On pose $f_{\mu+1} = f_\mu$ sur A_μ, et $f_{\mu+1}(a_\mu) = c$, où $c \in M$, et réalise le type isolé $f_\mu(p_\mu)$.

Pour tout λ, l'application f_λ de A_λ dans M est injective, on a donc un ordinal γ tel que, pour $\mu \geq \gamma$, $f_\mu = f_\gamma$, c'est-à-dire $A_\mu = A_\gamma$, et A_γ est un modèle de $T(A_\gamma)$.

En fait, le modèle M étant quelconque, on peut le prendre de même cardinal que

A . Il existe donc un ordinal $\gamma < |A|^+$ tel que $A_\gamma \models T(A)$.

THÉORÈME (RESSAYRE). - *Deux modèles construits au-dessus de A sont A- isomorphes.*

Soit M un modèle construit au-dessus de A ; pour tout $\lambda < \gamma$, choisissons une formule $f_\lambda(x , \overline{b_\lambda})$, $\overline{b_\lambda} \in A_\lambda$, qui isole le type p_λ de a_λ sur A_λ . On définit par induction l'ensemble fini X_λ , qui est fermé de a_λ et de la réunion des X_{μ_i} , pour $a_{\mu_i} \in \overline{b_\lambda}$.

Soit X un sous-ensemble de M tel que $X = \bigcup X_\lambda$, pour $a_\lambda \in X$. On montre, par récurrence sur $\{\lambda \,;\, a_\lambda \in X\}$, que le type de X sur A est entièrement déterminé par les formules $f_\lambda(x , \overline{b_\lambda})$, où $a_\lambda \in X$. En conséquence, M est atomique sur $A \cup X$; en effet, si $a_{\lambda_1} \ldots a_{\lambda_n} \in M$, on ajoute $X_{\lambda_1} , \ldots , X_{\lambda_n}$ à X , et on voit que le type de $X_{\lambda_1} , \ldots , X_{\lambda_n}$ sur $A \cup X$ est déterminé par un nombre fini de formules ; le type de $a_{\lambda_1} \ldots a_{\lambda_n}$ sur $A \cup X$ est donc bien isolé.

L'unicité se déduit alors par va-et-vient, en prenant, à chaque étape, la clôture par les X_λ .

COROLLAIRE. - *Soit M le modèle construit sur A . Si a et b sont deux n-uples extraits de M qui ont même type sur A , ils se correspondent par un A-automorphisme de M .*

(a) *Le modèle construit sur A est atomique sur A .*

Voir le théorème de construction ; on peut aussi montrer par induction que, pour tout λ , A_λ est atomique sur A .

(b) *Toute énumération du modèle construit sur A n'en est pas forcément une construction.*

6. *Définition.* - Soit A un ensemble de paramètres. Un modèle P de $T(A)$ est dit premier au-dessus de A si, pour tout modèle N de $T(A)$, il existe un plongement élémentaire f de P dans N qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, dashed, "f"] \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & N \end{tikzcd} \quad .$$

7. *Modèles premiers.*

(a) *Le modèle construit sur A est premier au-dessus de A .*

On l'appelle aussi le modèle strictement premier au-dessus de A .

Par construction de la suite d'applications f_λ (voir le § 5), on voit qu'on peut effectivement plonger ce modèle élémentairement dans tout modèle contenant A .

COROLLAIRE. - Soit T une théorie vérifiant l'hypothèse (H), alors, pour tout ensemble de paramètres A, il existe un modèle premier au-dessus de A.

D'après le § 4, cela est vrai pour une théorie totalement transcendante.

Soit T une théorie vérifiant l'hypothèse (H), A un ensemble de paramètres ; si P est un modèle premier au-dessus de A, P est atomique sur A.

En effet, P modèle premier au-dessus de A se plonge élémentairement dans le modèle strictement premier au-dessus de A, qui est atomique sur A.

8. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), si $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\lambda = P$ est une construction de P, alors, pour tout $\bar{a} \in P$, si $A' = A \cup \{\bar{a}\}$, $A'_\mu = A_\mu \cup \{\bar{a}\}$, les A'_μ sont une construction de P au-dessus de A'.

Démonstration. - P est atomique sur chacun des A_μ, donc $A'_{\mu+1}$ est atomique sur A_μ. D'après ce qu'on a vu précédemment, comme $\bar{a} \in A'_{\mu+1}$ et est fini, $A'_{\mu+1}$ est atomique sur $A_\mu \cup \{\bar{a}\} = A'_\mu$.

9. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), si A est dénombrable, il n'y a qu'un seul modèle denombrable atomique au-dessus de A.

Démonstration. - Soient M_1 et M_2 deux modèles dénombrables atomiques au-dessus de A. On en prend une énumération de type ω.

$$M_1 = A \cup \{a_n \, , \ n < \omega\} \, , \quad M_2 = A \cup \{b_n \, , \ n < \omega\} \, .$$

1re étape : $a_1 \in M_1$ réalise un type isolé au-dessus de A, donc réalisable dans M_2 par un a'_1.

2e étape : $b_1 \in M_2$ réalise un type isolé au-dessus de A, donc au-dessus de $A \cup \{a'_1\}$. Ce type est réalisable dans M_1 au-dessus de $A \cup \{a_1\}$ par un b'_1.

Etape $2n+1$: a_{n+1} réalise un type isolé au-dessus de $A \cup \{a_1 , b'_1 , \dots , b'_n\}$ On lui fait correspondre a'_{n+1} réalisant le même type au-dessus de $A \cup \{a'_1 , b_1 , \dots , a'_n , b_n\}$.

Etape $2n$: Même processus.

On a donc construit un isomorphisme f, au-dessus de A, entre M_1 et M_2,

$$f_{|A} = \mathrm{id}_A \, , \quad f(a_1) = a'_1 \, , \quad f(b'_1) = b_1 \, , \ \text{etc.}$$

10. Définition. - P, modèle de $T(A)$, est minimal au-dessus de A s'il n'a pas de sous-structure élémentaire propre au-dessus de A.

11. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H), si P est minimal au-dessus de A, P est l'unique modèle premier au-dessus de A, car un modèle premier au-dessus de A se plonge élémentairement dans tout modèle contenant A.

12. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H),

(1) P minimal sur $A \longleftrightarrow$ pour tout B, $A \subset B \subset P$, P est atomique sur B ;

(2) P minimal sur $A \longleftrightarrow$ toute énumération de P en est une construction ;

(3) P minimal sur $A \longleftarrow$ il n'y a qu'un seul modèle atomique au-dessus de A.

Démonstration.

($1 \longrightarrow$) Soit B, $A \subset B \subset P$. Soit P' le modèle premier au-dessus de B, alors $P' \prec P$ et $P' = P$, et donc P est atomique au-dessus de B, puisque P' l'est.

($1 \longleftarrow$) $A \subset P' \prec P$, par hypothèse, P est atomique sur P'. $a \in P$ réalise sur P' un type isolé p. p est réalisé dans P', car $P' \models T$ et $p \vdash x = a'$, pour un $a' \in P'$. Donc $P = P'$.

(2) L'équivalence (2) est évidemment équivalente à l'équivalence (1) dont c'est une reformulation.

($3 \longleftarrow$) Soit P premier au-dessus de A. Si P n'est pas minimal au-dessus de A, il existe P_0 tel que $A \subset P_0 \prec P_1 = P$.

P étant atomique au-dessus de A, P_0 l'est aussi et, par hypothèse, $P_0 \simeq P_1$.

On peut alors trouver $P_2 \prec P_1$, et $P_1 \cong P_2$. On construit ainsi une chaîne élémentaire strictement croissante de modèles atomiques au-dessus de A, donc isomorphes.

Pour η limite, $P_\eta = \bigcup_{\alpha<\eta} P_\alpha$, les P_α étant atomiques au-dessus de A, tout n-uple de P_η se trouve dans un P_α, et donc réalise un type isolé au-dessus de A.

$P_{\eta+1}$ tel que $P_\eta \cong P_{\eta+1}$, et $P_\eta \prec P_{\eta+1}$. $P_{\eta+1}$ étant isomorphe au-dessus de A à P_η, il est aussi atomique au-dessus de A.

On continue jusqu'à $\eta = |A|^+$.

P_η est atomique au-dessus de A et pourtant ne peut être isomorphe à P_1, car $|P_\eta| > |P_1|$.

13. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H), si P est minimal au-dessus de A, et si deux suites, de longueur quelconque extraites de P, réalisent le même type au-dessus de A, il existe un A-automorphisme de P qui les échange.

Démonstration. - Soient $(a_i)_{i<|A|}$, $(b_i)_{i<|A|}$ les deux suites extraites de P. Il existe un A-isomorphisme de $A' = A \cup \{a_i \,;\, i < |A|\}$ sur $B' = A \cup \{b_i \,;\, i < |A|\}$.

P est minimal au-dessus de A', donc c'est le modèle premier au-dessus de A'. De même, P est le modèle premier au-dessus de B'. A' et B' étant A-isomorphes, il existe un A-isomorphisme de $P_{(A')}$ sur $P_{(B')}$ qui envoie A' sur B'.

14. Cas particulier de modèle minimal : Lorsque c'est la clôture algébrique ; ce sera le cas si les types de $S_1(A)$ de $RM = 0$ (i. e. algébriques) sont denses dans $S_1(A)$, pour tout A.

15. LEMME. - T totalement transcendente, M atomique sur A, $p \in S_1(M)$. p est réalisable dans N, $N \succ M$, et N atomique sur A si, et seulement si, pour tout $\bar{b} \in M$, $p_{|A \cup \{\bar{b}\}}$ est isolé dans $S_1(A \cup \{\bar{b}\})$.

Démonstration.

($\longrightarrow$) Soit x réalisant p dans N. N est atomique sur A, donc il est atomique sur $A \cup \{\bar{b}\}$, pour tout $\bar{b} \in M$. Ceci implique que $t(x, A \cup \{\bar{b}\}) = p_{|A \cup \{\bar{b}\}}$ est isolé dans $S_1(A \cup \{\bar{b}\})$.

($\longleftarrow$) Soit x réalisant p, soit N le modèle premier construit au-dessus de $M \cup \{x\}$.

N est premier au-dessus de $M \cup \{x\}$, donc N est atomique au-dessus de $M \cup \{x\}$. On va montrer que $M \cup \{x\}$ est atomique au-dessus de A.

Soit $\bar{b} \in M$. $t(\bar{b} ; A)$ est isolé par une formule $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$, car M est atomique sur A. $t(x ; A \cup \{\bar{b}\})$ est isolé, par hypothèse, par une formule $\psi(z, \bar{b}, \bar{a}')$. Alors $t(x ; \bar{b} ; A)$ est isolé par la formule $\psi(z, \bar{y}, \bar{a}') \wedge \varphi(\bar{y}, \bar{a})$. Donc N est atomique sur A.

16. THÉORÈME. - T totalement transcendente, M atomique sur A, $p \in S_1(M)$; p réalisable dans P, $P \succ M$ et P atomique sur A.
Alors, si $N \succ M$, et N atomique sur A, l'héritier de p sur N a la même propriété, c'est-à-dire est réalisable dans une extension élémentaire de N qui est atomique sur A.

Démonstration. - Soit q l'héritier de p sur N. Soit $RM(p) = RM(q) = \alpha$. p est isolé dans $S^{\alpha}(M)$ par une formule $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$. Alors $RM(p_{|A \cup \{\bar{a}\}}) = \alpha$, et p est l'unique fils sur M de $p_{|A \cup \{\bar{a}\}}$ qui soit de rang α.

Soit $\bar{b}' \in N$; le type de $\bar{b}'$ sur $A \cup \{\bar{a}\}$ est isolé, donc réalisable dans M par un $\bar{b}$.

$p_{|A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}}$ est l'unique fils équirang de $p_{|A \cup \{\bar{a}\}}$ sur $A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}$.

$q_{|A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}}$ est l'unique fils équirang de $p_{|A \cup \{\bar{a}\}}$ sur $A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}$.

$p_{|A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}}$ et $q_{|A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}}$ sont donc isomorphes. Le premier est isolé, donc le second aussi.

17. COROLLAIRE. - T totalement transcendente. S'il n'y a pas de modèle minimal au-dessus de A, alors il y a des modèles atomiques sur A, en toute cardinalité $\geq |A|$.

Démonstration. - $A \subset M < N$, M et N atomiques sur A . Soit $p \in S_1(M)$ réalisé dans $N - M$.

On prend l'héritier p_1 de p sur N , à l'étape n : $M = M_0$, $N = M_1$,

$$A \subset M_0 < M_1 < \ldots < M_n ,$$

les M_i étant tous atomiques sur A . On prend l'héritier p_n de p_{n-1} sur M_n , et on le réalise dans M_{n+1} , atomique sur A , et $M_n < M_{n+1}$.

Pour η limite, $M_\eta = \bigcup_{\alpha<\eta} M_\alpha$.

M_η est atomique sur A et $M_\eta > M_0$; on prend p_η l'héritier de p (et donc de tous les p_α , $\alpha < \eta$) sur M_η , et on le réalise dans un $M_{\eta+1}$, atomique sur A , et $M_{\eta+1} > M_\eta$.

18. Définition. - On dit que M , atomique sur A , est " λ-atomiquement saturé" au-dessus de A si, pour tout $B \subset M$, $|B| < \lambda$, M réalise tous les types de $S_1(B)$ réalisables dans des extensions de B atomiques sur A .

19. COROLLAIRE. - T totalement transcendente, s'il n'y a pas de modèle minimal au-dessus de A , alors, pour tout $\lambda \geqslant |A|$, il existe un (unique) modèle " λ-atomiquement saturé" de cardinal λ au-dessus de A .

Démonstration. - Soit M_0 , $|M_0| = \lambda$, M_0 atomique au-dessus de A . On énumère les types appartenant à $S_1(M_0)$ réalisables dans des extensions de M_0 atomiques sur A . Soit p_1 le premier de ceux-ci. On le réalise dans $M_{01} > M_0$, atomique sur A .

Soit p_2 le suivant, on prend son héritier sur M_{01} , et on le réalise dans $M_{02} > M_{01}$, atomique sur A . On continue, et on obtient ainsi $M_1 > M_0$, M_1 atomique sur A et réalisant tous les types de $S_1(M_0)$ réalisables dans des extensions de M_0 atomiques sur A .

Si on fait cette opération λ fois, on obtient le modèle cherché (voir la démonstration de l'existence d'un modèle λ-saturé de cardinalité λ , quand T est λ-stable).

20. Rappelons que, si T est ω_1-catégorique, alors T est ω-stable et λ-catégorique en tout $\lambda \geqslant \omega_1$.

THÉORÈME. - Si T est ω_1-catégorique non ω-catégorique, alors T a un modèle minimal sur tout ensemble fini de paramètres.

Démonstration. - Si T n'a pas de modèle minimal sur $\bar{a}$, T étant λ-stable, pour tout $\lambda \geqslant \omega$, T a un modèle saturé de cardinalité ω_1 , et c'est le seul, à isomorphisme près. Ce modèle M réalise tous les types sur $\bar{a}$, d'autre part il est atomique sur $\bar{a}$, par le corollaire 17. C'est-à-dire que, pour tout n , $S_n(\bar{a})$ n'est composé que de points isolés. $S_n(\bar{a})$ étant un compact, il doit être fini, ce qui implique que T est ω-catégorique.

21. T est ω_1-catégorique.

Alors, pour tout A infini, il y a un modèle premier minimal au-dessus de A.

Démonstration. - Supposons qu'il n'y ait pas de modèle minimal au-dessus de A. Alors, il existe $M \supset A$, $|M| = |A|^+$, et M atomique sur A.

M est donc l'unique modèle de cardinalité $|M|$, et donc il est saturé. Il doit réaliser tous les types sur A ; or tous les types sur A ne peuvent être isolés, car $S_1(A)$ est un compact et contient tous les types réalisés dans A, donc est infini.

22. En résumé, on a donc montré que, si T est totalement transcendante, alors:

1° Il existe un modèle premier sur A, qui est aussi atomique sur A ;

2° S'il existe un modèle minimal au-dessus de A, alors ce modèle est l'unique modèle premier au-dessus de A.

Nous démontrerons plus tard, en utilisant des techniques de stabilité, l'unicité du modèle premier, pour T totalement transcendante.

Théorèmes des deux cardinaux

23. Définition. - T admet $\langle \alpha , \beta \rangle$, pour $\varphi(x)$, si T a un modèle M de cardinalité α tel que $|\Phi_M| = |\{x \in M ; \ M \models \varphi(x)\}| = \beta$.

24. PROPOSITION.

1° T admet $\langle \alpha , \beta \rangle$, alors T admet $\langle \gamma , \beta \rangle$, pour tout γ, $\alpha \geq \gamma \geq \beta$.

2° T admet $\langle \alpha , \beta \rangle$, alors T admet $\langle \gamma , \gamma \rangle$, pour tout $\gamma \geq \omega$.

Démonstration.

1° $M \models T$, $|M| = \alpha$, $|\Phi_M| = \beta$.

D'après LST, il existe $N \prec M$, $N \supset \Phi_M$, et $|N| = \gamma$, et on a $\Phi_N = \Phi_M$.

2° D'après le 1°, T admet $\langle \beta , \beta \rangle$. Soit M ce modèle. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{F\}$, F symbole fonctionnel unaire.

Soit $T' = T \cup \{F$ est une bijection de M sur $\Phi_M\}$.

T' étant consistante (il y a une expansion de M au nouveau langage qui en est un modèle), elle a des modèles en toute cardinalité $\geq \omega$, donc, en particulier, a un modèle N de cardinalité γ. Le réduit de N au petit langage $\mathcal{L}$ est le modèle cherché.

25. Définition. - On dit que M est dénombrable homogène si M est dénombrable et ω-homogène.

Nous énonçons quelques théorèmes sans démonstration (*).

26. THÉORÈME. - Tout modèle dénombrable a une extension élémentaire dénombrable homogène.

27. THÉORÈME.

1° L'union de toute chaîne élémentaire dénombrable de modèles dénombrables homogènes est dénombrable homogène.

2° L'union de toute chaîne élémentaire dénombrable de modèles dénombrables homogènes isomorphes deux à deux est isomorphe à chacun des termes de la suite.

28. PROPOSITION. - Soit M_0 dénombrable, $N_0 < M_0$, alors le modèle (M_0 , N_0) a une extension élémentaire (M , N) telle que M soit dénombrable homogène, $N < M$ et $N \cong M$.

29. THÉORÈME des deux cardinaux de Vaught. - Si T admet $\langle \alpha , \beta \rangle$, avec $\alpha > \beta \geq \omega$, alors T admet $\langle \omega_1 , \omega \rangle$.

LEMME. - Si T admet une paire de Vaught, c'est-à-dire si T a deux modèles M et N tels que $M < N$, $M \neq N$ et $\Phi_M = \Phi_N$, alors T admet $\langle \omega_1 , \omega \rangle$.

Démonstration. - Soit $M \models T$, $|M| = \alpha$, $|\Phi_M| = \beta$. Soit $N \underset{\neq}{<} M$, $|N| = \beta$, $\Phi_N = \Phi_M$. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{N\}$, $T' = \mathrm{Th}(M , N)$. T', étant consistante, aura un modèle dénombrable (M_0 , N_0) tel que M_0 soit dénombrable homogène, $M_0 > N_0$, $M_0 \cong N_0$ et $M_0 \neq N_0$, car $T' \models \exists x \neg N(x)$ et par la proposition 28.

$\Phi_{M_0} = \Phi_{N_0}$ est infini, car T' dit que Φ_M est infini et inclus dans N.

On va construire maintenant une chaîne élémentaire de modèles dénombrables homogènes N_ξ, $\xi < \omega_1$.

À l'étape $\xi + 1$: $N_\xi \cong N_0 < M_0$.

Soit $N_{\xi+1}$ tel que $(N_{\xi+1} , N_\xi) \cong (M_0 , N_0)$. On peut toujours le construire en se plaçant dans un modèle suffisamment saturé. On aura alors $N_\xi \underset{\neq}{<} N_{\xi+1}$ et $N_{\xi+1} \cong M_0 \cong N_0$ et $N_{\xi+1}$ dénombrable homogène.

$$\Phi_{N_{\xi+1}} = \Phi_{N_\xi} = \dots = \Phi_{N_0} .$$

À l'étape $\xi < \omega_1$, ξ limite, nous avons $N_\xi = \bigcup_{\alpha<\xi} N_\alpha$. ξ étant dénombrable, on a bien N_ξ dénombrable homogène, et $N_\xi \cong N_0$. $N_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$ est de cardina-

(*) CHANG (C. C.) and KEISLER (H. I.). - Continuous model theory. - Princeton, Princeton University Press, 1966 (Annals of Mathematics Studies, 58) [cf. p. 130-131].

lité ω_1 , et $|\Phi_{N_{\omega_1}}| = \omega$. En effet, soit $x \in N_{\omega_1}$, et $N_{\omega_1} \models \varphi(x)$. Alors $x \in N_\alpha$, $\alpha < \omega_1$ et $N_\alpha \models \varphi(x)$, car $N_\alpha < N_{\omega_1}$, donc $x \in \Phi_{N_\alpha} = \Phi_{N_0}$, et $|\Phi_{N_0}| = \omega$.

30. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), $M \cup A$, N premier sur $M \cup A$. $x \in N - M$; alors $t(x ; M \cup A)$ ne cohérite pas de sa restriction à M .

Démonstration. - Supposons qu'il cohérite.

$t(x ; M \cup A) \vdash \varphi(x , \bar{m} , \bar{a})$, alors il existe $a' \in M$ tel que $N \vdash \varphi(a' , \bar{m} , \bar{a})$; si $\varphi(x , \bar{m} , \bar{a})$ est la formule qui isole le type de x sur $M \cup A$ (car N atomique sur $M \cup A$), alors a' réalise le même type sur $M \cup A$ que x ; donc $t(x ; M \cup A) \vdash x = a'$.

31. Définition. - $p \in S_1(M)$ ne fait pas augmenter φ si on peut le réaliser dans $N > M$, $\Phi_M = \Phi_N$.

32. LEMME. - T est totalement transcendante, $M \models T$, $p \in S_1(M)$, x réalisant p ; p ne fait pas augmenter Φ_M si, et seulement si, pour tout a' satisfaisant φ , $t(x ; M \cup \{a'\})$ hérite de sa restriction p à M .

Démonstration. - Soit x réalisant p , N modèle premier au-dessus de $M \cup \{x\}$. $q = t(x ; M \cup \{a'\})$.

($\longrightarrow$) $q \vdash \psi(x , a' , \bar{m}) \wedge \varphi(a')$, $q \vdash \exists y\, \psi(x , y , \bar{m}) \wedge \varphi(y)$. $p \vdash \exists y\, \psi(x , y , \bar{m}) \wedge \varphi(y)$. p ne fait pas augmenter φ , donc, pour un $b' \in M$, on a

$$p \vdash \psi(x , b' , \bar{m}) \wedge \varphi(b') .$$

($\longleftarrow$) Soit $a' \in N$. $t(x ; M \cup \{a'\})$ hérite de sa restrcition à M ; si a' satisfait φ , $a' \notin N - M$.

33. PROPOSITION. - T est totalement transcendante, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \sim q$. Si p ne fait pas augmenter φ , q a la même propriété.

Démonstration. - Soit a' satisfaisant φ , et x réalisant q . Soit q' le type de x sur $N \cup \{a'\}$.

Si $q' \vdash \psi(x , a' , \bar{n}) \wedge \varphi(a')$, $q \vdash \exists y\, \psi(x , y , \bar{n}) \wedge \varphi(y)$, donc, car $p \sim q$, $p \vdash \exists y\, \psi(x , y , \bar{m}) \wedge \varphi(y)$, pour $\bar{m} \in M$.

Comme p ne fait pas augmenter φ , il existe $b' \in M$ tel que $p \vdash \psi(x , b' , \bar{m}) \wedge \varphi(b')$, donc, car $q \sim p$, $q \vdash \psi(x , a'' , \bar{m}') \wedge \varphi(a'')$, a'' et m' dans N .

Chaque fragment fini de q' s'interprète dans q , donc q' est extension non déviante de q , c'est donc son héritier.

34. THÉORÈME. - <u>Si</u> T <u>est totalement transcendante et admet</u> $\langle \alpha , \beta \rangle$, $\alpha > \beta \geqslant \omega$, <u>alors</u> T <u>admet</u> $\langle K , \lambda \rangle$, $K \geqslant \lambda \geqslant \omega$.

<u>Démonstration</u>. - Soient $M_0 \underset{\neq}{<} N_0$ tels que $|M_0| = \omega$, $\Phi_{M_0} = \Phi_{N_0}$.

Soit $p \in S_1(M_0)$ le type d'un élément de $N_0 - M_0$; alors p ne fait pas augmenter φ .

Soit $N \succ M_0$, $|N| = |\Phi_N| = \lambda$.

Soit p_1 l'héritier de p sur N ; on le réalise dans $N_1 \underset{\neq}{>} N$, avec $\Phi_{N_1} = \Phi_N$. On prend p_2 l'héritier de p_1 sur N_1 , et on le réalise dans $N_2 \succ N_1$, $\Phi_{N_2} = \Phi_{N_1}$, et on continue. A une étape limite, on prend la réunion, à l'étape $\alpha + 1$, on réalise l'héritier de p sans augmenter φ .

N_K est le modèle cherché.