SÉBASTIEN EHRSAM

Exposé élémentaire de la théorie de la stabilité

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. nº 1, p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A1_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
1re année, 1977/78, n° 1, 30 p.

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE
DE LA THÉORIE DE LA STABILITÉ

par Sébastien EHRSAM (*)

Chapitre 0 : Ultrapuissances. Types. Modèles ω-saturés.

Notations. - On notera Σ une signature (ou type de similarité) qui sera toujours supposée finie ou dénombrable. On notera de la même lettre une Σ-structure et la base de cette structure, sauf indication précise. Le langage associé à Σ, $L(\Sigma)$, est toujours du premier ordre, et les formules du langage sont de complexité finie. On suppose connues les notions d'isomorphisme de structures, de sous-(sur-) structure (élémentaire ou non), de structures élémentairement équivalentes, de modèle, de théorie complète, ainsi que les résultats fondamentaux suivants :

Test de Tarski

Théorème de Löwenheim-Skolem (L. S.)

Théorème de la chaîne d'extensions élémentaires.

N, extension élémentaire de M, s'écrit $M \prec N$, et le cardinal de M est noté $\|M\|$.

1. Ultrapuissances.

1.1. Définition. - Soit Σ une signature, $(M_i)_{i\in I}$ une famille de Σ-structures. Pour tout r d'arité N de Σ, on note $r(M_i)$ la relation N-aire interprétant r dans la structure M_i. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. On définit $R_{\mathcal{U}}$, relation d'équivalence sur $\prod_i M_i$,

$$x \, R_{\mathcal{U}} \, y \Longleftrightarrow \{i \in I \; ; \; x_i = y_i\} \in \mathcal{U} .$$

Alors (théorème et définition), l'ensemble des classes d'équivalence de $R_{\mathcal{U}}$, noté $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, peut être muni d'une Σ-structure définie ainsi : Si r est un symbole N-aire de Σ, on définit son interprétation sur $\prod_i M_i/\mathcal{U}$ par

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\xi} \in r \\ \xi = (\xi_1 , \dots , \xi_N) \\ \text{avec, pour tout } j \text{ dans } [1 , \dots , N] , \\ \xi_j = (x_{j,i})_{i\in I} \end{array}\right] \Longleftrightarrow [\{i \in I \; ; \; (x_{1,i} , \dots , x_{N,i}) \in r(M_i)\} \in \mathcal{U}] .$$

(*) Sébastien EHRSAM, C. E. S. de Wintzenheim, 68000 COLMAR.

$\prod_i M_i/\mathcal{U}$ est l'ultraproduit des M_i par $\mathcal{U}$. Si $M = M_i$, pour tout i, $\prod_i M_i/\mathcal{U}$ est noté $M^{\mathcal{U}}$, c'est l'ultrapuissance de M par $\mathcal{U}$.

Si $P(i)$ est une propriété dépendant de i dans I, "l'ensemble des i dans I, tels que $P(i)$ soit vraie, appartient à l'ultrafiltre $\mathcal{U}$" se dit :

$P(i)$ est vraie pour presque tout i, ou vraie presque partout.

1.2. THÉORÈME de Loš. - Soient $(M_i)_{i\in I}$ des Σ-structures, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Pour $\bar{a}$ dans $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ (avec, pour tout j dans $[1, \ldots, n]$, $a_j = \overline{(a_{j,i})_{i\in I}}$), on note $\bar{a}_i = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})$. Alors, pour toute formule $\varphi(\bar{x})$,

$$\prod_i M_i/\mathcal{U} \vdash \varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow M_i \vdash \varphi(\bar{a}_i) \text{, pour presque tout } i .$$

1.3. Applications.

1° THÉORÈME de compacité. - Une théorie T est consistante si, et seulement si, tout fragment fini de T est consistant.

2° Soit $\mathcal{U}$ une ultrafiltre sur I ; $M^{\mathcal{U}}$ est une extension élémentaire de M, M étant identifié à son plongement diagonal dans $M^{\mathcal{U}}$.

3° Si M est une structure infinie, pour tout cardinal $\lambda \geqslant \|M\|$, M a des extensions élémentaires de cardinal λ.

4° "Test de Vaught" : Soit T une théorie dénombrable. Si T n'a pas de modèle fini, et, pour k, cardinal infini, T a un modèle et un seul, à isomorphisme près de cardinal k (on dit alors que T est k-catégorique), alors T est complète.

Exemple. - On considère la théorie des axiomes de l'ordre dense, total, sans extrémités. Les deux derniers s'expriment ainsi :

$$(\forall x)\ (\forall y)\quad x \leqslant y \longrightarrow (\exists z)\quad x \lneqq z \lneqq y ,$$

$$(\forall x)\ ((\exists y)\quad y > x) \wedge ((\exists z)\quad z < x)$$

On montre que cette théorie, qui est sans modèle fini, est $\aleph$-catégorique (ou ω-catégorique), par va-et-vient (voir ci-après).

En présence d'une théorie complète T, on a les résultats suivants.

THÉORÈME 1. - Si M et N sont élémentairement équivalents (i. e., dans ce cas, modèles de T), M se plonge élémentairement dans (i. e. est isomorphe à une restriction élémentaire de) une ultrapuissance de N.

THÉORÈME 2. - Si M et N sont modèles de T, elles ont une extension élémentaire commune, à isomorphisme près.

Dans la suite, comme une théorie complète ayant un modèle fini, n'a que celui-là, à isomorphisme près, on étudiera les théories complètes sans modèle fini.

2. Espaces de types. (T complète sans modèle fini).

2.1. Types.

Définition 1. - Soient M un modèle de T, A une partie de M, et x_1 et x_2 dans M. On dit que x_1 et x_2 ont même type au-dessus de A si x_1 et x_2 satisfont, dans M, les mêmes formules à paramètres dans A. Ce qui s'écrit :

Pour tout $\bar{a} \in A^n$, et tout φ dans $L(\Sigma)$, $M \models \varphi(x_1 , \bar{a})$ si, et seulement si, $M \models \varphi(x_2 , \bar{a})$.

On le note $t_M^A(x_1) = t_M^A(x_2)$. Si $M \prec N$, on a évidemment $t_M^A(x_1) = t_M^A(x_2)$.

THÉORÈME de Svenonius. - On reprend les hypothèses de la définition 1. x_1 et x_2 ont même type au-dessus de A si, et seulement si, il existe une extension élémentaire N de M possédant un automorphisme σ fixant A point par point, tel que $\sigma(x_1) = x_2$.

Définition 2. - Soient M un modèle de T, A inclus dans M et ξ dans M. Le type de ξ au-dessus de A est l'ensemble de toutes les formules $\varphi(x , \bar{a})$ telles que $M \models \varphi(\xi , \bar{a})$ $(\bar{a} \in A^n)$.

Remarque. - Le type de ξ, $t_M^A(\xi)$, est donc un ensemble de formules $\varphi(x , \bar{a})$ consistant et complet ; x est appelée la variable type.

On pose $\mathcal{L}(A , x) = \mathcal{L}(\Sigma \cup A \cup \{x\})$, et on est amené à la définition générale suivante.

Soit M un modèle de T, et $A \subset M$. Un type au-dessus de A est une théorie complète dans le langage $\mathcal{L}(A , x)$, contenant $T(A)$, qui est "la théorie de A ".

Ce qui s'exprime aussi : Un type p est un ensemble de formules $\varphi(x , \bar{a})$ finiment satisfaisable dans M et complet (la démonstration se fait par compacité).

On notera $S_1(A)$ l'ensemble des types (1-types) au-dessus de A. De même, on définit, et on note, $S_n(A)$, $S_I(A)$, l'ensemble des n-types (i. e. types à n variables $x_1 , \dots , x_n$), des I-types (i. e. types à variables indexées par I) sur A.

Définition 3. - p dans $S_1(A)$ est réalisé si, et seulement si, $p \models (x = a)$, où a est dans A. Si $M \prec N$, p est réalisé dans N s'il existe a dans N de type p ; sinon, on dit que p est omis dans N.

2.2. Espaces de types.

$S_1(A)$ est muni de la topologie dont une base d'ouverts est, pour toute formule $\varphi(x , \bar{a})$ dans $\mathcal{L}(A , x)$,

$$\langle\varphi(x , \bar{a})\rangle = \{p \in S_1(A) \ ; \ p \models \varphi(x , \bar{a})\} .$$

PROPOSITION 1.

1° $S_1(A)$ est compact, totalement discontinu.

2° Les ouverts-fermés de $S_1(A)$ sont exactement les $\langle\varphi(x , \bar{a})\rangle$.

PROPOSITION 2.

1° Un type réalisé est isolé dans $S_1(A)$ par $\langle(x = a)\rangle$, où $a \in A$.

2° Dans $S_1(M)$, où M est un modèle, les seuls types isolés sont les réalisés.

3° A est un modèle si, et seulement si, tous les types réalisés forment un sous-ensemble dense de $S_1(A)$.

Définition 4. - Un type est algébrique s'il n'a qu'un nombre fini de réalisations possibles distinctes.

On montre facilement que, si un type est non algébrique, il a autant de réalisations que l'on veut, et que tout type algébrique est isolé.

PROPOSITION 3. - Soient $A \subset B \subset M$, modèle de T . On considère l'application-restriction f définie par

$$\begin{aligned} S_1(B) &\longrightarrow S_1(A) \\ q &\longmapsto q/A = f(q) \end{aligned} .$$

f est continue surjective.

Par définition, q/A est père de q qui est alors son fils, ou une extension de q/A . q , fils de p , se note $p \subset q$.

3. Modèles ω-saturés.

Définition 1. - M , modèle de T , est ω-saturé si, et seulement si, pour toute partie finie A de M , tout type $S_1(A)$ est réalisé dans M .

On démontre par un procédé de récurrence ordinale, que toute structure M a une extension élémentaire N ω-saturée, avec $\|N\| \leqslant \sup(2^{\omega} , \|M\|)$.

Définition 2. - Soient M et N deux structures de même signature. Un isomorphisme local de M vers N est une bijection d'une restriction finie de M dans une restriction finie de N qui conserve les formules atomiques.

Définition 3. - $\mathcal{K}$ est une famille karpienne d'isomorphimes locaux de M vers N si, et seulement si,

$\mathcal{K}$ est non vide ;

Pour tout σ de $\mathcal{K}$, et pour tout a dans M , il existe τ de $\mathcal{K}$ prolongeant σ et défini sur a (Va) ;

Pour tout σ de $\mathcal{K}$, et pour tout b dans N , il existe τ de $\mathcal{K}$ prolongeant σ et tel que b soit dans l'image de τ (Vient).

S'il existe un famille karpienne de M vers N , on dit que M et N sont

∞-*équivalents* ou $L_{\infty,\omega}$-*équivalents.*

PROPOSITION.

(a) *Si* M *et* N *sont* ∞-*équivalents, ils sont élémentairement équivalents.*

(b) *Deux structures* ω-*saturées et élémentairement équivalentes sont* ∞-*équivalentes.*

Cette technique de *va-et-vient* permet souvent de démontrer qu'une théorie est complète.

Définition 4. - T admet *l'élimination des quanteurs* si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(\bar{x})$, il existe $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs telle que

$$T \vdash \forall \bar{x} \ (\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x})) \ .$$

Pour prouver que T admet l'élimination des quanteurs, on montre le lemme suivant.

LEMME. - T *admet l'élimination des quanteurs si tout type de* $S_n(\emptyset)$, *pour tout* n , *s'axiomatise au moyen d'énoncés sans quanteurs.*

Alors, tout type de $S_1(A)$ admet l'élimination des quanteurs, et T est *modèle-complète*, i. e. $M \subset N$, modèles de $T \longrightarrow M \prec N$.

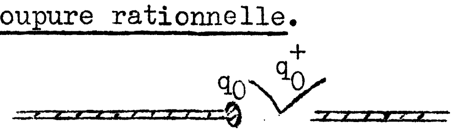
Exemple : *Ordre dense sans extrémités.* - On démontre facilement que, si M , N sont modèles de T , et $\bar{a} = (a_1 , \dots , a_n)$ et $\bar{b} = (b_1 , \dots , b_n)$ en supposant $\bar{a}$ et $\bar{b}$ rangés dans l'ordre croissant (i. e. $\bar{a}$ et $\bar{b}$ vérifient les mêmes relations sans quanteurs), $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient infini ; donc T admet l'élimination des quanteurs, et est ω-*catégorique.* Décrivons les types sur le modèle Q :

Type de 1re espèce : p réalisé, $p \vdash (x = q)$ (type isolé).

Type de 2e espèce : Type non réalisé tel qu'il existe q_0 dans Q , avec

$$\{q \ ; \ q \in Q \ \text{ et } \ p \vdash (x \lessdot q)\} = \{q \ ; \ q \in Q \ \text{ et } \ q_0 < q\} \ .$$

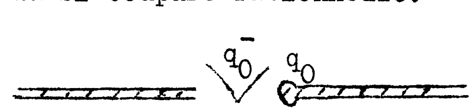
C'est le type q_0^+ dit *coupure rationnelle.*



Type de 3e espèce : Type non réalisé tel qu'il existe q_0 dans Q , avec

$$\{q \ ; \ q \in Q \ \text{ et } \ p \vdash (x \lessdot q)\} = \{q \ ; \ q \in Q \ \text{ et } \ q \geqslant q_0\} \ .$$

C'est le type q_0^- , dit aussi coupure rationnelle.

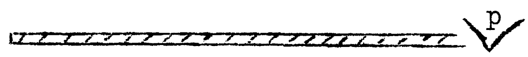


Type de 4e espèce : Type non réalisé, qui n'est pas des deux espèces précedentes, avec : Il existe q et $q' \in Q$, $q < q'$ et $p \vdash (x > q) \wedge (x < q')$.

C'est le type dit irrationnel.

Type de 5e espèce : Il est défini par $p \vdash x > q$, pour tout q dans Q (type non réalisé).

C'est le type dit $+\infty$.



Type de 6e espèce : Il est défini par $p \vdash (x < q)$, pour tout $q \in Q$ (type non réalisé).

C'est le type $-\infty$.

Si on ôte les points isolés dans $S_1(Q)$, c'est-à-dire Q lui-même, on obtient un compact parfait, l'ensemble de Cantor.

Le but principal de notre étude est de chercher des façons privilégiées d'étendre un type $p \in S_1(M)$ en un type sur N , extension élémentaire de M .

Chapitre I : Héritiers

Dans ce chapitre, on traitera seulement de types au-dessus de modèles.

1. Ultrapuissances de types.

THÉORÈME et définition. - Soient M un modèle de T , $p \in S_1(M)$. I un ensemble, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de parties de I .

P est l'ensemble des formules définies sur M de la manière naturelle suivante : Si $\bar{a} \in (M^{\mathcal{U}})^n$, $\bar{a} = (\ldots , \bar{a}_i , \ldots)$, les $\bar{a}_i$ étant des n-uples de M , p contient $\varphi(x , \bar{a})$ si et seulement si, pour presque tout i , $p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i)$. Cette définition est indépendante de la suite des $\bar{a}_i$ définissant $\bar{a}$. p est un type sur M appelé ultrapuissance du type p par $\mathcal{U}$.

p est complet : Soit $\varphi(x , \bar{a})$ une formule,

$$O = \{ i \in I ; \ p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i)\} , \quad N = \{i \in I , \ p \vdash \neg \varphi(x , \bar{a}_i)\} ,$$

alors O ou N est dans $\mathcal{U}$ (i. e. p décide de $\varphi(x , \bar{a})$).

p est consistant : Si α réalise p dans N , extension élémentaire de M , $\alpha^* = \overline{(\ldots, \alpha, \ldots)}$ réalise $p^{\mathcal{U}}$ dans $N^{\mathcal{U}}$, extension élémentaire de $M^{\mathcal{U}}$.

Remarque. - On définit aussi un ultraproduit de types $(\prod_i p_i/\mathcal{U})$, type complet consistant sur le modèle $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, à partir des types $(p_i)_{i\in I}$ sur les M_i , et

$\mathcal{U}$ ultrafiltre sur I .

LEMME. - M étant plongé diagonalement dans $M^{\mathcal{U}}$, $p^{\mathcal{U}}$ est fils de p .

C'est évident.

Remarque. - Il est possible d'avoir $M^{\mathcal{U}} = M^{\mathcal{E}}$, avec $p^{\mathcal{U}} \neq p^{\mathcal{E}}$.

2. Héritiers.

Définition 1. - M , N modèles de T , $M \prec N$, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. q est héritier de p si q se laisse étendre en une ultrapuissance de p . Il existe $\mathcal{U}$ ultrafiltre et un plongement élémentaire de $N \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$ prolongeant le plongement diagonal canonique de $M \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$, tels que $q = p^{\mathcal{U}}$.

Définition 2. - Mêmes hypothèses. q est héritier de p si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$, $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors il existe $\bar{b}' \in M^k$ tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

Les deux définitions de héritier sont équivalentes.

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N \prec M^{\mathcal{U}}$ et $p \subset q \subset p^{\mathcal{U}}$. Soit $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$ telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$. Donc $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, avec $\bar{a} = (\ldots , \bar{a}_i , \ldots)$, $\bar{b} = (\ldots , \bar{b}_i , \ldots)$. Pour presque tout i , $p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$. $\bar{a}_i$ est identifié à $\bar{a}$, par le plongement canonique, et pour un i tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}_i)$, on pose $\bar{b}' = \bar{b}_i$.

Déf. 2 $\longrightarrow$ Déf. 1 : $I = \{$applications d'une partie finie de N dans M valant l'identité sur les éléments de $M\}$. Pour toute formule $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$, telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, on considère

$$I_{\varphi(x,\bar{a},\bar{b})} = \{i \in I \ ; \ i \text{ définie en } \bar{a} \text{ et } \bar{b} \text{ et } p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b})\} .$$

Ces parties ne sont jamais vides, par hypothèse, et cet ensemble de parties est clos par intersection finie. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant cette base de filtre, et σ définie par

$$\sigma : N \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$$
$$b \longmapsto \overline{(\ldots , ib , \ldots)} \text{ si } i \text{ définie en } b \text{ , n'importe quoi, sinon.}$$

$I_{b=b} = \{i \ ; \ i \text{ définie en } b\} \in \mathcal{U}$. Donc l'image $\sigma(b)$ est dans $M^{\mathcal{U}}$.

σ est injective car si $b \neq b'$, $I_{b \neq b'}$ est dans $\mathcal{U}$, et prolonge trivialement le plongement diagonal de M dans $M^{\mathcal{U}}$.

σ est élémentaire : si $N \vdash \varphi(\bar{b})$, alors

$$I_{\varphi(\bar{b})} = \{i \in I \ ; \ i \text{ définie en } \bar{b} \text{ et } M \vdash \varphi(i\bar{b})\}$$

entraîne, par définition et grâce au théorème de Loš, que $M \vdash \varphi(\sigma\bar{b})$.

p est fils de q : si $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b})$, pour presque tout i , d'où

$$p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b}) = \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}) .$$

On remarque immédiatement que $p^{\mathcal{U}}$ est héritier de $p^{\mathcal{U}}$ et que, si q hérite de p sur N, avec $M < K < N$, la restriction r de q à K est héritier de p.

PROPOSITION 1. - Soient M et N modèles de T tels que $M < N$, $p \in S_1(M)$. Π un ensemble de formules à paramètres dans N, $\{\varphi(x,\bar{a},\bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in (N - M)^k\}$, clos par conjonction finie, contenant la théorie de N (où les éléments de N sont nommés) et tel que

$$\varphi(x , \bar{a} , \bar{b}) \in \Pi \longrightarrow \text{il existe } \bar{b}' \text{ dans } M^k \text{ tel que } p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}') .$$

Alors il existe dans $S_1(N)$ un héritier q de p qui satisfait tous les énoncés de Π.

Démonstration analogue à Déf. 2 $\longrightarrow$ Déf. 1 (cf. ci-dessus).

COROLLAIRE 1. - $M < N < P$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, et q héritier de p sur N. Alors il existe sur P un fils r de q héritier de p.

On considère q comme type incomplet sur P (i. e. le fermé non vide de) $S_1(P) = \{$ens. des conjonctions finies de formules de $q \cup T(P)\}$, qui satisfait les hypothèses de la proposition.

COROLLAIRE 2. - M, N modèles de T ($M < N$), $p \in S_1(M)$. Il existe dans $S_1(N)$ un héritier de p.

M et N sont élémentairement équivalents, donc il existe $\mathcal{U}$ tel que N se plonge dans M. Alors $q = p^{\mathcal{U}}/N$ est héritier de p, ou bien on fait $M = N$ et $q = p$ dans le corollaire 1.

PROPOSITION 2. - $M < N < P$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $r \in S_1(P)$ et $p \subset q \subset r$.

1° Si r est héritier de p, q est héritier de p.

2° Si q hérite de p et r hérite de q, alors r est héritier de p.

1° Déjà vu.

2° Evident par transitivité : Soit $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in P^m$ telle que $r \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$ ($\bar{b}' \in N^m$), et donc $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}'')$ avec $\bar{b}''$ dans M^m.

Il est très important de remarquer que si r hérite de p, il n'hérite pas nécessairement de q (contre-exemple plus loin).

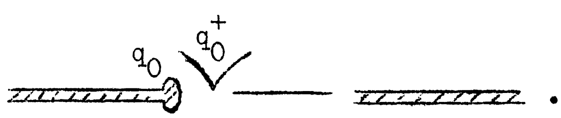
PROPOSITION 3. - Soit $p \in S_1(M)$. Il existe une restriction élémentaire dénombrable N de M telle que p hérite de p/N.

Pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ telle que, pour un certain $\bar{b}$ dans M^n, $p \vdash \varphi(x , \bar{b})$, on choisit un tel n-uple $\bar{b}$. On obtient un ensemble A_1, qui est dénombrable. On recommence avec les formules $\varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{y})$, où $\bar{a}$ est extrait de A_1 ; on obtient A_2 dénombrable contenant A_1 . Ainsi, par récurrence sur n , on construit une suite croissante d'ensembles dénombrables, dont la réunion N est donc dénombrable et incluse dans M . Or, N est restriction élémentaire de M , car le test de Tarski est vérifié. De plus, si $p \vdash \varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{b})$, $\bar{a} \in N^k$, $\bar{b} \in M^p$, alors $\bar{a} \in A_n$, et $\varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{y})$ est telle que $p \vdash \varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{b})$. On prend alors $\bar{b}'$ dans A_{n+1} , et donc $p \vdash \varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{b}')$, soit $p/N \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b}')$.

3. Exemple : Ordre dense sans extrémités ($M < N$, modèles de T).

Type de 1re espèce : p est réalisé. Il n'admet qu'un seul fils, son unique héritier.

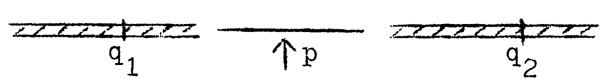
Type de 2e espèce : Coupure rationnelle du type $p = q_0^+$:



Si q est un héritier de p sur N , $q \vdash x \geqslant b > q_0$ $(b \in N)$ entraînerait $p \vdash x \geqslant b' > q_0$, avec $b' \in M$, ce qui est impossible. Donc q vérifie $(q_0 < x < b)$, pour tout $b > q_0$ dans N . C'est le type q_0^+ dans $S_1(N)$ qui est l'unique héritier de p .

Type de 3e espèce : Raisonnement analogue.

Type de 4e espèce : Type irrationnel.



LEMME. - Tout fils non réalisé de p est héritier de p .

Si $q \vdash \varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$ et est non réalisé, la formule n'est pas une égalité, et donc elle est équivalente à une formule du type

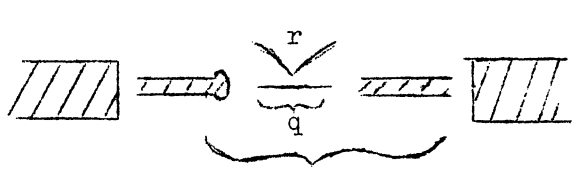
$$d_n < d_{n-1} < \ldots < d_1 < c_1 < \ldots < c_k < x < b_1 < \ldots < b_1 < a_1 < \ldots < a_p ,$$

avec a_i , $d_i \in M$ et b_i , $c_i \in N - M$, pour tout i . On peut remplacer les b_i , c_i par des a_i' , d_i' de M tels que

$$d_n < \ldots < d_1 < d_1' < \ldots < d_k' < x < a_1' < \ldots < a_1' < a_1 < \ldots < a_p .$$

Ce qui signifie que l'on a $p \vdash \varphi(x\ ,\ \bar{a}\ ,\ \bar{a}')$, pour un certain j-uple $\bar{a}'$ extrait de M .

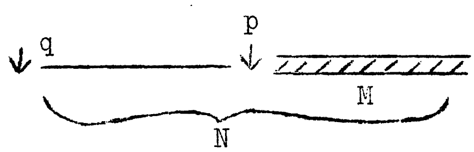
Ceci fournit un contre-exemple pour $M < N < P$, avec $p \subset q \subset r$. r hérite de p sans hériter de q .



(: M ($\cup M$) : N (— $\cup N$) : P) .

<u>Type de 5e et 6e espèces</u> : Pour $p = -\infty$, par exemple.

Si q hérite de p sur N , alors $q \not\vdash x \geqslant b$, pour b dans N , sinon $p \vdash x \geqslant a$, pour a dans M . Impossible, donc ce type a un seul héritier, le type $-\infty$ de $S_1(N)$. Même chose pour $p = +\infty$.



<u>Remarque</u> 1. - On peut faire de la même manière la théorie pour les n-types et les I-types.

<u>Remarque</u> 2. - $M \prec M'$, modèles de T , et $M \subset A \subset M'$. Soit $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(A)$, fils de p . q est dit héritier de p s'il peut se prolonger en une ultrapuissance de p , le plongement de p dans $M^{\mathcal{U}}$ étendant le plongement diagonal de **A** dans $M^{\mathcal{U}}$.

Chapitre II : Cohéritiers

1. Définitions.

<u>Définition</u> 1. - $M \prec N$, modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. Soit X une réalisation quelconque de q dans une extension de N . q est <u>cohéritier</u> de p si le type de N sur $M \cup \{X\}$ est héritier de sa restriction à M .

<u>Définition</u> 2. - Mêmes hypothèses. q est cohéritier de sa restriction p à M si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{b})$, $\bar{b} \in N^k$, telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$, il existe a dans M tel que $N \vdash \varphi(a , \bar{b})$. Ceci signifie que q est fils de p, et adhère dans $S_1(N)$ aux types réalisés par les éléments de M .

La première définition ne dépend pas du choix de X réalisation de p , et les deux définitions sont <u>équivalentes</u>.

En abrégé, dire que le type Π de N sur $M \cup \{X\}$ hérite de sa restriction à M , c'est dire que chaque fois que $\Pi \vdash \psi(\bar{a} , \bar{b} , X)$, avec $\bar{a} \in N^k$, $\bar{b} \in M^n$, il existe x' dans M tel $N \vdash \psi(\bar{a} , \bar{b} , x')$.

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> $M \prec N$ <u>deux modèles de</u> T , $p \in S_1(M)$. Π , <u>ensemble de formules à paramètres dans</u> N , <u>clos par conjonction finie, contenant les formules de</u> p <u>et tel que, si</u> $\varphi(x , \bar{b})$ <u>est dans</u> Π , <u>il existe</u> a <u>dans</u> M <u>tel que</u> $N \vdash \varphi(a , \bar{b})$.

<u>Alors</u> Π <u>se laisse prolonger en un cohéritier de</u> p .

$S_1(N)$ est compact. On note $\bar{M}$, les types de $S_1(N)$ réalisés dans M . Si $\varphi_1(x , \bar{b}_1)$, $\varphi_k(x , \bar{b}_k)$ sont dans Π , alors

$$\bar{M} \cap \langle \varphi_1(x , \bar{b}_1) \rangle \cap \ldots \cap \langle \varphi_k(x , \bar{b}_k) \rangle \neq \emptyset .$$

En effet, Π étant clos, par conjonction,

$$\varphi_1(x , \bar{b}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_k(x , \bar{b}_k) = \varphi(x , \bar{b}) \in \Pi ,$$

et donc il existe a dans M tel que $N \vdash \varphi(a , \bar{b})$. Ce qui signifie que $t_N^N(a)$, type réalisé, appartient à $\langle\varphi(x , \bar{b})\rangle$.

$\bar{M}$ est compact, toute sous-famille finie de $\{\langle\varphi(x , \bar{b})\rangle , \varphi(x , \bar{b}) \in \Pi\}$ a une intersection non vide avec $\bar{M}$ (ce sont tous des compacts) et donc

$$\bar{M} \cap (\bigcap_{\varphi\in\Pi} \langle\varphi(x , \bar{b})\rangle) \neq \emptyset .$$

COROLLAIRE 1. - $M < N < P$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. Si q est cohéritier de p, il existe un fils de q sur P qui est cohéritier de p.

q est un ensemble de formules de $S_1(P)$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 1.

COROLLAIRE 2. $M < N$, modèles de T, $p \in S_1(M)$. p a au moins un cohéritier sur N.

On utilise le corollaire 1 avec p cohéritier de p, et $M = M$ et $P = N$.

On montre trivialement que, dans les hypothèses du corollaire 1, avec r fils de q sur P, si q est cohéritier de p, il cohérite de q et q cohérite de p.

Remarques.

(a) $M < N$ modèles de T, $p \in S_1(M)$. L'ensemble des fils de p sur N est un fermé.

Soit F cet ensemble. $q \in F \longleftrightarrow (p \vdash \varphi(x , \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{a}))$.
Donc

$$F = \bigcap_{p\vdash \varphi(x,\bar{a})} \langle\varphi(x , \bar{a})\rangle(S_1(N))$$

est un fermé.

(b) Mêmes hypothèses. Les types sur N, qui cohéritent de leur restriction à M, forment un fermé.

Ces cohéritiers sur N forment exactement l'adhérence de M dans $S_1(N)$ (i. e. un fermé).

(c) $M < N$ modèles de T, $p \in S_1(M)$. L'ensemble des fils de p dans $S_1(N)$ qui héritent de p forment un fermé.

F étant le fermé des fils de p, l'ensemble des héritiers de p s'écrit à l'aide de conditions sur les formules

$$F \cap \bigcap \langle\neg \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})\rangle ,$$

pour toutes les formules $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $(\bar{b} \in N^k)$ telles qu'il n'existe pas $\bar{b}'$ dans M^k avec $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

(d) Cependant, l'ensemble des types sur N qui héritent de leur restriction à M ne forment pas un fermé, en général. (cf. ci-après).

PROPOSITION 2. – $M < N$ modèles de T. Le nombre de types de $S_1(N)$ qui cohéritent de leur restriction à M est au plus $2^{2^{\|M\|}}$.

$\bar{M}$ est l'ensemble des types sur N qui cohéritent de leur restriction à M. Or, $\|\bar{M}\| \leq 2^{2^{\|M\|}}$. En effet, si a est dans $\bar{M}$, soit $\Phi(a)$ le filtre découpé par les voisinages de a sur M. On a, bien sûr, $\emptyset \notin \Phi(a)$. Si a et b sont dans $\bar{M}$, $S_1(N)$ étant séparé, il existe des voisinages Va et Vb de a et b tels que $Va \cap Vb = \emptyset$. Donc $a \neq b \longrightarrow \Phi(a) \neq \Phi(b)$. Il n'y a pas plus de cohéritiers que de filtres $\Phi(a)$ (i. e. $2^{2^{\|M\|}}$). Le maximum peut être atteint.

PROPOSITION 3. – $M < N$ modèles de T, σ un automorphisme de N laissant M fixe point par point. Si $q \in S_1(N)$ cohérite de q/M, alors $\sigma q = q$ $(\sigma q = \{\varphi(x , \sigma\bar{b}) \; ; \; q \vdash \varphi(x , \bar{b})\})$.

σ induit une application continue bijective de $S_1(M)$ dans lui-même qui fixe M, donc $\bar{M}$. En effet, si $\varphi(x , \bar{b})$ $(\bar{b} \in N^k)$ est telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$, posons $A_{\varphi(x , \bar{b})} = \{a \in M \; ; \; N \vdash \varphi(a , \bar{b})\}$. Comme $\sigma q \vdash \varphi(x , \sigma\bar{b})$, on a de même $A_{\varphi(x,\sigma\bar{b})}$. $A_{\varphi(x,\bar{b})}$ et $A_{\varphi(x,\sigma\bar{b})}$ sont les mêmes ensembles car

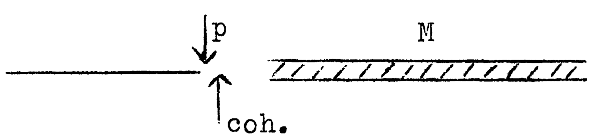
$$N \vdash \varphi(a , \bar{b}) \longleftrightarrow N \vdash \varphi(a , \sigma\bar{b}) ,$$

et donc q et σq découpent sur M le même filtre et sont par conséquent égaux.

2. Exemples et contre-exemples : Ordre dense sans extrémités.

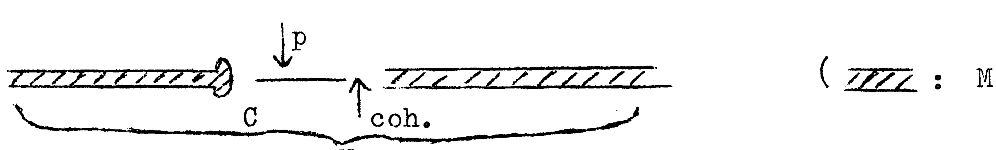
Type de 1re espèce : Il est réalisé, et n'a donc qu'un seul fils, son unique cohéritier.

Type de 5e et 6e espèces : Pour $p = -\infty$,



Si q cohérite de p, $q \vdash x > b$, pour tout $b \in N$, et $b < a$, pour tout $a \in M$. En effet, sinon, il existerait α dans M tel que $\alpha \leq b < a$ (pour tout $a \in M$), ce qui est impossible. Il n'y a qu'un seul cohéritier (défini ci-dessus), et il en est de même pour le type $p = +\infty$.

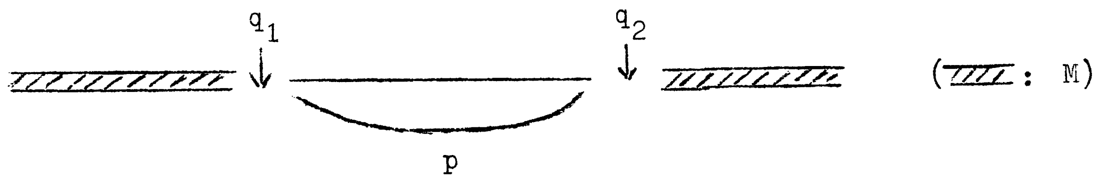
Type de 2e et 3e espèces : Pour $p = q_0^+$,



Si q cohérite de p, $q \vdash x > b$, pour tout $b \in N - M$, avec $b < z$, pour tout $z \in M$ et $z > q$. En effet, sinon, il existerait α dans M, avec

$N \vdash q_0 < \alpha \leqslant b < \alpha$, ce qui est impossible. Il n'y a donc qu'un seul cohéritier (défini ci-dessus), et le résultat est analogue pour $p = q_0^-$.

Type de 4e espèce : Coupure irrationnelle : (les éléments de la coupure appartiennent à N et forment C)



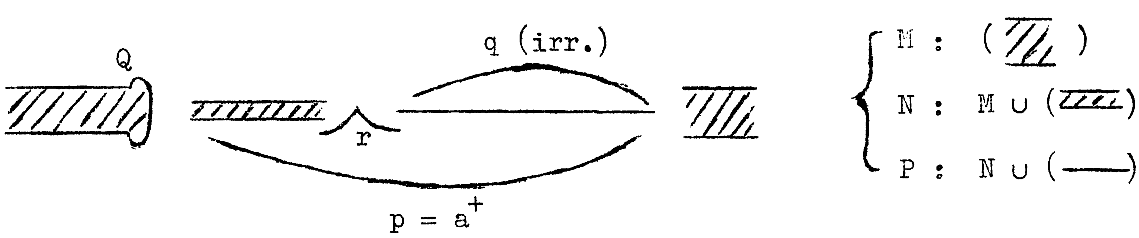
Si q cohérite de p , il ne peut vérifier $q \vdash b \leqslant x \leqslant b'$, pour b et b' dans $(N - M) \cap C$. On montre alors qu'il y a, dans ce cas, deux cohéritiers définis par

$$q_1 \vdash x < b \text{ , pour tout } b \in C \text{ , et } q_2 \vdash x > b \text{ , pour tout } b \in C \text{ .}$$

Conclusion. - Ce dernier cas est le seul où il y a plus d'un héritier ou plus d'un cohéritier. Dans les autres cas, il n'y a qu'un seul héritier et un seul cohéritier, qui coïncident pour le type réalisé.

Contre-exemples.

1° $M \prec N \prec P$, modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $r \in S_1(P)$, $p \subset q \subset r$.
Exemple de non-transitivité du cohéritier :



r n'est pas cohéritier de p .

2° J'exhibe p dans $S_1(M)$, p non cohéritier d'une de ses restrictions dénombrables.

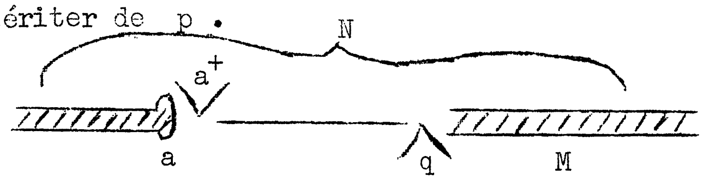
En effet, dans la théorie de l'ordre dense, on considère le modèle M formé de ω_1 copies de Q ; $Q \times \omega_1$:

et dans $S_1(M)$, le type $p = +\infty$.

Si p était cohéritier de l'une de ses restrictions dénombrables, il existerait une suite dénombrable dans $Q \times \omega_1$ qui serait cofinale (i. e. il existerait des ensembles dénombrables cofinaux dans ω_1), ce qui est faux, par définition de ω_1 .

3° Les héritiers de $p \in S_1(M)$ formant un fermé H , l'ensemble K des types de $S_1(N)$ qui héritent de leur restriction à M n'est pas un fermé, en général.

En effet, sinon, l'ensemble K contiendrait M (types des éléments de M au-dessus de N) et serait fermé, donc contiendrait $\bar{M}$ (i. e. les types qui cohéritent de leur restriction à M), ce qui est faux. Si p est le type a^+ , q cohérite de p sans hériter de p .



Chapitre III : Types stables

1. Types définissables (M modèle de T , $p \in S_1(M)$).

Définition 1. - p est dit définissable si, et seulement si, p n'a qu'un seul héritier sur toute extension élémentaire N de M .

Définition 2. - p est dit définissable si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ sans paramètres, il existe une formule $d\varphi(\bar{y})$ à paramètres dans M telle que

$$\text{pour } \bar{a} \text{ dans } M^n , \quad p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \text{ si, et seulement si, } M \vdash d\varphi(\bar{a}) .$$

Scholie. - Cela signifie que, si x^* réalise p , alors, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ ($\bar{y}$ n-uple), en posant $A = \{\bar{a} \in M^n ; \vdash \varphi(x^* , \bar{a})\}$ et

$$B = \{\bar{a} \in M^n ; \vdash \neg \varphi(x^* , \bar{a})\} ,$$

(A , B) forme une partition de M qui est déjà définissable dans M . De plus, si d_1 et d_2 sont deux définitions de p , alors, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$,

$$T(M) \models d_1 \varphi(\bar{y}) \longleftrightarrow d_2 \varphi(\bar{y}) .$$

Equivalence des deux définitions.

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N$, $p \subset q$. Si, pour un $\bar{b}$ dans N^n ,

$$q \vdash \varphi(x , \bar{b}) \wedge \neg d\varphi(\bar{b}) ,$$

alors il n'existe pas de $\bar{b}'$ dans M^n tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{b}') \wedge \neg d\varphi(\bar{b}')$, et donc q n'est pas héritier de p .

Donc, si q est héritier de p , on a $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$ si, et seulement si, $\vdash d\varphi(\bar{b})$. Or, il existe sur N au moins un héritier de p , et donc q , défini par la formule ci-dessus, est l'unique héritier de p . Il est obtenu en utilisant d , la définition de p .

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N$, $p \in S_1(M)$. Pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ sans paramètre, on considère

$$\Psi = \{\psi(\bar{y}) \text{ à paramètre dans } M ; \text{ pour tout } \bar{\beta} \text{ dans } M , \ p \vdash (\psi(\bar{\beta}) \longrightarrow \neg \varphi(x , \bar{\beta}))\} ,$$

$$X = \{\chi(\bar{y}) \text{ à paramètre dans } M ; \text{ pour tout } \bar{\beta} \text{ dans } M , \ p \vdash (\chi(\bar{\beta}) \longrightarrow \varphi(x , \bar{\beta}))\} .$$

Alors tout $\bar{b}$ extrait de N satisfait une formule de Ψ ou de X :

Sinon, soit $\bar{b}$ dans N^n tel que, pour toute formule f telle que $N \models f(\bar{b})$, on a $\bar{b}_1$ dans M, avec $p \models \varphi(x , \bar{b}_1) \wedge f(b_1)$, et $\bar{b}_2$ dans M^n, avec $p \models \neg\varphi(x , \bar{b}_2) \wedge f(\bar{b}_2)$. Cela signifie exactement que les ensembles de formules

$$\Pi = p \cup \{\neg \varphi(x , \bar{b})\} \cup T(N) \quad \text{et} \quad \Pi' = p \cup \{\varphi(x , \bar{b})\} \cup T(N)$$

se laissent prolonger en deux héritiers distincts de p, ce qui est impossible.

De plus, tout $\bar{b}$ extrait de N ne peut satisfaire à la fois une formule de Ψ et une formule de X. Sinon, il existe $\bar{m}$ dans M^n tel que $M \models (\psi \wedge \chi)(\bar{m})$ (Ψ et X vérifiées par $\bar{b}$), et donc $p \models \neg\varphi(x , \bar{m})$ et $p \models \varphi(x , \bar{m})$, ce qui est impossible.

Soit $n = |\bar{y}|$. On recouvre alors $S_n(M)$ par une famille d'ouverts $\Psi \cup X$. On en extrait un recouvrement fini

$$S_n(M) = \langle\psi_1(\bar{y})\rangle \cup \ldots \cup \langle\psi_k(\bar{y})\rangle \cup \langle\chi_1(\bar{y})\rangle \cup \ldots \cup \langle\chi_p(\bar{y})\rangle$$

avec pour tout (i , j), $\langle\psi_i(\bar{y})\rangle \cap \langle\chi_j(\bar{y})\rangle = \emptyset$. Posons $d\varphi(\bar{y}) = \chi_1(\bar{y}) \wedge \ldots \wedge \chi_p(\bar{y})$ ($d\varphi$ est à paramètres dans M). On a immédiatement

$$p \models \varphi(x , \bar{a}) \longleftrightarrow M \models d\varphi(\bar{a}) \quad (\bar{a} \in M^n) .$$

Nota bene. - Si l'héritier est unique, on le nomme parfois le fils aîné.

Exemple : Ordre dense sans extrémités. - Si p est le type $-\infty$, qui est définissable, donnons pour des formules $\varphi(x , \bar{y})$, une définition $d\varphi$

$$d(x < y) = (y = y) \ ; \quad d(x = y) = (y \neq y) \ ; \quad d(x > y) = (y \neq y) .$$

Procédons de même pour le type a^+

$$d(x < y) = (y > a) \ ; \quad d(x = y) = (y \neq y) \ ; \quad d(x > y) = (y \leq a) .$$

LEMME 1. - L'héritier d'un type définissable est définissable.

On a montré dans Déf 2 $\longrightarrow$ Déf 1, que, si p est définissable et q héritier de p sur N, alors $q \models \varphi(x , \bar{b}) \longleftrightarrow N \models d\varphi(\bar{b})$. Ce qui prouve que q est définissable ! Ou encore, q héritier du type définissable p, est définissable car, sinon, il aurait 2 héritiers q_1 et q_2 qui, par transitivité, sont héritiers de p, ce qui est absurde.

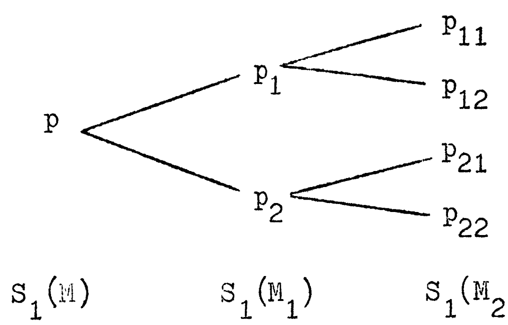
LEMME 2. - Si p a deux héritiers, tout héritier q de p a deux fils distincts qui sont héritiers de p (et non pas nécessairement de q).

$p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. Si p_1 et p_2 sont héritiers distincts de p, et q héritier de p, on a $p \subset q \subset p^{\mathcal{U}}$. D'où $q \subset p^{\mathcal{U}} \subset p_1^{\mathcal{U}}$ et $q \subset p^{\mathcal{U}} \subset p_2^{\mathcal{U}}$, avec $p_1^{\mathcal{U}} \neq p_2^{\mathcal{U}}$, qui héritent de p_1 et p_2. Le résultat découle par transitivité.

Un type non définissable peut avoir un héritier définissable.

PROPOSITION. - $p \in S_1(M)$, non définissable. Soit λ un cardinal supérieur à $\|M\|$. Il existe une extension élémentaire N de M de cardinal λ, tel que dans $S_1(N)$, p a au moins λ^+ héritiers distincts (λ^+ cardinal successeur de λ).

On fait une récurrence ordinale. Il existe une extension élémentaire M_1 de M telle que, dans $S_1(M_1)$, p ait deux héritiers distincts p_1 et p_2 . Chacun d'eux a deux fils distincts héritiers de p , p_1' dans M_1' , p_2' dans M_1'' , extensions élémentaires de M_1 , et on prend leurs héritiers sur une extension élémentaire M_2 de M_1' et M_1'' .



On recommence :

1° Si α est successeur de β , chaque type Π_β de $S_1(M_\beta)$, qui est héritier de p , admet deux fils qui sont héritiers de p ,sur M_{Π_β} . On peut trouver M_α , extension élémentaire commune à tous les M_{Π_β} , pour Π_β héritier de p dans $S_1(M_\beta)$. Si on note $\Pi_\beta(1)$, $\Pi_\beta(2)$, les fils de Π_β sur M_{Π_β} , alors il existe dans $S_1(M_\alpha)$ des fils Π_β^* et Π_β^{**} de $\Pi_\beta(1)$ et $\Pi_\beta(2)$ qui sont héritiers de p. Dans M_α , tout héritier de p sur M_β , déjà construit, a deux fils distincts qui héritent de p .

2° Si α est limite, chacune des branches de l'arbre déjà construit définit l'ensemble des formules d'un type. C'est encore un héritier de p , car l'héritier se définit formule par formule, sur $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.

On poursuit le procédé jusqu'au plus petit cardinal μ tel que $\lambda < 2^\mu$. Or $2^\lambda > \lambda$, donc $\mu \leqslant \lambda$. L'arbre ainsi obtenu a 2^μ branches qui déterminent sur M_μ , 2^μ héritiers de p . Au niveau ν , ν étant successeur, et strictement inférieur à μ , on a 2^ν branches et $2^\nu \leqslant \lambda$. Sur les μ niveaux, il y aura donc au plus $\mu \times \lambda = \lambda$ noeuds. Pour distinguer les types issus d'un noeud, un nombre fini de paramètres suffisent, soit au plus en tout $\omega \times \lambda = \lambda$. On prend, pour N , une restriction de M_μ de cardinal λ contenant les paramètres distinguant les héritiers. Alors, les 2^μ héritiers de p sur M_μ ont une restriction à N qui forme 2^μ héritiers de p distincts, car les paramètres des formules qui les distinguent ont été conservés.

2. Types stables (M modèle de T , toujours complète sans modèle fini).

Définition 1. - $p \in S_1(M)$ est stable si tous ses fils sur un modèle sont définissables.

Exemple 1. - Les types réalisés sont stables, eux-mêmes étant toujours définissables.

Exemple 2. - Tout fils d'un type stable est stable.

LEMME 1. - $M \prec N$ modèles de T , $r \in S_1(M)$, $s \in S_1(N)$. Si s est héritier de r , pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, $s^{\mathcal{U}}$ est héritier de $r^{\mathcal{U}}$.

Si $s^{\mathcal{U}} \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, avec $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i\in I}$ $(\bar{a}_i \in M^n)$, $\bar{b} = (\bar{b}_i)_{i\in I}$ $(\bar{b}_i \in N^k)$, pour presque tout i , $s \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$. Pour tous ces i , il existe $\bar{\beta}_i$ tels que $r \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{\beta}_i)$. On pose $\bar{b}' = (\bar{b}'_i)_{i\in I}$, avec $\bar{b}'_i = \bar{\beta}_i$, si $s \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$, n'importe quoi sinon. On obtient $r^{\mathcal{U}} \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

LEMME 2. - Si q est stable et hérite de p , p est stable. (i. e. Un héritier d'un type instable est instable.)

Soit $p \in S_1(M)$ instable, et soit r un fils non définissable de p , qui a donc deux héritiers r_1 et r_2 sur une extension de M . Si $q \in S_1(N)$ est héritier de p , on peut écrire

$$p \subset q \subset p^{\mathcal{U}} \subset r^{\mathcal{U}} \subset r_i^{\mathcal{U}} \text{ , pour } i = 1 , 2 .$$

q a un fils $r^{\mathcal{U}}$ qui a deux héritiers $r_1^{\mathcal{U}}$ et $r_2^{\mathcal{U}}$ distincts, donc q est instable.

THÉORÈME 1. - Soient $p \in S_1(M)$ et un cardinal $\lambda \geqslant \|M\|$.

(a) Si p est instable, il existe N extension élémentaire de M de cardinal λ , sur laquelle p a au moins λ^+ fils distincts.

(b) Si p est stable, sur toute extension élémentaire N de M de cardinal λ , p n'a pas plus que λ^{ω} fils. ($\lambda^{\|T\|}$, si $\|T\|$ non dénombrable)

Remarque. - Il existe des cardinaux aussi grands que l'on veut tels que $\lambda^{\omega} = \lambda$. Ce sont ceux qui sont de la forme $\lambda = \mu^{\omega}$, car $\lambda^{\omega} = (\mu^{\omega})^{\omega} = \mu^{\omega\times\omega} = \mu^{\omega} = \lambda$.

Démonstration du (a). - Soient $p \in S_1(M)$, q , non définissable, fils de p sur N . Je démontre qu'il existe M_1 et q_1 dans $S_1(M_1)$ tels que $M \prec M_1 \prec N$ avec $\|M\| = \|M_1\|$, et q hérite de q_1 .

En effet, de la même manière que dans la proposition 3 sur les héritiers, on construit A_1 , ensemble contenant M , de même cardinal que M , et tel que, si $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{b}')$, avec $\bar{b}' \in A_1$. On recommence avec les formules à paramètres dans A_1 et on obtient par récurrence $M \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ En posant $M_1 = \bigcup_n A_n$, on a $M \subset M_1 \subset N$. Et M_1 , de cardinal $\|M\|$, est restriction élémentaire de N , car le test de Tarski est vérifié. De plus, q hérite de manière évidente de $q/M_1 = q_1$.

Alors q_1 est non définissable, et on lui applique la proposition du § 1, et donc, si N_1 est extension élémentaire de M_1 de cardinal λ , p a au moins λ^+ fils distincts.

Démonstration du (b). - Soit N une extension élémentaire de M de cardinal λ . On compte les types sur N qui sont stables, donc susceptibles d'être des fils de p . Si $q \in S_1(N)$ est stable, sur un modèle N_1 tel que q hérite de q/N_1 , q/N_1 est stable, et q est donc son unique héritier. Le nombre de types stables sur N n'excède pas celui des types sur une partie dénombrable de N : Il y a λ^ω parties dénombrables de N , et sur chacune au plus 2^ω types, ce qui donne au plus $\lambda^\omega \times 2^\omega = \lambda^\omega$ types stables sur N , donc au plus λ^ω fils de p .

Ou encore : On compte les définitions d possibles pour tous les fils de p . Il y a au plus λ^ω définitions pour les types définissables, donc au plus λ^ω types définissables, soit λ^ω fils de p sur N .

Définition 2. - Une théorie est stable si tous les types sur ses modèles sont stables.

THÉORÈME 2 (T dénombrable).

1° Si T est instable, pour tout cardinal infini λ , il existe un modèle M de cardinal λ tel que $S_1(M)$ contienne au moins λ^+ types.

2° Si T est stable, tout modèle de cardinal λ n'a pas plus de λ^ω types.

Rien à prouver (cf. ci-dessus).

Définition 3. - Une théorie T est stable en λ (cardinal donné) si tout modèle de cardinal λ ne produit pas plus de λ types.

PROPOSITION. - Soit T une théorie dénombrable :

(1) T instable $\longleftrightarrow$ T instable en tout cardinal λ infini.

(2) T stable $\longleftrightarrow$ T stable en un cardinal infini.

(3) T stable $\longleftrightarrow$ T stable en tous les cardinaux de la forme λ^ω .

(1 $\longleftarrow$). - On l'applique pour $\lambda = \mu^\omega$. T ne peut être stable.

(2 $\longrightarrow$). - T stable en tous les cardinaux tels que $\lambda^\omega = \lambda$.

THÉORÈME 3. - Soient $p \in S_1(M)$ stable, $M \prec N$ modèles de T , et λ un cardinal. Il existe une extension élémentaire P de N , telle que tout fils de p , sauf son héritier, ait au moins λ conjugués distincts par M-automorphismes de P.

1re étape : "Lemme de bon placement des modèles".

LEMME. - $M \prec N$, $M \prec P$ modèles de T , $p \in S_1(M)$ et p_1 héritier de p sur N . Il est possible de déplacer N par M-automorphisme de manière à ce que tout fils q de p sur P ait un héritier qui passe par p_1.

Il existe N' isomorphe à N tel que $M < N'$ et p_1' isomorphe à p_1 dans $S_1(N')$, avec $M < N' < M^{\mathcal{U}}$ et $p \subset p_1' \subset p^{\mathcal{U}}$. On identifie p_1 et p_1'. Alors, si q est fils de p sur P, on a : $q^{\mathcal{U}} \in S_1(P^{\mathcal{U}})$ est fils de $p^{\mathcal{U}} \in S_1(M^{\mathcal{U}})$, donc fils de p_1, et, par définition, $q^{\mathcal{U}}$ est héritier de q.

2e étape : Lemme.

LEMME. - $M < N$ modèles de T, $p \in S_1(M)$ et λ cardinal. Il existe un modèle P_1, avec $M < N < P_1$, tel que tout fils non héritier de p sur P_1, mais qui hérite de sa restriction à N, ait au moins λ conjugués par M-automorphisme de P_1.

On construit par récurrence transfinie une suite $(Q_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, chaines d'extensions élémentaires de N : $Q_0 = N$. Supposons avoir construit Q_β, pour tout $\beta < \alpha$:

1° Si α est limite, on prend $Q_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$, qui est une extension élémentaire de N.

2° Si α est successeur de β, on place un exemplaire N_β de N de façon à ce que la restriction à N_β de l'héritier de n'importe quel fils q de p sur Q_β soit l'héritier p. On prend alors Q_α modèle contenant Q_β et N_β élémentairement.

On poursuit l'induction jusqu'à λ, et on plonge Q_λ dans un modèle P_1, qui est suffisament homogène pour qu'il existe, pour tout α, un M-automorphisme de P_1, σ_α, conjuguant N et N_α. Alors P_1 convient.

Soit q fils non héritier de p sur P_1, et héritier de sa restriction à N ; q/N n'est donc pas héritier de p. Si $\alpha < \beta$, alors $\sigma_\alpha q \neq \sigma_\beta q$. En effet :

1° q hérite de q/N, donc $\sigma_\alpha q$ hérite de $\sigma_\alpha(q/N) = \sigma_\alpha q/N_\alpha$;

2° $\sigma_\alpha q/N_\beta$ est l'héritier p_1 de p. $\sigma_\alpha q/N_\alpha$ est fils de p, et $\sigma_\alpha q$ est son héritier. Donc $\sigma_\alpha q/N_\beta$ est p_1 par construction ;

3° q/N n'étant pas l'héritier de p, $\sigma_\beta q/N_\beta$ n'est pas l'héritier de $\sigma_\beta p = p$ et est différent de p_1. $\sigma_\alpha q$ et $\sigma_\beta q$ n'ayant pas même restriction à N_β, sont donc distincts.

Remarque. - On a seulement utilisé le fait que q était stable.

3e étape. - On poursuit ce qui précède. $M < N = P_0 < P_1$; il existe P_2, extension élémentaire de P_1, tel que tout fils de p sur P_2, non héritier, mais qui hérite de sa restriction à P_1, ait λ conjugués par M-automorphismes de P_2, P_2 possédant des automorphismes prolongeant ceux introduits au niveau de P_1. La récurrence se poursuit :

1° Si α est limite, je pose $P_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$.

2° Si $\alpha = \beta + 1$, P_α est tel que tout fils q de p sur P_α, non héritier de p, mais de sa restriction à P_β, ait λ conjugués distincts par M-automorphismes de P_α prolongeant ceux introduits au niveau β .

Le modèle P , construit à l'étape ω_1 , convient : Soit q un fils non héritier de p . Il existe R , restriction dénombrable de P telle que q hérite de q/R . Alors R est inclus dans un P_K , et comme q/R est stable, q hérite de q/P_K et donc q/P_{K+1} a λ conjugués distincts par M-automorphismes de P_{K+1} , qui se prolongent en M-automorphismes de P .

Remarque. - On a, en réalité, démontré un théorème plus fort, celui obtenu en remplaçant, dans l'énoncé du théorème 3, " p stable" par " p quelconque", "tout fils de p " par "tout fils stable de p ", et "sauf son héritier" par "non héritier de p ".

COROLLAIRE. - $p \in S_1(M)$ stable. p n'a sur un modèle qu'un seul **cohéritier**, son héritier.

Par l'absurde, si q est cohéritier de p et non héritier de p sur $N > M$, il existe une extension élémentaire P de N , telle que tout fils non héritier de p a 2 conjugués par M-automorphismes de P , ce qui est impossible, car un cohéritier ne peut être déplacé par M-automorphismes.

On déduit aussi que, si p est stable et cohérite de q , q est stable. (i. e. un cohéritier d'un type instable est instable.)

En effet, p hérite de q : sinon, il aurait un fils r sur P cohéritier de q et non héritier de q , déplacé par M-automorphismes de P , ce qui est impossible.

THÉORÈME 4. - Soient T une théorie stable, $M < N$ des modèles de T . L'application h de $S_1(M)$ dans $S_1(N)$, qui à p associe son héritier, est l'unique section continue de la restriction ρ de $S_1(N)$ dans $S_1(M)$.

$S_1(M) \xrightarrow{\rho} S_1(N)$, $p \xrightarrow{h} h(p)$. On a trivialement $\rho \circ h = Id(S_1(M))$; $h(p)$, cohéritier de p , adhère aux types sur N réalisés dans M , et réciproquement, tout élément de $\overline{M}$ cohérite de sa restriction à M . On a donc : h induit une bijection $\tilde{h}$ de $S_1(M)$ sur $\overline{M}$. $\tilde{h}^{-1}$, égale à $\rho/\overline{M}$ est continue de $\overline{M}$ dans $S_1(M)$, bijective, et donc h est continue.

Soit h' une autre section continue de ρ : $h'(S_1(M))$ contient M , car l'image d'un type réalisé est nécessairement son unique fils sur N . Comme h' est continue , $h'(S_1(M))$ est compact, donc fermé dans $S_1(N)$ et contient $\overline{M}$. De plus,

$$h'(S_1(M)) = h'(\overline{M}) \subset \overline{h'(M)} = \overline{M} .$$

D'où $h'(S_1(M)) = \overline{M}$; or, $h'(p)$ cohérite de sa restriction à M , donc h' associé à p son cohéritier, ce qui prouve l'unicité.

Chapitre IV : Suites de Morley

(T est une théorie stable)

1. Suites d'insécables.

Définition 1. - Soit M un modèle de T ; une suite $s = (a_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de M est insécable si, pour toute formule $\varphi(x, \bar{y})$ et tous paramètres $\bar{b}$ dans N^k, extension élémentaire de M, l'ensemble des a_n qui satisfont $\varphi(x, \bar{b})$ est fini ou cofini.

THÉORÈME et définition 2. - Soit s une suite insécable dans M, et A un ensemble de paramètres. Pour tout $\bar{b}$ dans A^m, on considère les formules $\varphi(x, \bar{b})$ satisfaites par une infinité d'éléments de s. Ceci définit un type, appelé type moyen ou type limite de la suite s sur A, noté $p(s/A)$.

$\varphi_i(x, \bar{b}_i)$, pour $i = 1, \dots, n$, est satisfaite par tous les a_i sauf un nombre fini, et donc la conjonction des φ_i aussi. De plus, si $\varphi(x, \bar{b})$ n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments de s, $p(s/A) \not\vdash \varphi(x, \bar{b})$, et $\neg\varphi(x,\bar{b})$ est vraie pour les autres a_i en nombre infini, et donc $p(s/A) \vdash \neg\varphi(x, \bar{b})$.

THÉORÈME 1. - Si $p \in S_1(M)$, alors p est limite d'une suite s (i. e. une ω-suite) de types réalisés dans M, une telle suite est nécessairement insécable, et l'héritier de p sur N est le type limite de cette suite sur N.

Si p est limite des $(a_n)_{n\in\omega}$ insécable dans $S_1(M)$, soit $h(p)$ son héritier sur N. Pour toute formule $\varphi(x, \bar{a})$ ($\bar{a} \in M^m$) telle que $p \in \langle\varphi(x, \bar{a})\rangle$, $M \vdash \varphi(a_n, \bar{a})$ pour une infinité de a_n et donc $p(s/N) \vdash \varphi(x, \bar{a})$. $p(s/N)$, fils de p, est son cohéritier sur N, car $p(s/N) \vdash \varphi(x, \bar{b})$ ($\bar{b} \in N^k$) implique $N \vdash \varphi(a_n, \bar{b})$, pour un n. Il est aussi son héritier, donc $h(p) = p(s/N)$.

Soit p limite d'une suite insécable $s = (a_n)_{n\in\omega}$, $\bar{b} \in N^k$. S'il existe une infinité de a_n satisfaisant $\varphi(x, \bar{b})$, alors p a sur N un cohéritier q tel que $q \vdash \varphi(x, \bar{b})$.

On considère $p \cup \{\varphi(x, \bar{b})\} \cup T(N)$. Les fragments finis de ce type incomplet tels que $\psi(x, \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{b})$, avec $p \vdash \psi(x, \bar{a})$, sont satisfaits, car $\psi(x, \bar{a})$ et $\varphi(x, \bar{b})$ sont satisfaits par des suites infinies des a_n, dont l'une cofinie. Ce type incomplet se prolonge donc en un cohéritier de p. Vu l'hypothèse de stabilité, s est insécable, car si deux infinités de a_n satisfont l'une $\varphi(x, \bar{b})$, l'autre $\neg\varphi(x, \bar{b})$, p aurait deux cohéritiers distincts dans $S_1(N)$, ce qui est impossible.

Je montre que, si M est dénombrable, $p \in S_1(M)$ est limite de types réalisés dans M. L'élément a_i et son type sur M sont confondus. $S_1(M)$ est à base dénombrable, car le nombre de $\varphi(x, \bar{a})$ ($\bar{a} \in M^k$) est dénombrable, et donc p a une base de voisinages dénombrable : Si $(\varphi_i)_{i\in\omega}$ sont les formules de p, on prend

$V_n = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. On choisit a_i dans V_i , i. e. un point tel que $M \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i)(a_i)$, la suite $(a_n)_{n\in\omega}$ converge vers p .

Si M est non dénombrable, soit M_1 une restriction élémentaire dénombrable de M avec p héritier de p/M_1 , qui est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans $S_1(M_1)$. p est alors le type moyen de la suite $(a_n)_{n\in\omega}$, et donc $p = \lim a_n$ dans $S_1(M)$.

2. Suites de Morley.

Définition 1. - Soit $p \in S_1(M)$. On réalise p en a_1 dans M_1 , puis l'héritier de p sur M_1 en a_2 dans M_2 . Et ainsi, on construit une suite $(a_n)_{n\in\omega}$, où a_{n+1} est la réalisation de l'héritier de p sur M_n . On définit aussi la α-suite de Morley de p (pour α ordinal).

Remarque. - Le type de la ω-suite de Morley $(a_n)_{n\in\omega}$ de p au-dessus de M est indépendant des modèles $M_1 , \dots , M_n$ dans lesquels on réalise les a_n .

Je montre par récurrence sur n que, pour toute formule $\varphi(x_1 , \dots , x_n , \bar{y})$,

$$\models \varphi(a_1 , \dots , a_n , \bar{m}) \longleftrightarrow \models \varphi(a'_1 , \dots , a'_n , \bar{m}) .$$

Pour $n = 1$,

$$\models \varphi(a_1 , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(\bar{m}) \longleftrightarrow \models \varphi(a'_1 , \bar{m}) .$$

Si c'est vrai jusqu'à $n - 1$, on a

$$\models \varphi(a_1 , \dots , a_n , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(a_1 , \dots , a_{n-1} , \bar{m}) ,$$

et par récurrence,

$$d\varphi(a_1 , \dots , a_{n-1} , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(a'_1 , \dots , a'_{n-1} , \bar{m}) \longleftrightarrow \models \varphi(a'_1 , \dots , a'_n , \bar{m}) .$$

LEMME 1. - Soit $p \in S_1(M)$, la ω-suite de Morley de p est insécable.

Si $h(p)$, héritier de p sur $M_\omega = \bigcup_n M_n$, satisfait $\varphi(x , \bar{b})$ ($\bar{b} \in M^k$), alors $\bar{b} \in M^k_{n'}$ et tous les a_m , pour $m > n'$, réalisant l'héritier de p sur $M_{n'}$ satisfont $\varphi(x , \bar{b})$: $h(p) = \lim a_n$. La suite est alors insécable, et l'héritier est le type moyen de la suite de Morley.

Définition 2.

Une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans M est indiscernable dans l'ordre sur M si, et seulement si, pour tous indices $n_1 < \dots < n_m$, et toute formule à paramètres dans M ,

$$\models \varphi(a_{n_1} , \dots , a_{n_m}) \longleftrightarrow \models \varphi(a_1 , \dots , a_m) .$$

Une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans M est totalement indiscernable sur M si, et seulement si, elle l'est dans l'ordre avec des indices $n_1 , \dots , n_m$ quelconques (et non pas croissants) distincts.

LEMME 2. - Soit $p \in S_1(M)$. La ω-suite de Morley de p est totalement indiscernable sur M .

On démontre d'abord l'indiscernabilité dans l'ordre, par récurrence sur m :

Pour $m = 1$, c'est clair, car a_1 et a_{n_1} réalisent p tous deux.

Passage de $(m-1)$ à m : Si $(a_1, \dots, a_{m-1})$ réalisent les mêmes formules au-dessus de M que $(a_{n_1}, \dots, a_{n_{m-1}})$, alors, dans un gros modèle K, on a un M-automorphisme σ de K tel que $\sigma(a_i) = a_{n_i}$, pour tout i. a_m réalise l'héritier de p sur M_{m-1}, et donc sur $M \cup \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$, donc $\sigma(a_m)$ réalise l'héritier de p sur $M \cup \{a_{n_1}, \dots, a_{n_{m-1}}\}$. Or, a_{n_m} aussi, et par unicité, $a_{n_m} = \sigma(a_m)$. On peut aussi utiliser les définitions des types héritiers de p.

Pour la totale indiscernabilité, je prouve que, pour tout n, la suite $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ a même type sur M que $(a_1, \dots, a_{n+1}, a_n)$: Si p_{n-1} hérite de p sur $M \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, alors a_{n+1} réalise l'héritier de p sur $M \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$, donc, par définition du cohéritier, a_n réalise le cohéritier, égal à l'héritier, de sa restriction à $M \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ sur $M \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_{n+1}\}$. Or, cette restriction est p_{n-1} par unicité de l'héritier ; donc a_n réalise l'héritier de p_{n-1} sur $M \cup \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}\}$. Les deux suites ont même type.

PROPOSITION. – Soit $p \in S_1(M)$ et α un ordinal, la α-suite de Morley de p est totalement indiscernable et insécable sur M, et l'héritier de p en est le type moyen.

Comme dans le lemme 2, on montre qu'elle est indiscernable dans l'ordre ; puis, la α-suite commençant par une ω-suite, elle est totalement indiscernable, car la ω-suite l'est, et insécable. Par l'absurde, si $\varphi(x, \bar{b})$ coupe la suite en 2 morceaux infinis, on peut trouver A et B dénombrables tels que, pour tout z dans A, $\vdash \varphi(z, \bar{b})$ et, pour tout w dans B, $\vdash \neg\varphi(w, \bar{b})$. On énumère A et B de la manière suivante :

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, \text{ avec } A = (a_i)_{i\in\omega} \text{ et } B = (b_i)_{i\in\omega}.$$

On obtient ainsi une ω-suite de Morley, de même type que la ω-suite extraite de la α-suite de Morley, mais sécable : c'est impossible par le lemme 1.

Remarques.

1° Si le type p est réalisé par a dans M, la α-suite de Morley répète α fois a.

2° Soit N ω_1-saturé et $p \in S_1(N)$; p cohérite de $\pi = p/M$, avec M dénombrable et sur N, $p = h(\pi)$. On réalise π en a_1 dans N, puis $h(\pi)$ sur $M \cup \{a_1\}$, en a_2, ... La suite insécable qui tend vers p peut donc être prise totalement indiscernable.

3. Modèles saturés.

THÉORÈME (HARNIK, 1975). - Soit T une théorie dénombrable. Si T est stable en λ, alors T possède un modèle λ-saturé de cardinal λ.

(Variante : Si T est stable en $\lambda > \|T\|$, alors T possède un modèle λ-saturé de cardinal λ, et même si $\lambda = \|T\|$.)

(a) Si $\lambda = \omega$ (ou est régulier) : Soit M_0 un modèle dénombrable. On réalise tous les types sur M_0 dans M_1, que l'on peut supposer dénombrable car T est ω-stable. Puis on recommence, et on construit une chaîne $M_1 < M_2 < \dots < M_n \dots$ Posons $M = \bigcup_n M_n$, qui est dénombrable et ω-saturé car, si $p \in S_1(\bar{a})$ ($\bar{a} \in M^k$), alors $\bar{a} \in M_j^k$, et p est réalisé dans M_{j+1}.

(b) $\lambda \geqslant \omega_1$: Soit M_0 un modèle, avec $\|M_0\| = \lambda$. On réalise tous les types sur M_0 dans M_1, avec $\|M_1\| = \lambda$, puis des extensions élémentaires successives M_i par induction jusqu'à $\lambda \times \omega_1$, muni de l'ordre suivant : $(x, y) < (u, v)$ si, et seulement si, ($y < v$ ou ($y = v$ et $x < u$)). Pour γ limite, on prend $M_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} M_\delta$. Pour passer de γ à $\gamma+1$, on réalise tous les types sur M_γ, de cardinal λ, dans un modèle de cardinal λ noté $M_{\gamma+1}$; notons $M = M_{\lambda\times\omega_1}$, qui est bien de cardinal λ. M est λ-saturé : Soit $A \subset M$, avec $\|A\| = \mu < \lambda = \|M\|$, $p \in S_1(A)$, q fils de p sur M. Soit N dénombrable tel que q hérite de q/N. Comme ω_1 n'est pas de cofinalité dénombrable, on a $N \subset M_{(0,\alpha)}$. Si T est stable en λ, T est stable. q, étant stable, hérite de $q/M_{(0,\alpha)}$.

Entre $M_{(o,\alpha)}$ et $M_{(0,\alpha+1)}$ se tient la famille $(M_{(\beta,\alpha)})_{\beta\in\lambda}$; on peut alors construire la λ-suite de Morley de $q/M_{(0,\alpha)}$ dans M, $X = (a_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$, et q en est le type moyen sur N.

Soit $\varphi(x, \bar{a})$ une formule telle que $p \vdash \varphi(x, \bar{a})$. Alors, $q \vdash \varphi(x, \bar{a})$, donc tous les a_α, sauf un nombre fini, satisfont $\varphi(x, \bar{a})$. Or, $\|A\| = \mu < \lambda$: Il y a donc μ formules dans p, chacune étant satisfaite, pour tous les a_α, sauf un nombre fini. On enlève donc ces éléments de la λ-suite de Morley (μ éléments au plus), il en reste dans la suite de Morley, et on réalise p dans M par l'un d'eux.

Chapitre V : Rangs

(T complète sans modèle fini)

1. Définitions.

Définition 1. - Un rang R est une fonction, qui à tout p de $S_1(M)$, pour tout modèle M, associe un ordinal ou le symbole ∞, satisfaisant aux conditions ($\infty > \alpha$, pour tout α) :

1° Si p et q sont isomorphes (i. e. M et N isomorphes, et p et q se correspondent par cet isomorphisme), alors $R(p) = R(q)$.

2° Si q est fils de p , $R(p) \geqslant R(q)$.

3° Propriété d'extension : Si $p \in S_1(M)$, et si N est une extension élémentaire de M , p a sur N un fils q de même rang (se dit équirang avec p).

4° Propriété de multiplicité bornée : Si $R(p) = \alpha < \infty$, il existe un cardinal μ , dépendant de p , tel que p n'a jamais plus de μ fils distincts équirangs avec p sur toute extension élémentaire N de M .

Définition 2. - On dit que p est rangé par R si $R(p) = \alpha < \infty$. Si $R(p) = \infty$, on dit que p est non rangé par R .

Remarque. - Pour la propriété d'extension, il suffit de voir que, pour tout ordinal α , si $R(p) \geqslant \alpha$, p a un fils q_α sur N tel que $R(q_\alpha) \geqslant \alpha$.

En effet, si $R(p) = \alpha$, il existe $q \supset p$, avec $R(q) \geqslant \alpha$. D'après le 2° du § 1, $R(q) = \alpha$.

Si p est non rangé, soit E l'ensemble des rangs des fils rangés de p sur N . Il existe un ordinal α qui majore E ; $R(p) \geqslant \alpha \Longrightarrow$ il existe $q_\alpha \supset p$, avec $R(q_\alpha) \geqslant \alpha$. Donc q_α n'est pas rangé.

2. Exemple : Le rang $\mathcal{U}$ noté RU .

Définition. - On définit, par induction sur l'ordinal α , l'expression $RU(p) \geqslant \alpha$.

Si α est limite, $RU(p) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, $RU(p) \geqslant \beta$, pour tout $\beta < \alpha$.

Si α est successeur de β , $RU(p) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, pour tout cardinal λ , il existe un modèle M_λ , tel que $M < M_\lambda$, et sur lequel p a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$.

(0 est ordinal limite : $RU(p) \geqslant 0$, pour tout p dans $S_1(M)$.)

LEMME 1. - Si $RU(p) \geqslant \alpha$ et $\alpha \geqslant \beta$, alors $RU(p) \geqslant \beta$.

Par induction sur α : C'est clair si α est limite, par définition.

Si $\alpha = \alpha_1 + 1$: Si $\beta = \alpha$, c'est évident. Si $\beta \leqslant \alpha_1$, par hypothèse d'induction, il suffit de le démontrer pour $\beta = \alpha_1$, c'est-à-dire que l'on a $RU(p) \geqslant \alpha_1$. En effet, pour tout cardinal λ , p se divise en λ fils de $RU \geqslant \alpha_1$, donc de $RU \geqslant \delta$ ($\delta \leqslant \alpha_1$), et on a donc $RU(p) \geqslant \delta + 1$, pour tout $\delta \leqslant \alpha_1$.

1er cas : $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$. - On prend $\delta = \alpha_2$, et $RU(p) \geqslant \alpha_1$.

2e cas : α_1 est limite. - Pour tout $\delta < \alpha_1$, $RU(p) \geqslant \delta + 1$, donc, par induction, $RU(p) \geqslant \delta$, et, par définition de RU , $RU(p) \geqslant \alpha_1$.

Suite de la définition. - Si $RU(p) \geqslant \alpha$, pour tout α , on pose $RU(p) = \infty$. Sinon, il existe un unique α tel que $RU(p) \geqslant \alpha$, et $RU(p) \not\geqslant \alpha + 1$, et on pose alors $RU(p) = \alpha$.

THÉORÈME. - RU <u>est une notion de rang</u>.

1° C'est évident par isomorphisme.

2° On montre par induction que, si $p \subset q$, $RU(q) \geqslant \alpha \longrightarrow RU(p) \geqslant \alpha$, avec $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$:

si α est limite, c'est évident par définition et par induction,

si $\alpha = \beta + 1$, alors, pour tout λ , il existe $M_\lambda \succ N$, sur lequel q a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$, et donc sur M_λ , p a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$. D'où $RU(p) \geqslant \alpha$.

3° Supposons $RU(p) = \alpha$. Si, par l'absurde, pour tout cardinal λ , il existait un modèle $M_\lambda \succ M$ sur lequel p a λ fils distincts de $RU = \alpha$, on aurait $RU(p) \geqslant \alpha + 1$, absurde. Donc, il existe μ , tel que p n'a pas plus de μ fils équirangs sur toute extension élémentaire de M .

Pour démontrer le 3°, les deux lemmes suivants sont nécessaires.

LEMME 2. - <u>Si</u> p <u>est instable,</u> $RU(p) = \infty$.

Montrons, par induction, que, pour tout α , $RU(p) \geqslant \alpha$. C'est évident si α est limite. Supposons $RU(p) \geqslant \alpha$. Pour tout λ , il existe un modèle où p a au moins λ fils instables distincts. En effet, on prend q fils non définissables de p , et λ héritiers de q . Ils sont instables et par hypothèse d'induction de $RU \geqslant \alpha$. Donc $RU(p) \geqslant \alpha + 1$.

LEMME 3. - <u>Si</u> p <u>est stable et</u> q <u>hérite de</u> p , <u>alors</u> $RU(p) = RU(q)$.

Par induction, on montre que $RU(p) \geqslant \alpha \longrightarrow RU(q) \geqslant \alpha$. Si α est limite, c'est évident. Si $RU(p) \geqslant \alpha + 1$, λ cardinal quelconque, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$, on peut déplacer N par M-automorphisme de manière à ce que les λ fils p_i de p sur M_λ de $RU \geqslant \alpha$ aient des héritiers passant par q , qu'on notera q_i . Pour tout $i < \lambda$, $RU(p_i) \geqslant \alpha$, et, donc, par induction, $RU(q_i) \geqslant \alpha$, et donc $RU(q) \geqslant \alpha + 1$ par définition.

Ceci achève la démonstration du théorème.

LEMME 4. - <u>Si</u> $RU(p) = \alpha < \infty$, <u>alors</u> p <u>est stable, et son unique fils de même rang est son héritier</u>.

p est stable d'après le lemme 2 ; par l'absurde, soit q un fils de p non héritier sur N tel que $RU(p) = RU(q)$. Par le théorème 3 du § 2 du chapitre 3, il existe $P \succ N \succ M$, tel que tout fils de p , non héritier sur P , a μ^+ conjugués distincts par M-automorphisme de P . Si q_1 est une extension de q sur P équirang avec q , q_1 a μ^+ conjugués dans $S_1(P)$ et n'hérite pas de P , μ étant le cardinal de multiplicité, on a une contradiction.

LEMME 5. - $RU(p) \geq \alpha + 1$ <u>si, et seulement si,</u> p <u>a deux fils de</u> $RU \geq \alpha$.

($\longleftarrow$) : Si p est instable ou stable, avec $RU(p) = \infty$, on a $RU(p) \geq \alpha + 1$. Si p est stable et $RU(p) < \infty$, son unique fils équirang est son héritier, et donc il ne peut avoir deux fils équirangs avec lui. Par conséquent, $RU(p) \geq \alpha + 1$.

LEMME 6. - $RU(p) \geq \alpha + 1$ <u>si, et seulement si,</u> p <u>est instable ou</u> p <u>a un fils non héritier</u> q <u>tel que</u> $RU(q) \geq \alpha$.

($\longrightarrow$) Si p est stable, d'après le lemme 5, il a un fils non héritier de $RU \geq \alpha$.

($\longleftarrow$) Si p est stable et rangé par RU , et a un fils non héritier de $RU \geq \alpha$, alors $RU(p) \geq \alpha + 1$.

On montre de même que $RU(p) \geq \alpha + 1$ si, et seulement si, p a un fils non co-héritier de $RU \geq \alpha$.

3. Théorème de Lascar.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> R <u>un rang. Si</u> p <u>est instable,</u> $R(p) = \infty$. <u>Si</u> p <u>est rangé, il n'a qu'un seul fils de même rang qui est son héritier. Si</u> q <u>hérite de</u> p , $R(p) = R(q)$; <u>de plus,</u> $RU(p) \leq R(p)$.

1° p étant instable, montrons par récurrence que, pour tout ordinal α , $R(p) \geq \alpha$. Si α est limite, c'est évident. Si $\alpha = \beta + 1$, on a $R(p) \geq \beta$, par hypothèse d'induction. Si on avait l'égalité, il existerait μ tel que p n'a jamais plus de μ fils équirangs avec lui. Or, on peut trouver μ^+ fils distincts q_i de p instables. Par induction, $R(q_i) \geq \beta$, d'où $R(q_i) = \beta$. Ce qui contredit l'axiome de multiplicité bornée.

2° Soit p avec $R(p) = \alpha$. Par l'absurde, supposons qu'il existe q fils non héritiers de p , avec $R(q) = \alpha$. p est stable, et tout fils non héritier de p a μ^+ conjugués par M-automorphismes dans $S_1(P)$. Soit q' une extension équirang de q sur P . q' n'hérite pas de p , et il y a donc μ^+ conjugués distincts q_i , avec $R(q_i) = R(q)$ par isomorphisme. C'est impossible, et on en déduit le résultat.

3° Si q hérite de p rangé, alors $R(q) = R(p)$. Si p est instable, un héritier l'est aussi, et donc $R(p) = R(q) = \infty$. Si q hérite sur N de p stable non rangé, on démontre par récurrence sur α que $(R(p) \geq \alpha \longrightarrow R(q) \geq \alpha)$. Si α est limite, c'est clair. Si $\alpha = \beta + 1$, p a sur N un fils équirang q_1 , avec $R(q_1) \geq \alpha$ et $q_1 \neq q$, sinon c'est évident. Plaçons deux copies de N de manière à ce que l'héritier q_2 de q_1 passe par q . Par induction, on a $R(q) \geq \beta$; supposons par l'absurde que $R(q) = \beta$, alors q est rangé par R , et aurait un fils q_2 de rang $R \geq \beta$ (par induction) et donc tel que $R(q_2) = \beta$, avec q_2 <u>non héritier de</u> q . C'est impossible d'après le 2°, donc $R(q) \geq \beta + 1 = \alpha$.

4° Démontrons par récurrence ordinale que $RU(p) \geq \alpha \longrightarrow R(p) \geq \alpha$: Si p est instable , on a $RU(p) = \infty = R(p)$. Si p est stable : Si α est limite, c'est clair, par induction. Si $\alpha = \beta + 1$, alors p a un fils q non héritier de $RU \geq \beta$. Alors, ou p est non rangé par R et c'est clair, ou $R(p) < \infty$, et alors $R(p) > R(q)$ (par le 2°), et de plus $R(q) \geq \beta$, par hypothèse d'induction, et donc $R(p) \geq \beta + 1 = \alpha$.

Remarque importante. - S'il existe une ω-suite $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n \subset \dots$ telle que p_{n+1} ne soit pas héritier de p_n , alors p_0 est non rangé. De même, s'il existe une ω-suite de p_i telle que p_{n+1} ne cohérite pas de p_n , alors p_0 est non rangé, et si cela est vrai, une telle ω-suite existe.

COROLLAIRE. - Soit R un rang ; il existe un ordinal $\alpha(R)$ tel que, si $R(p) \geq \alpha(R)$, alors p est non rangé par R .

Si p est rangé, p est stable, et hérite d'un type sur N , dénombrable avec $N < M$. p a même rang qu'un type sur un modèle dénombrable, dont le nombre n'excède pas 2^{ω} ; il y a 2^{ω} types sur chacun d'eux, donc 2^{ω} rangs possibles pour les types rangés. On prend un ordinal $\alpha(R)$ supérieur aux rangs des types rangés.

On peut même prouver que, si $RU(p) \geq \omega_1$, alors $RU(p) = \infty$, si T est dénombrable.

4. Types et théories superstables.

Définition 1. - Un type superstable est un type rangé par RU , ou par un rang quelconque.

Définition 2. - T est superstable si le rang $\mathcal{U}$ range tous les types, ou bien s'il existe un rang qui range tous les types, ou bien si tous les types sont superstables.

THÉORÈME 1. - Soit $p \in S_1(M)$, et λ un cardinal $\geq \|M\|$.

1° Si p est superstable, et si N est une extension élémentaire de M de cardinal λ , p n'a pas plus de $2^{\omega} \times \lambda$ fils distincts dans $S_1(N)$.

2° Si p n'est pas superstable, il existe une extension élémentaire N de M de cardinal λ sur laquelle p a λ^{ω} fils.

1° On a $RU(p) < \infty$. On considère $M_\emptyset$ restriction élémentaire dénombrable de M , telle que p hérite de $p/M_\emptyset$. Pour toute partie finie $\bar{a}$ de N , on va construire un modèle dénombrable $M_{\bar{a}}$ de manière à ce que

$$\bar{a} \subset \bar{b} \longrightarrow M_{\bar{a}} < M_{\bar{b}} \quad \text{et} \quad M_{\bar{a}} < N .$$

$M_\emptyset$ est déjà construit. Induction de $(n - 1)$-uple à n-uple : Soit $\bar{b}$ un n-uple ; il y a un nombre fini de $(n - 1)$-uples dans $\bar{b}$. Pour ceux-ci, les $M_{\bar{a}}$ étant déjà construits, il existe (par L. S.) un modèle dénombrable $M_{\bar{b}}$, restriction élémentaire de N contenant tous les $M_{\bar{a}}$. Alors $M_{\bar{a}} < M_{\bar{b}}$.

On montre que, si q est fils de p sur N, il hérite de $q/M_{\bar{a}}$ pour un certain $\bar{a}$; pour cela, on construit une ω-suite de types non héritiers les uns des autres et fils de p, qui sera nécessairement finie. En effet, si q n'hérite pas de $q/M_\emptyset$, il existe une formule $\varphi(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M^k$, $\bar{b} \in N^\ell$, telle que $q \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b})$ sans qu'il existe $\bar{b}'$ dans M^ℓ, avec $q_0 = q/M_\emptyset \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b}')$. p est rangé et son héritier q_0 aussi, avec $RU(q_0) = RU(p) < \infty$. Comme $q_1 = q/M_1$ (M_1 modèle dénombrable contenant $\bar{b}$) n'hérite pas de q_0, on a $RU(q_1) < RU(q_0)$. On recommence, en écrivant qu'il existe un n-uple $\bar{b}_2$ qui empêche q d'hériter de q_1. Si $M_2 = M_{\bar{b}\cup\bar{b}_2}$, alors $q_2 = q/M_2$ n'hérite pas de q_1, ...

Donc, tout fils q de p est l'héritier sur N de sa restriction à un $M_{\bar{a}}$. p n'a donc pas plus de fils sur N qu'il n'y a de types sur les modèles $M_{\bar{a}}$. Il y a λ modèles $M_{\bar{a}}$ au plus, et pour chacun d'eux 2^ω types au plus. Donc p n'a pas plus de $\lambda \times 2^\omega$ fils sur N.

2° Par suite du corollaire, en disant que $RU(p) \geq \alpha(R) + 1$, il existe λ fils de p non superstable de $RU \geq \alpha(R)$ (i. e. infini). Tout ytpe de RU infini peut être divisé en λ fils de RU infini. On opère ω divisions successives, et on obtient un arbre à λ^ω branches définissant λ^ω types distincts dans N, extension élémentaire de M. On distingue les types partant d'un même noeud à l'aide d'un nombre fini de paramètres : Avec λ paramètres au 1er noeud, $\lambda \times \lambda = \lambda$ au second, ... $\omega \times \lambda = \lambda$ paramètres sont nécessaires pour distinguer les types. Par L. S., il existe une restriction élémentaire N_λ de N contenant M et ces paramètres, de cardinal λ. Les restrictions à N_λ des λ^ω types répondent à la question.

THÉORÈME 2.

1° Si T est superstable, alors tout modèle de cardinal λ ne produit pas plus de $\lambda \times 2^\omega$ types.

2° Si T n'est pas superstable, pour tout cardinal infini λ, il existe un modèle de cardinal λ produisant λ^ω types distincts.

2° C'est èvident (cf. théorème 1).

1° On prend N de cardinal λ et une restriction élémentaire M dénombrable de N. Il y a au plus 2^ω types sur M, qui sont superstables, ne donnant donc qu'au plus $\lambda \times 2^\omega \times 2^\omega = \lambda \times 2^\omega$ types sur N.

5. Rang de Morley.

Définition. - Par induction : Si α est limite, $RM(p) \geq \alpha$ si $RM(p) \geq \beta$, pour tout $\beta < \alpha$. Si $\beta = \alpha + 1$, $RM(p) \geq \beta$ si p a un fils q qui est point d'accumulation de types de $RM \geq \alpha$.

On peut montrer que c'est une notion de rang ; si RM range tous les types, on dit que T est totalement transcendante.

On montre aussi que, si T est totalemet transcendante, elle est stable en tout cardinal λ , tandis que si elle ne l'est pas, il existe un ensemble dénombrable qui produit 2^{ω} types. Il y a donc équivalence entre la ω-stabilité et la totale transcendance.

<u>Tableau récapitulatif</u> (T dénombrable)

(α) T <u>instable</u> $\longleftrightarrow$ (T <u>instable en tout cardinal</u> $\lambda \geq \omega$)

(β) T <u>stable non superstable</u> $\longleftrightarrow$ (T <u>instable en tout cardinal</u> λ <u>tel que</u> $\lambda^{\omega} > \lambda$, T <u>stable en tous les</u> λ <u>tels que</u> $\lambda^{\omega} = \lambda$)

(γ) T <u>superstable non</u> ω-<u>stable</u> $\longleftrightarrow$ (T <u>est stable en</u> λ <u>si, et seulement si,</u> $\lambda \geq 2^{\omega}$)

(δ) T ω-<u>stable</u> <u>(ou totalement transcendante)</u> $\longleftrightarrow$ (T <u>stable en tout cardinal infini</u>)