SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

GÉRARD GOUT

Distributions p-adiques et fonctions arithmétiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A7_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
18 et 25 mai 1978
Grenoble

DISTRIBUTIONS p-ADIQUES ET FONCTIONS ARITHMETIQUES

par

Gérard GOUT

§ 0 - INTRODUCTION

Les deux outils essentiels de la théorie analytique des nombres usuelle sont la théorie des fonctions analytiques et la théorie de l'intégrale de Riemann. En p-adique, la première théorie est bien avancée tandis que la deuxième -à cause de l'absence d'une mesure de Haar utile- ne fait qu'émerger depuis que Mazur a introduit la mesure qui porte son nom. Pourtant, de nombreux auteurs -à travers l'utilisation de formes linéaires continues sur des espaces fonctionnels- font de la théorie de la mesure sans en utiliser le formalisme intégral ; notamment Kubota et Leopoldt, avec leur définition des fonctions L p-adiques.

L'objet de ce travail est d'étudier les distributions sur $\mathbb{Z}_p$ afin de dégager de façon la plus canonique possible, les plus intéressantes d'entre elles du point de vue de la technique intégrale.

Au § 1 , après quelques idées générales sur les distributions, on introduit la classe des <u>distributions formelles sur</u> $\mathbb{Z}_p$ dont les piliers sont les distributions de Bernoulli (théorème 1). Ce paragraphe est essentiellement une ré-exposition des chapitres XII et XIII du livre de Lang.

Au § 2 , <u>on construit des mesures</u> τ_a , de façon additive à partir des distributions de Bernoulli (théorème 2). Ces mesures ont des propriétés agréables, en particulier elles vérifient un théorème de "Δ-primitives" (ces dernières étant déjà apparues comme solutions d'équations aux différences finies). Enfin, grâce à cette intégrale, on définit une fonction gamma p-adique proche de celle introduite par Morita, et on en donne très simplement quelques propriétés.

Au § 3, on retrouve <u>les mesures</u> μ_c <u>de Mazur</u> par la construction multiplicative bien connue (attention : par souci de simplification, le paramètre c choisi ici est l'inverse de celui des auteurs précédents). En étudiant la fonction $G(c) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\, d\mu_c(x)$, on met en lumière un <u>lien entre ces mesures et celles du</u> § 2 , <u>au moyen de la distribution</u> τ^* (propositions 7 et 10). Tout ceci est appliqué aux fonctions L p-adiques, comme dans le livre de Koblitz. On obtient cependant une forme intégrale plus simple (théorème 7) et aussi un lien entre la fonction zêta p-adique et la fonction log-gamma p-adique (corollaires 1 et 2 de la fin). (*)

§ 1 - GENERALITES SUR LES DISTRIBUTIONS p-ADIQUES

1. - <u>DISTRIBUTIONS</u>.

Soient X un espace compact totalement discontinu et Ouv(X) l'ensemble de ses ouverts. Une <u>distribution sur</u> X , à valeur dans un groupe abélien V , est une application $\mu : \mathrm{Ouv}(X) \to V$ vérifiant la

(*) Après son exposé, l'auteur apprend que N. Koblitz -dans un article à paraître aux Transactions of the American Mathematical Society- a déjà établi ce lien. Il faut signaler aussi le travail de Diamond qui construit une autre fonction gamma en se plaçant sur le complété $\mathbb{C}_p$ de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

propriété additive suivante :

(A) l'image d'une réunion disjointe de deux ouverts est égale à la somme des images de chaque ouvert.

Si K est un anneau (commutatif unitaire) d'opérateurs sur V, une distribution μ opère sur l'espace $Esc(X,K)$ des fonctions localement constantes sur X, à valeurs dans K, de la façon suivante : si U est un ouvert de X et f_U sa fonction caractéristique, on pose $\mu(f_U) = \mu(U)$; puis par linéarité, on déduit que, si $f : X \to K$ est constante sur les ouverts $U_1 \ldots U_n$, formant partition de X, on a :

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\cdot\mu(U_i) \quad \text{où } x_i \text{ est un point de } U_i .$$

Par référence au cas usuel, on note, cette somme sous forme intégrale : $\mu(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x)$.

Si V est un K-module, $Esc(X,K)$ également, et l'intégrale précédente définit une application K-linéaire sur cet espace. Réciproquement la donnée d'une telle application permet de redéfinir la distribution μ par la même formule : $\mu(U) = \mu(f_U)$.

Sous ces hypothèses, l'ensemble $Distr(X,V)$ des distributions sur X est un K-module sur lequel $Esc(X,K)$ opère par la formule : $(f\circ\mu)(g) = \mu(f\cdot g)$ où f et g sont des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans K

Une distribution μ sur X peut se transporter à un autre espace Y totalement discontinu dans les conditions suivantes : si $\varphi : Y \to X$ est un homéomorphisme, on peut poser, pour tout ouvert U de Y, $\nu(U) = \mu(\varphi(U))$; alors l'application $\nu : Ouv(Y) \to V$ est une distribution sur Y ; en notation intégrale on obtient, pour toute fonction f de $Esc(X,K)$,

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_Y (f\circ\varphi)(y)\,d\nu(y) .$$

Si K est un corps valué complet et V un espace vectoriel topologique, on peut définir différents espaces fonctionnels sur X contenant $Esc(X,K)$, il est parfois possible de prolonger une distribution μ sur X en une application linéaire continue : on dit alors que μ est une distribution sur l'espace fonctionnel en question ; lorsqu'il s'agit de l'espace $Cont(X,K)$ des fonctions continues, muni de la norme de la convergence uniforme, on dit que μ est une mesure sur X . Par densité de $Esc(X,K)$ dans $Cont(X,K)$ on déduit :

PROPOSITION 1. - Une distribution μ sur X à valeurs dans un K-Banach V est une mesure sur X si, et seulement si, il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout ouvert U de X , on ait $\|\mu(U)\|_V \leq M$. Alors, pour toute fonction f de $Cont(X,K)$, on a la majoration :

$$\left\|\int_X f(x)\, d\mu(x)\right\|_V \leq M\|f\| .$$

Un exemple classique de mesures est celui des mesures de Dirac δ_a , définies, pour $a \in X$ et $f \in Cont(X,K)$ par $\delta_a(f) = f(a)$. Lorsque X est un groupe, on peut chercher s'il existe des mesures de Haar, donc d'abord des distributions μ vérifiant :

$$\mu(U) = \mu(x\cdot U) = \mu(U.x) \quad \text{pour tout ouvert } U \text{ de } X \text{ et tout } x \text{ de } X .$$

En appliquant cette condition à la famille des sous-groupes ouverts et distingués H de X , on tire que $\mu(H) = [X:H]^{-1}\mu(X)$. La proposition montre alors que μ est une mesure si, et seulement si, la famille des $|[X:H]|_K$ est minorée par un réel strictement positif lorsque H varie. C'est par exemple le cas de $X = \mathbb{Z}_p$ lorsque K est le corps des nombres réels ou un corps de nombres ℓ-adiques pour $\ell \neq p$.

Comme dans le cas usuel, on peut donner un théorème de convergence des sommes de Riemann : si f est une fonction de $Cont(X,K)$, à toute partition de X en ouverts U_i , $1 \leq i \leq n$, à tout choix de points $x_i \in U_i$, on peut associer la somme $S(f,U_i,x_i) = \sum_{i=1}^{i=x} f(x_i)\mu(U_i)$. Une telle somme étant l'intégrale d'une fonction localement constante, on a :

PROPOSITION 2. - Si μ est une mesure sur X, les sommes de Riemann $S(f,U_i,x_i)$ tendent vers l'intégrale de f sur X lorsque les diamètres des ouverts U_i tendent vers zéro.

2. - ETUDE DU CAS DE $\mathbb{Z}_p$.

En utilisant la structure profinie de $\mathbb{Z}_p$, on se propose de montrer comment les polynômes de Bernoulli apparaissent dans certaines distributions sur $\mathbb{Z}_p$.

PROPOSITION 3. - Soit X un ensemble profini, limite projective d'un système d'applications surjectives $t_n : X_{n+1} \to X_n$ où X_n est un ensemble fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors toute distribution μ de $\mathrm{Distr}(X,V)$ est donnée par une famille d'applications $\mu^{(n)} : X_n \to V$ reliées entre elles par les formules

$$(B) : \quad \boxed{\mu^{(n)}(x) = \sum_{\substack{y \in X_{n+1} \\ t_n(y)=x}} \mu^{(n+1)}(y)} \quad , \forall x \in X_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Démonstration. - Si $r_n : X \to X_n$ désigne la projection canonique, on sait que, pour tout $x \in X_n$, $r_n^{-1}(x)$ est un ouvert de X : on pose donc $\mu^{(n)}(x) = \mu(r_n^{-1}(x))$; les formules se déduisent alors de la condition d'additivité (A) pour μ . La réciproque est immédiate puisque les ouverts du type précédent forment une base de $\mathrm{Ouv}(X)$ ∎

Chaque application de X_n dans V est un élément du groupe V^{X_n} ; d'autre part, chaque application $t_n : X_{n+1} \to X_n$ se prolonge naturellement en un morphisme de groupes $t_n(V) : V^{X_{n+1}} \to V^{X_n}$; les formules reliant les $\mu^{(n)}$ montrent exactement que la famille des $\mu^{(n)}$ est un élément de la limite projective des $t_n(V)$; d'où :

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses de la proposition 3, le groupe Distr(X,V) est isomorphe à la limite projective des applications $t_n(V) : V^{X_{n+1}} \to V^{X_n}$.

Lorsque X est un groupe profini et V un anneau commutatif, chaque groupe V^{X_n} s'identifie au groupe additif de l'algèbre de groupe $V[X_n]$; d'où, avec un changement de notations :

COROLLAIRE 2. - Soit G un groupe profini, limite des morphismes surjectifs $t_n : G_{n+1} \to G_n$ et soit A un anneau commutatif. Alors le groupe Distr(G,A) s'identifie au groupe additif de l'algèbre de groupe $A[[G]]$.

Exemple. - Si A est l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$, on sait que $A[[\mathbb{Z}_p]]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[[T]]$.

Remarque 1. - La multiplication interne à l'algèbre $A[[G]]$ peut s'interpréter dans Distr(G,A) par un produit de convolution : pour $\lambda , \mu \in$ Distr(G,A) et $x \in G_n$ on pose $(\lambda * \mu)(r_n^{-1}(x)) = \sum_{y+z=x} \lambda^{(n)}(y)\mu^{(n)}(z)$.

Désormais, on suppose que V est le groupe additif d'un corps commutatif K de caractéristique 0 et on se propose de construire explicitement des distributions sur $\mathbb{Z}_p$, considéré comme limite projective des morphismes usuels $t_n : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On désigne par $s_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ la section de $r_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $s_n(x)$ étant défini comme l'unique entier compris entre 0 et p^n-1 tel que $r_n \circ s_n(x) = x$. Donc $r_n \circ s_n$ est l'identité sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $e_n = s_n \circ r_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après la proposition 3, une distribution μ sur $\mathbb{Z}_p$ est définie par des applications $\mu^{(n)} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to K$ reliées par les formules (B). Comme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est fini, on peut supposer qu'il existe, pour chaque n , un polynôme P_n de $K[X]$, de degré au plus p^n-1 , tel que $\mu^{(n)}(x) = P_n(s_n(x))$ pour $x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. D'autre part, si $t_n(y) = x$, on a $s_{n+1}(y) = s_n(x) + kp^n$ où $k = 0,1,\dots,p-1$. Les formules (B) donnent $P_n(s_n(x)) = \sum_{k=0}^{k=p-1} P_{n+1}(s_n(x)+kp^n)$ ou encore

$$(C) : \boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=p-1} P_{n+1}(X+kp^n)} \quad \text{pour } p^n \text{ valeurs de } X .$$

P_n étant connu, les p^n relations vérifiées par P_{n+1} ne déterminent pas nécessairement ce polynôme. Une classe importante de distributions sera constituée par les distributions formelles pour lesquelles les relations (C) sont des égalités dans $K[X]$. En utilisant la technique des opérateurs de composition de Bourbaki ([Bo]), on peut déterminer l'ensemble de ces distributions :

THEOREME 1. - L'ensemble des distributions formelles sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans un corps commutatif K , de caractéristique 0 , est un K-espace vectoriel dont une base est constituée des distributions β_m définies, pour chaque entier naturel m , sur chaque ouvert élémentaire $(x+p^n\mathbb{Z}_p)$ de $\mathbb{Z}_p$, par

$$\beta_m(x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{n(m-1)} B_m\left(\frac{e_n(x)}{p^n}\right)$$

où B_m désigne le $m^{\text{ème}}$ polynôme de Bernoulli.

Les β_m sont appelées distributions de Bernoulli et l'on peut remarquer que β_o engendre le sous-espace des distributions de Haar.

Démonstration. - Soit D l'opérateur de dérivation dans $K[X]$, et pour $a \in K$, soit e^{aD} l'opérateur de translation $P(X) \to P(X+a)$; les relations (C) s'écrivent

$$P_n = \left(\sum_{k=0}^{k=p-1} e^{kp^nD}\right)P_{n+1} .$$

Pour $a \neq 0$, l'opérateur $V_a = \frac{e^{aD}-1}{D}$ est inversible ; donc, de façon équivalente on a : $\left(\frac{e^{p^nD}-1}{D}\right) P_n = \left(\frac{e^{p^{n+1}D}-1}{D}\right) P_{n+1}$.

A une distribution formelle μ , on a ainsi associé le polynôme

$M_\mu = V_{p^n} \cdot P_n$, indépendant en fait de n . L'application $M : \mu \to M_\mu$ est alors un K-isomorphisme de l'ensemble considéré dans le K-espace vectoriel $K[X]$. Une base du premier peut s'obtenir par image réciproque de la base canonique $1, X, \ldots, X^m \ldots$ de $K[X]$. En posant $\beta_m = M^{-1}(X^m)$ un calcul classique montre que le $n^{\text{ème}}$ polynôme P_n associé à β_m est $p^{n(m-1)} B_m(\frac{X}{p^n})$ d'où le résultat puisque $\beta_m(x + p^n\mathbb{Z}_p) = P_n(e_n(x))$ ∎

Remarque 2. - Pour une distribution formelle μ , tous les polynômes associés P_n ont le même degré, à savoir celui de $M_\mu(X)$.

Remarque 3. - A une distribution formelle μ , donnée par des polynômes P_n , on peut associer la distribution formelle dérivée μ' donnée par les P'_n (les relations formelles (C) sont bien vérifiées) et alors $M_{\mu'} = M'_\mu$. Par exemple, on a $\beta'_m = m\beta_{m-1}$.

La question se pose maintenant de savoir s'il existe des mesures parmi les distributions formelles, dans le cas où l'on n'a pas de mesures de Haar, c'est-à-dire lorsque K est un corps valué complet, extension de $\mathbb{Q}_p$.

Pour étudier le comportement "asymptotique" d'une distribution, on a

LEMME UTILE. - Soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\mathrm{Distr}(\mathbb{Z}_p, K)$ vérifiant la condition : $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}_p} |\mu_1(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x+p^n\mathbb{Z}_p)| = 0$. Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. - Tout ouvert U de $\mathbb{Z}_p$ s'écrit, pour n assez grand, comme réunion finie d'ouverts élémentaires disjoints $(x_i + p^n\mathbb{Z}_p)$, d'où :

$$\mu_1(U) - \mu_2(U) = \sum_i [\mu_1(x_i+p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x_i+p^n\mathbb{Z}_p)]$$

par l'inégalité ultramétrique on déduit :

$$\begin{aligned}|\mu_1(U) - \mu_2(U)| &\le \max_i |\mu_1(x_i+p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x_i+p^n\mathbb{Z}_p)| \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{Z}_p} |\mu_1(x+p^n\mathbb{Z}\ ) - \mu_2(x+p^n\mathbb{Z}\ )|\end{aligned}$$

à la limite on obtient $\mu_1(U) = \mu_2(U)$ ∎

Ce lemme autorise l'usage d'équivalents pour l'étude de μ : on dit que les applications $\varphi_n : \mathbb{Z}_p \to K$ sont des équivalents pour μ si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}_p} |\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \varphi_n(x)| = 0 .$$

PROPOSITION 4. - *Une distribution formelle μ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans un corps K comme ci-dessus, admet pour chaque n, l'équivalent :*

$$\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq \frac{1}{p^n} M_\mu(e_n(x)) - \frac{1}{2} M'_\mu(e_n(x))$$

où M_μ désigne le polynôme associé à μ dans $K[X]$ (cf. dém. du th. 1).

En particulier, $\beta_m(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq \dfrac{e_n^m(x)}{p^n} - \dfrac{m}{2} e_n^{m-1}(x)$.

Démonstration. - Si M_μ est de degré m, on obtient au moyen de $V_{p^n}^{-1}$:

$$P_n = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{k!} p^{nk} M_\mu^{(k)} = \frac{1}{p^n} M_\mu + \frac{b_1}{1!} M'_\mu + \frac{b_2}{2!} p^n M''_\mu + \dots + \frac{b_m}{m!} p^{n(m-1)} M_\mu^{(m)} .$$

Quand n varie, M_μ, ainsi que ses dérivées, sont des fonctions bornées sur $\mathbb{Z}_p$. D'autre part, les nombres de Bernoulli $b_1,\dots,b_m$ le sont également. Donc, sur $\mathbb{Z}_p$, on a

$$P_n(x) \simeq \frac{1}{p^n} M_\mu(x) + \frac{b_1}{1!} M'_\mu(x) .$$

Comme $b_1 = -\frac{1}{2}$ et $\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) = P_n(e_n(x))$ le résultat s'ensuit ∎

COROLLAIRE. - *Sous les mêmes hypothèses, l'unique distribution formelle sur $\mathbb{Z}_p$ qui est une mesure, est la distribution nulle.*

Démonstration. - Il faut vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x = 0,1,\dots,p^n-1$, l'ensemble des $P_n(x)$ est borné ; avec l'équivalent précédent, et à cause du coefficient $\frac{1}{p^n}$ ceci revient à $M_\mu(x) = 0$, c'est-à-dire à $M_\mu = 0$.

§ 2 - LES MESURES ADDITIVES τ_a SUR $\mathbb{Z}_p$

K désigne désormais un corps valué complet, extension de $\mathbb{Q}_p$.

1. - DEFINITION DES MESURES τ_a .

N'ayant pas obtenu de mesures sur $\mathbb{Z}_p$, à partir des distributions de Bernoulli, par le seul moyen des opérations vectorielles, il est naturel, dans un premier temps, d'utiliser des <u>opérations de transport par translation</u> : pour $a \in \mathbb{Z}_p$, la translation $x \to x-a$ permet d'associer à une distribution μ sur $\mathbb{Z}_p$, une autre distribution μ_a définie par $\mu_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \mu(x-a+p^n\mathbb{Z}_p)$. On notera symboliquement $\mu_a(x) = \mu(x-a)$.

THEOREME 2. - <u>Pour tout</u> $a \in \mathbb{Z}_p$, <u>pour tout</u> $m \in \mathbb{N}^*$, <u>les distributions</u> $\tau_{m,a}(x) = -\beta_m(x) + \beta_m(x-a) + a\beta'_m(x-a) + \ldots + \frac{a^m}{m!}\beta_m^{(m)}(x-a)$ <u>sont des mesures sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>reliées entre elles par</u>

$$\boxed{\tau_{m,a}(x) = mx^{m-1}\tau_{1,a}(x)} \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $(P_{m,n})_n$ la famille des polynômes associés à β_m ; la formule de Taylor montre que

$$\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) = P_{m,n}[e_n(x-a)+a] - P_{m,n}[e_n(x)] \ ;$$

par définition de e_n , on peut poser $e_n(x-a) + a = e_n(x) + p^n f_n(x,a)$ avec $f_n(x,a) \in \mathbb{Z}_p$; en utilisant l'équivalent $\frac{X^m}{p^n} - \frac{m}{2}X^{m-1}$ de $P_{m,n}(X)$, on déduit que $\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq m f_n(x,a) e_n^{m-1}(x)$: ce qui montre que $\tau_{m,a}$ est une mesure sur $\mathbb{Z}_p$ avec, pour tout ouvert U , la majoration $|\tau_{ma}(U)| \leq 1$.

D'autre part, $\tau_{1,a}$ étant une mesure, $\nu(x) = mx^{m-1}\tau_{1,a}(x)$ aussi, et l'on a $\nu(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \int_{x+p^n\mathbb{Z}_p} mt^{m-1}d\tau_{1a}(t)$. Comme $\tau_{1,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq f_n(x,a)$, on déduit l'équivalence

$$\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \nu(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq \int_{x+p^n\mathbb{Z}_p} m[t^{m-1} - e_n^{m-1}(x)]\, d\tau_{1,a}(t) \ .$$

Or, cette intégrale est, en valeur absolue, majorée par $\sup_{t\in x+p^n\mathbb{Z}_p} |t^{m-1} - e_n^{m-1}(x)| \leq p^{-n}$. D'après le lemme utile, on en déduit que $\tau_{m,a} = \nu$ ∎

Toutes les mesures $\tau_{m,a}$ se déduisent donc de $\tau_{1,a}$; par définition cette dernière est notée τ_a ; on a donc :

$$\underline{\tau_a(x) = \beta_1(x-a) - \beta_1(x) + a\beta_o(x)}$$

ou encore

$$\underline{\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}[e_n(x-a) - e_n(x) + a]} \ .$$

Cas particuliers.

- $\tau_o = 0$.
- $\tau_1 = \delta_o$ mesure de Dirac à l'origine. (En effet on vérifie que
$$\tau_1(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{e_n(x-1) - e_n(x) + 1}{p^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin p^n\mathbb{Z}_p \\ 1 & \text{si } x \in p^n\mathbb{Z}_p . \end{cases}$$
- $\tau_n = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence).

Remarque 4. - La relation précédente peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(x) = n\beta_o(x) + \beta_1(x-n) - \beta_1(x)$$

on en déduit, pour $f \in \mathrm{Esc}(\mathbb{Z}_p, K)$, une relation de type Euler-Mac Laurin :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = n\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\beta_o(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} [f(x+n) - f(x)]\, d\beta_1(x) \ .$$

2. - PROPRIETES DES MESURES τ_a .

(i) τ_a est une forme linéaire continue sur $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p K)$ vérifiant $|\tau_a(f)| \le \|f\|$.

(ii) $\tau_a(x-b) = \tau_{a+b}(x) - \tau_b(x)$; en particulier, pour $b = n$ entier naturel non nul on a $\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(x) = \tau_{a+n}(x) - \tau_a(x-n)$.

(iii) $\tau_{pa}(px) = \tau_a(x)$.

(iv) $\tau_a(x) + \tau_{1-a}(-x) = \delta_o(x)$.

Démonstration. - La 1ère propriété est conséquence directe du théorème 2. Les autres se prouvent par un calcul direct sur les ouverts élémentaires $x+p^n\mathbb{Z}_p$; par exemple, pour la dernière, on a, avec le 1er membre :

$$\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) + \tau_{1-a}(-x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}[e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) - e_n(x) - e_n(-x) + 1]$$

comme $(x-a) + (-x+a-1) = -1$, on a : $e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) \equiv -1 \pmod{p^n}$; prenant ses valeurs entre 0 et p^n-1 , la seule possibilité est

$$e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) = p^n-1 \;;$$

enfin, on vérifie que

$$e_n(x) + e_n(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in p^n\mathbb{Z}_p \\ p^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où finalement $\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) + \tau_{1-a}(-x+p^n\mathbb{Z}_p) = \delta_o(x+p^n\mathbb{Z}_p)$ ∎

Calcul d'une intégrale fondamentale.

$$\boxed{\int_{\mathbb{Z}_p} x^m \, d\tau_a(x) = \frac{1}{m+1}[B_{m+1}(a) - B_{m+1}(0)]}$$ pour tout entier naturel m .

Démonstration. - Avec les notations du théorème 2, on a $x^m \tau_a(x) = \frac{1}{m+1} \tau_{m+1,a}(x)$, d'où

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\tau_a(x) = \frac{1}{m+1}\,\tau_{m+1,a}(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{m+1}[P_{m+1,0}(e_o(-a)+a) - P_{m+1,0}(e_o(0)]$$

comme $e_o = 0$ et $P_{m+1,0}(X) = B_{m+1}(X)$, le résultat s'ensuit ∎

La structure de la formule fait penser à un théorème des primitives.

DEFINITION. Soit $f : \mathbb{Z}_p \to K$, on appelle Δ-primitive de f sur $\mathbb{Z}_p$, toute fonction $F : \mathbb{Z}_p \to K$ telle que $(\Delta F)(x) = F(x+1) - F(x) = f(x)$ sur $\mathbb{Z}_p$.

Si F est une Δ-primitive de f , $F+c$ aussi pour tout $c \in \mathbb{Z}_p$.

PROPOSITION 5. - Toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p$ K admet une Δ-primitive et deux Δ-primitives de f diffèrent d'une constante.

Démonstration. - Par le théorème de Mahler, on sait que $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p,K)$ admet la base normale $\binom{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, des polynômes binomiaux ; or Δ est un opérateur linéaire sur $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p,K)$ et continu puisque $\|\Delta f\| \leq \|f\|$; donc si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\binom{x}{n}$, avec $a_n \to 0$, on déduit

$$(\Delta f)(x) = \sum_{n\geq 1} a_n\binom{x}{n-1} = \sum_{m\geq 0} a_{m+1}\binom{x}{m}$$

ceci prouve que Δ est surjectif et que son noyau est constitué des fonctions constantes ∎

THEOREME 3 (dit des Δ-primitives). - Soient $f \in \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p,K)$ et F une Δ-primitive de f sur $\mathbb{Z}_p$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\tau_a(x) = F(a) - F(0) .$$

Démonstration. - Sur les fonctions-polynômes, on a $\Delta = e^D - 1 = \frac{e^D-1}{D} \circ D$, donc une Δ-primitive de x^m est une primitive -au sens usuel- de B_m , soit $\frac{1}{m+1} B_{m+1}$. Le théorème s'ensuit puisque les fonctions-polynômes sont denses dans $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p K)$ ∎

Applications. - $\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{m} d\tau_a(x) = \binom{a}{m+1}$

pour $c \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $c \neq 1$: $\int_{\mathbb{Z}_p} c^x \, d\tau_a(x) = \dfrac{c^a-1}{c-1}$.

Démonstration. - La 1ère est immédiate puisque $\Delta\binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$. La 2ème se calcule directement sur le développement binomial : $c^x = \sum_{n\geq 0} (c-1)^n \binom{x}{n}$ ■

3. - ETUDE DE LA FONCTION $F(a) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\tau_a(x)$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{Z}_p$ lorsque f est continue et, d'après ce qui précède, F est exactement la Δ-primitive de f nulle en 0 .

PROPOSITION 6. - *Si* f *possède l'une des propriétés suivantes sur* $\mathbb{Z}_p$: (i) *continue*, (ii) *strictement différentiable*, (iii) *localement analytique alors* F *possède la même propriété sur* $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. - Chacune de ces propriétés a une caractérisation simple au moyen du développement binomial $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{m}$:

(i) f continue $\Leftrightarrow \lim_n a_n = 0$ [Mah] ;

(ii) f strictement différentiable $\Leftrightarrow \lim_n n|a_n| = 0$ [We] ;

(iii) f localement analytique $\Leftrightarrow \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ $[\mathrm{Am}]_1$.

Comme $F(x) = \sum_{m\geq 1} a_{m-1}\binom{x}{m}$ dans les 3 cas, on vérifie que la suite des a_{m-1} satisfait aussi la même propriété ■

COROLLAIRE. - *Dans le cas* (ii) *ou* (iii) , *la dérivée de* F *vérifie* :

$$F'(a) = F'(0) + \int_{\mathbb{Z}_p} f'(x)\, d\tau_a(x) .$$

Démonstration. - Immédiate, puisque F' est alors une Δ-primitive de f' ■

Pour être intéressant, ce corollaire nécessite un moyen de calcul de la dérivée en 0 .Le cadre utile pour l'étude des fonctions usuelles est celui de l'espace Locan $(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions localement analytiques. Lui-même est la réunion, pour $h \in \mathbb{N}$, des espaces de Banach $\mathrm{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$, constitués des fonctions strictement analytiques sur les boules $(i+p^h\mathbb{Z}_p)$, $i=0,\ldots,p^h-1$ (cf. $[\mathrm{Am}]_1$).

PROPOSITION 7. - Pour toute fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ on pose : $\tau^*(f) = \lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\tau_a(x)$. Alors, pour chaque $h \in \mathbb{N}$, la restriction de τ^* à l'espace $\mathrm{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$ est une distribution vérifiant l'inégalité :

$$|\tau^*(f)| \le p^{h+1}\|f\|_h \ .$$

Démonstration. - On se limite aux fonctions-polynômes qui sont denses dans $\mathrm{Ana}_h(\mathbb{Z}_p K)$. Soit $P \in K[X]$; sur chaque boule $i+p^h\mathbb{Z}_p$, on a $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=m} \frac{P^{(k)}(i)}{k!}(x-i)^k$ par la formule de Taylor, avec m = degré de P ; d'où, par définition :

$$\|P\|_h = \max_i \max_k \left|\frac{P^{(k)}(i)}{k!}p^{hk}\right| \quad \text{avec} \quad 0 \le i \le p^h-1 \quad \text{et} \quad 0 \le k \le m \ .$$

D'autre part, $\tau^*(P) = \sum\limits_i \sum\limits_k \frac{P^{(k)}(i)}{k!}\int_{i+p^h\mathbb{Z}_p}(x-i)^k\, d\tau^*(x)$; un calcul facile donne $\int_{i+p^h\mathbb{Z}_p}(x-i)^k d\tau_a(x) = \frac{p^{hk}}{k+1}\left[B_{k+1}\left(\frac{a}{p^h}\right) - B_{k+1}(0)\right]$ d'où, par dérivation en $a = 0$:

$$\tau^*(P) = \sum_i \sum_k \frac{P^k(i)}{k!}p^{h(k-1)}b_k$$

où b_k est le $k^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli. On déduit l'inégalité :

$$|\tau^*(P)| \le \max_i \max_k \left|\frac{P^{(k)}(i)}{k!}p^{h(k-1)}b_k\right| \le \|P\|_h\, p^h \max_k |b_k|$$

le résultat repose alors sur le fait connu que les nombres de Bernoulli sont bornés p-adiquement : $|b_k| \le p$ (voir par exemple p.15 de [Iw] ; voir aussi le § 3 , remarque 8 de cet exposé) ∎

Remarque 5. - τ^* n'est autre que "l'intégrale de Volkenborn" (cf. [Vo]). L'intérêt est de pouvoir la déduire d'une mesure, en l'occurence τ_a .

4. - APPLICATION A LA FONCTION GAMMA p-ADIQUE.

Il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle classique : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ puisque la fonction $n \to n!$ n'est pas continue p-adiquement. Par contre, il est possible de définir un analogue de $\log\Gamma$ au moyen de la relation : $\log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x$, qui fait penser à une Δ-primitive du logarithme.

Le logarithme p-adique utilisé ici est la fonction définie par la série usuelle : pour $x \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, $\log x = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$. On peut la prolonger à $\mathbb{Z}_p^\times$ au moyen de l'application $x \to \langle x \rangle$ où $\langle x \rangle$ désigne le représentant de Teichmüller.

On définit une fonction gamma p-adique $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to 1 + p\mathbb{Z}_p$ par la formule :

$$\boxed{\log\Gamma_p(a) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log\langle x \rangle \, d\tau_a(x)} \quad .$$

Cette formule est valable puisque l'intégrale est à valeurs dans $p\mathbb{Z}_p$, domaine de définition de l'exponentielle.

Remarque 6. - Il y a une part d'arbitraire dans le choix de cette fonction : d'abord en imposant que $\Gamma_p(a) \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, ensuite en fixant $\mathbb{Z}_p^\times$ comme domaine d'intégration : ce qui explique que l'on ne trouve pas exactement la fonction de Morita.

Valeurs particulières : $\Gamma_p(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_p(n) = \langle \prod_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{k=n-1} k \rangle$.

THEOREME 4. - Il existe une et une seule fonction continue $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ vérifiant les conditions suivantes : $\Gamma_p(a) = 1$ et $\Gamma_p(x+1) = \langle x \rangle \Gamma_p(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, $\Gamma_p(x+1) = \Gamma_p(x)$ pour $x \in p\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. - L'existence d'une telle fonction est une conséquence du théorème des Δ-primitives ; l'unicité résulte du fait que les conditions demandées déterminent la fonction sur $\mathbb{N}^*$, dense dans $\mathbb{Z}_p$ ∎

Certaines propriétés de la fonction gamma usuelle ont des analogues p-adiques, par exemple, grâce aux résultats du (3), on a :

PROPOSITION 8. - La fonction $\Gamma_p(a)$ est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ et ses dérivées logarithmiques sont données par les formules suivantes :

$$\frac{\Gamma_p'(a)}{\Gamma_p(a)} = -\gamma_p + \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-1}\, d\tau_a(x)$$

et pour $k \geq 2$: $(D^k \log \Gamma_p)(a) = -\gamma_p(k) + (-1)^{k-1}(k-1)! \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k}\, d\tau_a(x)$

avec γ_p, $\gamma_p(k)$ des constantes données par :

$$\gamma_p = -\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log \langle x \rangle\, d\tau^*(x)$$

et pour $k \geq 2$, $\gamma_p(k) = (-1)^k (k-2)! \int_{\mathbb{Z}_p^*} x^{1-k}\, d\tau^*(x)$.

On peut dire que γ_p est l'analogue p-adique de la constante d'Euler.

Formule des compléments : pour $a \in \mathbb{Z}_p$, $\boxed{\Gamma_p(a)\Gamma_p(1-a) = 1}$.

A démontrer au moyen de la propriété (iv) de la mesure τ_a.

Remarque 7. - On peut effectuer explicitement certains calculs : par exemple, pour γ_p, on obtient, avec les nombres de Bernoulli b_k et les nombres $s_k = \sum_{i=1}^{p-1} i^{-k}$ $(k \geq 0)$:

$$\gamma_p = -\log \langle (p-1)! \rangle + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} p^{k-1} s_k b_k .$$

§ 3 - LES MESURES MULTIPLICATIVES μ_c SUR $\mathbb{Z}_p$

1. - DEFINITION DES MESURES μ_c .

La technique est la même qu'au § 2 en remplaçant les translations par les homothéties $x \to cx$ de $\mathbb{Z}_p$ avec $c \in \mathbb{Z}_p^\times$.

THEOREME 5. - Pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les distributions $\mu_{m,c}(x) = \beta_m(x) - c^m\beta_m(c^{-1}x)$ sont des mesures sur $\mathbb{Z}_p$ reliées entre elles par les relations :

$$\boxed{\mu_{m,c}(x) = mx^{m-1}\mu_{1,c}(x)} \quad .$$

Démonstration. - Par définition

$$\mu_{m,c}(x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{n(m-1)}\left[B_m\left(\frac{e_n(x)}{p^n}\right) - C^m B_m\left(\frac{e_n(c^{-1}x)}{p^n}\right)\right]$$

d'où l'équivalent suivant :

$$\left[\frac{e_n^m(x)}{p^n} - \frac{m}{2}e_n^{m-1}(x)\right] - c^m\left[\frac{e_n^m(c^{-1}x)}{p^n} - \frac{m}{2}e_n^{m-1}(c^{-1}x)\right] .$$

On peut poser $ce_n(c^{-1}x) = e_n(x) + p^n g_n(x,c)$ avec $|g_n| \leq 1$, d'où finalement : $\mu_{m,c}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq me_n^{m-1}(x)\left[-g_n(x,c) + \frac{1-c}{2}\right]$. On en conclut que $\mu_{m,c}$ est une mesure et que $\mu_{1,c}(x) \simeq [-g_n(x,c) + \frac{1-c}{2}]$. Le même raisonnement prouve que $\mu_{m,c}(x) = mx^{m-1}\mu_{1,c}(x)$ ∎

Toutes les mesures $\mu_{m,c}$ se déduisent de la mesure $\mu_{1,c}$ notée désormais μ_c . Donc on a : $\mu_c(x) = \beta_1(x) - c\beta_1(c^{-1}x)$ ou encore $\mu_c(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{1-c}{2} + p^{-n}[e_n(x) - ce_n(c^{-1}x)]$.

2. - PROPRIETES DES MESURES μ_c .

Les mêmes techniques permettent d'énoncer les propriétés suivantes :

(i) μ_c est une forme linéaire continue sur $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p K)$ vérifiant $|\mu_c(f)| \leq \|f\|$.

(ii) μ_c est invariante pour la multiplication par p : $\mu_c(px) = \mu_c(x)$.

(iii) $\mu_c(x-a) = \mu_c(x) + \tau_a(x) - c\,\tau_{c^{-1}a}(c^{-1}x)$ pour $a \in \mathbb{Z}_p$ et $c \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.

(iv) $b\mu_c(b^{-1}x) = \mu_{bc}(x) - \mu_b(x)$ pour $b, c \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.

<u>Calcul d'une intégrale fondamentale</u> : pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) = (1-c^{m+1}) \frac{b_{m+1}}{m+1}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} x^m d\mu_c(x) = (1-p^m)(1-c^{m+1}) \frac{b_{m+1}}{m+1} \quad .$$

Démonstration. -

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) = \frac{1}{m+1}\, \mu_{m+1,c}(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{m+1} [\, \beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p) - c^{m+1} \beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p)]$$

d'où la réponse puisque $\beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p) = B_{m+1}(0) = b_{m+1}$.

$$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} x^m d\mu_c(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) - \int_{p\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x)$$

dans la 2e intégrale on effectue le changement de variable $x = py$ et on utilise la propriété (ii) de μ_c ∎

Remarque 8. - La propriété (i) donne la majoration $\left|\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x)\right| \leq 1$ d'où $|b_{m+1}| \cdot \left|\frac{1-c^{m+1}}{m+1}\right| \leq 1$ pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^{\times}$; avec $c = 1+p$ on déduit que $|b_{m+1}| \leq p$: ceci montre que l'ensemble des nombres de Bernoulli vérifie la propriété $pb_m \in \mathbb{Z}_p$.

En raffinant cette méthode, on peut démontrer les congruences de Kummer et de Clausen-Von Staudt (cf. [Ko] p.44).

<u>Etude de la fonction</u> $G(c) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\, d\mu_c(x)$.

G est définie sur $\mathbb{Z}_p^{\times}$ chaque fois que $g \in \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$.

PROPOSITION 9. - <u>L'application</u> $g \to G$ <u>ci-dessus définit une application linéaire et continue entre les espaces de Banach</u> $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p K)$ <u>et</u> $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p^\times, K)$ ∎

<u>Démonstration</u>. - La propriété (i) de μ_c montre que, pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a : $|G(c)| \leq \|g\|$ d'où aussi $\|G\| \leq \|g\|$, chacune de ces mesures étant la borne supérieure des modules pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ et respectivement $x \in \mathbb{Z}_p$: d'où une application linéaire continue de $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans l'espace des fonctions $F(\mathbb{Z}_p^\times, K)$. Le calcul fait pour $g(x) = x^m$ montre que la fonction $G_m(c)$ associée est continue, d'où le résultat par densité des fonctions polynômes dans $\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ ∎

La proposition 6 du § 2 n'a pas son équivalente ici, cependant on a :

PROPOSITION 10. - <u>Si</u> g <u>est localement analytique sur</u> $\mathbb{Z}_p$, G <u>est dérivable sur</u> $\mathbb{Z}_p^\times$ <u>et l'on a</u> :

$$G'(c) = -\int_{\mathbb{Z}_p} x g(cx)\, d\tau^*(x) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ fixé et $b \in 1+p\mathbb{Z}_p$ on a, grâce à (iv) :

$$\frac{G(bc)-G(c)}{bc-c} = \frac{1}{b-1} \int_{\mathbb{Z}_p} g(cx)\, d\mu_b(x)$$

donc $G'(c)$ existe si et seulement si la limite du 2ème membre existe lorsque b tend vers 1 ; or, pour $g_m(x) = x^m$ où $m \in \mathbb{N}$, le calcul montre que $\lim_{b \to 1} \frac{1}{b-1} \int_{\mathbb{Z}_p} g_m(x)\, d\mu_b(x) = -b_{m+1} = -\int_{\mathbb{Z}_p} x g_m(x)\, d\tau^*(x)$ la proposition s'ensuit par densité des polynômes dans les espaces $\mathrm{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$ ∎

2. - <u>APPLICATIONS AUX FONCTIONS</u> L p-<u>ADIQUES</u>.

Les seuls caractères de Dirichlet, prolongeables par continuité à $\mathbb{Z}_p$, sont ceux de modules une puissance de p ; par exemple, le caractère de Teichmüller ω , primitif de conducteur $p\,(p \neq 2)$ ou $4\ (p=2)$.

Pour un caractère χ, primitif de conducteur $f = p^{\alpha}$, calculons pour $k \geq 1$ l'intégrale : $\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \chi(x)\, x^{k-1}\, d\mu_c(x)$.

En explicitant μ_c on trouve d'abord :

$$\frac{1}{k}(1-\chi(p)\,p^{k-1})(1-\chi(c)c^k) \int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)\, d\beta_k(x) .$$

Sachant que $\chi(x)$ est localement constant modulo $p^{\alpha}\mathbb{Z}_p$ on tire :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)\, d\beta_k(x) = \frac{1}{f} \sum_{i=0}^{f-1} \chi(i)\, B_k(\tfrac{i}{f})\, f^k .$$

A droite, on reconnaît le kème nombre de Bernoulli associé à χ et noté $b_k(\chi)$ (voir [Iw]). D'où le résultat suivant : pour $k \geq 1$ et $c \neq 1$, pour χ primitif de conducteur p^{α} :

$$\boxed{\frac{1}{\chi(c)c^k - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \chi(x)\, x^{k-1}\, d\mu_c(x) = (1-\chi(p)\,p^{k-1})\ \frac{-b_k(\chi)}{k}} .$$

Le membre de droite est exactement la valeur en $s = 1-k$ de la fonction usuelle : $(1-\chi(p)\,p^{-s}\, L(s,\chi)$. On peut donc espérer définir un analogue p-adique par interpolation des fonctions $k \to a^k$ où $a \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ et $k \in \mathbb{N}$. Mais le prolongement par continuité de cette fonction n'est possible que pour $a \in 1 + p\mathbb{Z}_p$. Dans le cas contraire, on a, au mieux, <u>un prolongement à partir d'une suite d'entiers</u> $k \equiv i \pmod{p-1}$ <u>où</u> $i = 0, 1, \ldots, p-2$. En effet, il suffit de prendre la fonction $A \to \langle a \rangle^s \omega^i(a)$ où $\langle a \rangle = a\omega^{-1}(a)$. On notera cette fonction $(a)_i^s$ et on remarquera qu'elle est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$, d'ordre 1 si $a \neq 1$.

THEOREME 6. - <u>Pour chaque caractère primitif</u> χ, <u>localement constant sur</u> $\mathbb{Z}_p$, <u>pour chaque suite d'entiers</u> $k = i+l(p-1)$ <u>où</u> $i = 0, 1, \ldots, p-1$, <u>il existe une fonction méromorphe unique</u> $L_{p,i}(s,\chi) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p(\chi)$ <u>vérifiant pour tous les entiers naturels</u> k <u>de la suite</u> : $L_{p,i}(1-k,\chi) = (1-\chi(p)p^{k-1})\, L(1-k,\chi)$. <u>De plus</u>, $L_{p,i}(s,\chi)$ <u>est localement analytique sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>si et seulement si</u> χ <u>est distinct de</u> ω^{-i-1}. <u>Sinon</u>, $L_{p,i}(s,\chi)$ <u>admet un pôle simple en</u> $s = 1$ (<u>on obtient alors une fonction zeta</u> p-<u>adique notée</u>

$\zeta_{p,i}(s))$. Enfin, pour $c \neq 1$ dans $\mathbb{Z}_p^\times$, $L_{p,i}(s,\chi)$ admet la représentation intégrale - analogue d'une transformation de Mellin :

$$L_{p,i}(s,\chi) = \frac{1}{c\chi(c)(c)_i^{-s}-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)(x)_i^{-s}\, d\mu_c(\chi)$$

avec $s \neq 1$ éventuellement.

Démonstration. - La quantité $c\chi(c)(c)_i^{-s} - 1 = (\chi\omega^{i+1})(c)\langle c\rangle^{1-s}-1$ ne peut s'annuler que si $s = 1$ et $(\chi\omega^{i+1})(c) = 1$; donc pour $s \neq 1$ la représentation donnée est définie quel que soit χ ; enfin, pour $s = 1$, si $\chi\omega^{i+1} \neq \chi_o$, on peut trouver un $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $(\chi\omega^{i+1})(c) \neq 1$.

D'autre part, les fonctions $s \rightarrow (a)_i^s$, pour $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, sont développables en séries entières pour $|s| \leq 1$ et l'on vérifie aisément que l'intégrale et la quantité au dénominateur sont analytiques dans ce domaine ; d'où la méromorphie des $L_{p,i}(s,\chi)$.

Un calcul immédiat montre que l'égalité voulue en $s = 1-k$ est satisfaite pour $k = i+1(p-1)$. Une telle suite étant dense dans $\mathbb{Z}_p$ ceci prouve que les $L_{p,i}$ sont uniques et que leur expression intégrale est indépendante du $c \neq 1$ choisi dans $\mathbb{Z}_p^\times$. ∎

Remarque 9. - Les fonctions d'Iwasawa sont obtenues par interpolation sur une suite d'entiers $(1-k)$ avec $k \equiv 0(p-1)$, donc pour $i = p-2$ ici. D'où avec ces notations :

$$L_p(s,\chi) = \frac{1}{\chi(c)\langle c\rangle^{1-s}-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} (\chi\omega^{-1})(x)\langle x\rangle^{-s}\, d\mu_c(x)$$

et

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{\langle c\rangle^{1-s}-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega^{-1}(x)\langle x\rangle^{-s}\, d\mu_c(x) .$$

Ces fonctions sont les fondamentales puisque $L_{p,i}(s,\chi) = L_p(s,\chi\omega^{i+1})$

THEOREME 7. - <u>Avec la distribution</u> τ^* , <u>on peut écrire</u> :

$$L_{p,i}(s,\chi) = L_p(s,\chi\omega^{i+1}) = \frac{1}{s-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} (\chi\omega^{i+1})(x)\langle x\rangle^{1-s}\,d\tau^*(x)$$

$$\zeta_{p,i}(s) = \zeta_p(s) = \frac{1}{s-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^{1-s}\,d\tau^*(x) .$$

Démonstration. - Dans le théorème 6, la représentation intégrale se présente sous la forme d'un quotient de $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\,(x)_i^{-1}\,d\mu_c(x)$ par la quantité $c\chi(c)(c)_i^{-s}-1$, tous deux nuls pour $c = 1$. On passe à la limite quand $c \to 1$ en prenant le quotient des dérivées par rapport à c , en $c = 1$; pour l'intégrale on utilise la proposition 10 ∎

La simplicité des expressions obtenues au théorème 7 permet d'établir un lien entre ζ_p et $\log\Gamma_p$.

COROLLAIRE 1. - ζ_p <u>admet le développement en série de Laurent suivant</u>, <u>valable pour</u> $s \in \mathbb{Z}_p$:

$$\zeta_p(s) = \frac{1-p^{-1}}{s-1} + \gamma_p + \sum_{n\geq 1} a_n(s-1)^n$$

avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log^n\langle x\rangle\,d\tau^*(x)$.

Démonstration. - Pour $s \in \mathbb{Z}_p$, on a $\langle x\rangle^{1-s} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \log^n\langle x\rangle \frac{(s-1)^n}{n!}$; cette série de fonctions localement analytiques en x , d'ordre 1, converge dans $\mathrm{Ana}_1(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Q}_p)$, donc on peut l'intégrer termes à termes au moyen de τ^* . Si l'on pose $\zeta_p(s) = \frac{a-1}{s-1} + a_o + \sum_{n\geq 1} a_n(s-1)^n$, on obtient la forme voulue pour a_n et en particulier :

$$a_{-1} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} d\tau^*(x) = 1-\frac{1}{p}$$

$$a_o = -\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log\langle x\rangle\,d\tau^*(x) = \gamma_p \quad \text{par définition} ∎$$

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout entier</u> $m \geq 2$, $m \equiv 1 (p-1)$ <u>on a</u> :

$\zeta_p(m) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \gamma_p(m)$ <u>où</u> $\gamma_p(m)$ <u>est définie à la proposition</u> 3.

<u>Démonstration</u>. - Immédiate.

<u>Remarque 9</u>. - Pour les fonctions $L_{p,i}(s,\chi)$ on peut aussi obtenir un développement en série au voisinage de $s = 1$; par exemple, on a :

$$L_p(s,\chi) = \sum_{n\geq 0} a_n (s-1)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x) \log^{n+1} \langle x \rangle \, d\tau^*(x) \ .$$

Mais ces intégrales sont plus difficiles à évaluer, a_o donnant d'ailleurs $L_p(1,\chi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Am]$_1$ Y. AMICE - Interpolation p-adique. <u>Bull. Soc. Math</u>. Fr 92, 117-180 (1964).

[Am]$_2$ Y. AMICE - Nombres p-adiques. <u>P.U.F.</u> Paris (1975).

[Bo] N. BOURBAKI - Fonctions d'une variable réelle. Ch.4-7, <u>Paris Hermann</u> (1961).

[Di] J. DIAMOND - The p-adic log-gamma function and p-adic Euler constants. Trans. Amer. Math. Soc. 233, 321-337 (1977).

[Iw] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. <u>Princeton Univ. Press</u> (1972).

[K.L.] T. KUBOTA & M.W. LEOPOLDT - Eine p-adische Theorie der Zetawerte. J. Reine Angew. Math. 214/215, 328-339 (1964).

[Ko] N. KOBLITZ - p-adic numbers, p-adic analysis and zeta function. Graduate Texts in Mathematics n°58. <u>Springer Verlag</u> (1977).

[La] S. LANG - Introduction to Modular Forms. <u>Springer Verlag</u> (1976).

[Mah] K. MAHLER - An interpolation series for a continuous function of a p-adic variable. J. Reine Angew Math. 199, 23-34 (1958).

[Maz] B. MAZUR - Analyse p-adique. Rapport Bourbaki (1972).

[Mo] Y. MORITA - A p-adic analogue of the Γ-function. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22, 255-266 (1975).

[Vo] A. VOLKENBORN - Eine p-adische Integrale und seine Anwendungen Dissertation Universität Köhn (1971).

[We] C.S. WEISMAN - On p-adic differentiability. J. of Number Theory 9, 79-86 (1977).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)

3. - CALCUL INTEGRAL DE $L_p(1,\chi)$.

Pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $\chi(c) \neq 1$, la remarque suivant le théorème 6 montre que $L_p(1,\chi) = \frac{1}{\chi(c)-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\, x^{-1} d\mu_c(x)$. D'autre part, par un argument d'analyse de Fourier sur $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, il est connu que

$\chi(x) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{i=1}^{f} \bar{\chi}(i)\, \xi^{-ix}$ où ξ désigne une racine primitive f-ème de l'unité

et $\tau(\chi) = \sum_{j=1}^{f} \chi(j)\, \xi^j$ la somme de Gauss associée.

Comme $|\xi - 1| = p^{-1/p^{\alpha-1}(p-1)}$ tout revient à calculer l'intégrale :
$H(u,c) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} u^x x^{-1} d\mu_c(x)$ pour $u \in \mathbb{C}_p$ tel que $|u-1| < 1$.

Dans tout ce qui suit, log désigne la fonction logarithmique définie sur $\mathbb{C}_p^\times$ comme dans [Iw] .

LEMME 1. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ on a $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-1} d\mu_c(x) = -(1-\frac{1}{p}) \log c$.

Démonstration. - Cette intégrale donne $H(1,c)$; en utilisant la propriété (iv) de μ_c on obtient l'équation fonctionnelle $H(1,bc) = H(1,b) + H(1,c)$; d'autre part, par dérivation par rapport à c , on voit que

$$\frac{\partial H}{\partial c}(1,c) = -(1-\frac{1}{p})\frac{1}{c} ;$$

d'où le résultat ∎

LEMME 2. - Pour $t \in \mathbb{C}_p$ tel que $|t| < p^{-1/p-1}$ on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp(tx)\, d\mu_c(x) = \frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{c}{\exp(ct)-1}$$

la formule étant vraie en $t = 0$ par continuité.

Démonstration. - Intégrer terme à terme la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et utiliser le fait que $\sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{y^m}{m!} = \frac{y}{\exp(y)-1}$ pour $y \neq 0$ tel que $|y| < p^{-1/p-1}$.

PROPOSITION 11. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, $H(u,c)$ est analytique pour $u \in \mathbb{C}_p$ tel que $|u-1| < 1$ et admet l'expression :

$$H(u,c) = \frac{1}{p} \log(\frac{u^{p^c}-1}{u^p-1}) - \log(\frac{u^c-1}{u-1})$$

la formule restant vraie, par continuité, en une racine p-ème de l'unité.

Démonstration. - Pour $u \in \mathbb{C}_p$ avec $|u-1| < 1$ on a, uniformément pour $x \in \mathbb{Z}_p$: $u^x = \sum_{n=0}^{\infty} (u-1)^n \binom{x}{n}$, d'où par intégration terme à terme : $H(u,c) = \sum_{n=0}^{\infty} (u-1)^n a_n(c)$ où $a_n(c) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-1}\binom{x}{n} d\mu_c(x)$ vérifie $|a_n(c)| \leq 1$; on en déduit l'analycité de $H(u,c)$.

Pour effectuer le calcul, on suppose d'abord que $|u-1| < p^{-1/p-1}$ auquel cas on a $u^x = \exp(x \log u)$; d'autre part, par dérivation on a $\frac{\partial H}{\partial u}(u,c) = u^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} u^x d\mu_c(x) = u^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} (u^x - u^{px}) d\mu_c(x)$; le lemme 2 s'applique avec $t = \log u$ ou $p \log u$; il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,c) = \frac{1}{u}\left[(\frac{1}{u-1} - \frac{c}{u^c-1}) - \frac{1}{p}(\frac{p}{u^p-1} - \frac{pc}{u^{pc}-1})\right]$$

par la formule de dérivation : $\frac{d}{du}[\log(1-u^{-a})] = \frac{au^{-1}}{u^a-1}$ on tire : $H(u,c) = h(c) + \frac{1}{p} \log(\frac{u^{pc}-1}{u^p-1}) - \log(\frac{u^c-1}{u-1})$ où $h(c)$ est une fonction que l'on détermine en faisant tendre u vers 1 ; le lemme 1 donne alors $h(c) = 0$.

Dans la formule, les deux quotients figurant dans les log sont en fait analytiques pour $|u-1| < 1$ ce qui explique que cette formule est valable même pour une racine p-ème de l'unité∎

Remarque. - Un calcul immédiat montre d'ailleurs que le développement en série de H au voisinage de 1 commence comme suit :

$$H(u,c) = -(1-\frac{1}{p})\log c + \frac{(p-1)(c^2-1)}{24}(u-1)^2 + \dots$$

<u>Application à</u> $L_p(1,\chi)$.

Avec la proposition 11, appliquée à $u = \bar{\xi}^i$, on peut écrire :

$$(\chi(c)-1)L_p(1,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{i=1}^{f} \bar{\chi}(i)\, H(\bar{\xi}^i, c)$$
$$= \frac{\tau(\chi)}{f}\left[(S_1-S_c) - \frac{1}{p}(S_p-S_{pc})\right]$$

où $S_a = \sum_{i=1}^{f} \bar{\chi}(i)\log(\bar{\xi}^{ia}-1)$. Ceci n'est pas défini si $\xi^p = 1$ mais dans ce cas, par un argument de continuité, on voit que $S_p - S_{pc} = \sum_i \bar{\chi}(i)\log c = 0$. On peut donc supposer pour continuer que $f = p^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Alors il existe un entier j tel que $j \equiv 1(p^{\alpha-1}\mathbb{Z}_p)$ et $j \not\equiv 1\,(p^\alpha \mathbb{Z}_p)$ et par un calcul connu on voit que $S_p = \bar{\chi}(j)S_p$ d'où $S_p = 0$. Même chose avec S_{pc} . Le même calcul avec l'unité p-adique c montre que $S_c = \chi(c)S_1$ d'où finalement $(\chi(c)-1)\,L_p(1,\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f}(\chi(c)-1)S_1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{L_p(1,\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{i=1}^{f} \bar{\chi}(i)\,\log(1-\xi^{-i})} \quad .$$