GÉRARD GOUT

Distributions p -adiques et fonctions arithmétiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-27

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A7_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Grenoble

DISTRIBUTIONS p -ADIQUES
ET FONCTIONS ARITHMETIQUES

par

Gérard GOUT

§ 0 - INTRODUCTION

Les deux outils essentiels de la théorie analytique des nombres usuelle sont la théorie des fonctions analytiques et la théorie de l'intégrale de Riemann. En p -adique, la première théorie est bien avancée tandis que la deuxième -à cause de l'absence d'une mesure de Haar utile- ne fait qu'émerger depuis que Mazur a introduit la mesure qui porte son nom. Pourtant, de nombreux auteurs -à travers l'utilisation de formes linéaires continues sur des espaces fonctionnels- font de la théorie de la mesure sans en utiliser le formalisme intégral ; notamment Kubota et Leopoldt, avec leur définition des fonctions L p -adiques.

L'objet de ce travail est d'étudier les distributions sur $\mathbb{Z}_p$ afin de dégager de façon la plus canonique possible, les plus intéressantes d'entre elles du point de vue de la technique intégrale.

Au § 1 , après quelques idées générales sur les distributions, on introduit la classe des distributions formelles sur $\mathbb{Z}_p$ dont les piliers sont les distributions de Bernoulli (théorème 1). Ce paragraphe est essentiellement une ré-exposition des chapitres XII et XIII du livre de Lang.

Au § 2 , on construit des mesures τ_a , de façon additive à partir des distributions de Bernoulli (théorème 2). Ces mesures ont des propriétés agréables , en particulier elles vérifient un théorème de " Δ -primitives" (ces dernières étant déjà apparues comme solutions d'équations aux différences finies). Enfin , grâce à cette intégrale , on définit une fonction gamma p-adique proche de celle introduite par Morita , et on en donne très simplement quelques propriétés.

Au § 3 , on retrouve les mesures μ_c de Mazur par la construction multiplicative bien connue (attention : par souci de simplification , le paramètre c choisi ici est l'inverse de celui des auteurs précédents). En étudiant la fonction $G(c) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x) d\mu_c(x)$, on met en lumière un lien entre ces mesures et celles du § 2 , au moyen de la distribution τ^* (propositions 7 et 10). Tout ceci est appliqué aux fonctions L p-adiques , comme dans le livre de Koblitz . On obtient cependant une forme intégrale plus simple (théorème 7) et aussi un lien entre la fonction zêta p-adique et la fonction log-gamma p-adique (corollaires 1 et 2 de la fin). (*)

§ 1 - GENERALITES SUR LES DISTRIBUTIONS p-ADIQUES

1. - DISTRIBUTIONS.

Soient X un espace compact totalement discontinu et $\text{Ouv}(X)$ l'ensemble de ses ouverts . Une distribution sur X , à valeur dans un groupe abélien V , est une application $\mu : \text{Ouv}(X) \rightarrow V$ vérifiant la

(*) Après son exposé , l'auteur apprend que N. Koblitz -dans un article à paraître aux Transactions of the American Mathematical Society- a déjà établi ce lien . Il faut signaler aussi le travail de Diamond qui construit une autre fonction gamma en se plaçant sur le complété $\mathbb{C}_p$ de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

propriété additive suivante :

- (A) l'image d'une réunion disjointe de deux ouverts est égale à la somme des images de chaque ouvert.

Si K est un anneau (commutatif unitaire) d'opérateurs sur V , une distribution μ opère sur l'espace $\text{Esc}(X,K)$ des fonctions localement constantes sur X , à valeurs dans K , de la façon suivante : si U est un ouvert de X et f_U sa fonction caractéristique, on pose $\mu(f_U) = \mu(U)$; puis par linéarité, on déduit que, si $f : X \rightarrow K$ est constante sur les ouverts $U_1 \dots U_n$, formant partition de X , on a :

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \cdot \mu(U_i) \quad \text{où } x_i \text{ est un point de } U_i .$$

Par référence au cas usuel, on note, cette somme sous forme intégrale :

$$\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x) .$$

Si V est un K -module, $\text{Esc}(X,K)$ également, et l'intégrale précédente définit une application K -linéaire sur cet espace. Réciproquement la donnée d'une telle application permet de redéfinir la distribution μ par la même formule : $\mu(U) = \mu(f_U)$.

Sous ces hypothèses, l'ensemble $\text{Distr}(X,V)$ des distributions sur X est un K -module sur lequel $\text{Esc}(X,K)$ opère par la formule : $(f \circ \mu)(g) = \mu(f \cdot g)$ où f et g sont des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans K

Une distribution μ sur X peut se transporter à un autre espace Y totalement discontinu dans les conditions suivantes : si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme, on peut poser, pour tout ouvert U de Y , $\nu(U) = \mu(\varphi(U))$; alors l'application $\nu : \text{Ouv}(Y) \rightarrow V$ est une distribution sur Y ; en notation intégrale on obtient, pour toute fonction f de $\text{Esc}(X,K)$,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_Y (f \circ \varphi)(y) d\nu(y) .$$

Si K est un corps valué complet et V un espace vectoriel to-

pologique, on peut définir différents espaces fonctionnels sur X contenant $\text{Esc}(X,K)$, il est parfois possible de prolonger une distribution μ sur X en une application linéaire continue : on dit alors que μ est une distribution sur l'espace fonctionnel en question ; lorsqu'il s'agit de l'espace $\text{Cont}(X,K)$ des fonctions continues, muni de la norme de la convergence uniforme, on dit que μ est une mesure sur X . Par densité de $\text{Esc}(X,K)$ dans $\text{Cont}(X,K)$ on déduit :

PROPOSITION 1. - Une distribution μ sur X à valeurs dans un K -Banach V est une mesure sur X si, et seulement si, il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout ouvert U de X , on ait $\|\mu(U)\|_V \leq M$. Alors, pour toute fonction f de $\text{Cont}(X,K)$, on a la majoration :

$$\left\| \int_X f(x) d\mu(x) \right\|_V \leq M \|f\| .$$

Un exemple classique de mesures est celui des mesures de Dirac δ_a , définies, pour $a \in X$ et $f \in \text{Cont}(X,K)$ par $\delta_a(f) = f(a)$. Lorsque X est un groupe, on peut chercher s'il existe des mesures de Haar, donc d'abord des distributions μ vérifiant :

$$\mu(U) = \mu(x \cdot U) = \mu(U \cdot x) \text{ pour tout ouvert } U \text{ de } X \text{ et tout } x \text{ de } X .$$

En appliquant cette condition à la famille des sous-groupes ouverts et distingués H de X , on tire que $\mu(H) = [X:H]^{-1} \mu(X)$. La proposition montre alors que μ est une mesure si, et seulement si, la famille des $[X:H]_K$ est minorée par un réel strictement positif lorsque H varie. C'est par exemple le cas de $X = \mathbb{Z}_p$ lorsque K est le corps des nombres réels ou un corps de nombres ℓ -adiques pour $\ell \neq p$.

Comme dans le cas usuel, on peut donner un théorème de convergence des sommes de Riemann : si f est une fonction de $\text{Cont}(X,K)$, à toute partition de X en ouverts U_i , $1 \leq i \leq n$, à tout choix de points $x_i \in U_i$, on peut associer la somme $S(f, U_i, x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mu(U_i)$. Une telle somme étant l'intégrale d'une fonction localement constante, on a :

PROPOSITION 2. - Si μ est une mesure sur X , les sommes de Riemann $S(f, U_i, x_i)$ tendent vers l'intégrale de f sur X lorsque les diamètres des ouverts U_i tendent vers zéro.

2. - ETUDE DU CAS DE $\mathbb{Z}_p$.

En utilisant la structure profinie de $\mathbb{Z}_p$, on se propose de montrer comment les polynômes de Bernoulli apparaissent dans certaines distributions sur $\mathbb{Z}_p$.

PROPOSITION 3. - Soit X un ensemble profini, limite projective d'un système d'applications surjectives $t_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ où X_n est un ensemble fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors toute distribution μ de $\text{Distr}(X, V)$ est donnée par une famille d'applications $\mu^{(n)} : X_n \rightarrow V$ reliées entre elles par les formules

$$(B) : \quad \mu^{(n)}(x) = \sum_{\substack{y \in X_{n+1} \\ t_n(y) = x}} \mu^{(n+1)}(y) \quad , \quad \forall x \in X_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Démonstration. - Si $r_n : X \rightarrow X_n$ désigne la projection canonique, on sait que, pour tout $x \in X_n$, $r_n^{-1}(x)$ est un ouvert de X : on pose donc $\mu^{(n)}(x) = \mu(r_n^{-1}(x))$; les formules se déduisent alors de la condition d'additivité (A) pour μ . La réciproque est immédiate puisque les ouverts du type précédent forment une base de $\text{Ouv}(X)$ ■

Chaque application de X_n dans V est un élément du groupe V^{X_n} ; d'autre part, chaque application $t_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ se prolonge naturellement en un morphisme de groupes $t_n(V) : V^{X_{n+1}} \rightarrow V^{X_n}$; les formules reliant les $\mu^{(n)}$ montrent exactement que la famille des $\mu^{(n)}$ est un élément de la limite projective des $t_n(V)$; d'où :

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses de la proposition 3, le groupe $\text{Distr}(X, V)$ est isomorphe à la limite projective des applications $t_n(V) : V^{X_{n+1}} \rightarrow V^{X_n}$.

Lorsque X est un groupe profini et V un anneau commutatif, chaque groupe V^{X_n} s'identifie au groupe additif de l'algèbre de groupe $V[X_n]$; d'où, avec un changement de notations :

COROLLAIRE 2. - Soit G un groupe profini, limite des morphismes surjectifs $t_n : G_{n+1} \rightarrow G_n$ et soit A un anneau commutatif. Alors le groupe $\text{Distr}(G, A)$ s'identifie au groupe additif de l'algèbre de groupe $A[[G]]$.

Exemple. - Si A est l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$, on sait que $A[[\mathbb{Z}_p]]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[[T]]$.

Remarque 1. - La multiplication interne à l'algèbre $A[[G]]$ peut s'interpréter dans $\text{Distr}(G, A)$ par un produit de convolution : pour $\lambda, \mu \in \text{Distr}(G, A)$ et $x \in G_n$ on pose $(\lambda * \mu)(r_n^{-1}(x)) = \sum_{y+z=x} \lambda^{(n)}(y) \mu^{(n)}(z)$.

Désormais, on suppose que V est le groupe additif d'un corps commutatif K de caractéristique 0 et on se propose de construire explicitement des distributions sur $\mathbb{Z}_p$, considéré comme limite projective des morphismes usuels $t_n : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On désigne par $s_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ la section de $r_n : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $s_n(x)$ étant défini comme l'unique entier compris entre 0 et p^n-1 tel que $r_n \circ s_n(x) = x$. Donc $r_n \circ s_n$ est l'identité sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $e_n = s_n \circ r_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après la proposition 3, une distribution μ sur $\mathbb{Z}_p$ est définie par des applications $\mu^{(n)} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow K$ reliées par les formules (B). Comme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est fini, on peut supposer qu'il existe, pour chaque n , un polynôme P_n de $K[X]$, de degré au plus p^n-1 , tel que $\mu^{(n)}(x) = P_n(s_n(x))$ pour $x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. D'autre part, si $t_n(y) = x$, on a $s_{n+1}(y) = s_n(x) + kp^n$ où $k = 0, 1, \dots, p-1$. Les formules (B)

donnent $P_n(s_n(x)) = \sum_{k=0}^{k=p-1} P_{n+1}(s_n(x) + kp^n)$ ou encore

$$(C) : \boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=p-1} P_{n+1}(X + kp^n)} \quad \text{pour } p^n \text{ valeurs de } X .$$

P_n étant connu, les p^n relations vérifiées par P_{n+1} ne déterminent pas nécessairement ce polynôme. Une classe importante de distributions sera constituée par les distributions formelles pour lesquelles les relations (C) sont des égalités dans $K[X]$. En utilisant la technique des opérateurs de composition de Bourbaki ([Bo]), on peut déterminer l'ensemble de ces distributions :

THEOREME 1. - L'ensemble des distributions formelles sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans un corps commutatif K , de caractéristique 0, est un K -espace vectoriel dont une base est constituée des distributions β_m définies, pour chaque entier naturel m , sur chaque ouvert élémentaire $(x + p^n \mathbb{Z}_p)$ de $\mathbb{Z}_p$, par

$$\beta_m(x + p^n \mathbb{Z}_p) = p^{n(m-1)} B_m\left(\frac{e_n(x)}{p^n}\right)$$

où B_m désigne le $m^{\text{ème}}$ polynôme de Bernoulli.

Les β_m sont appelées distributions de Bernoulli et l'on peut remarquer que β_0 engendre le sous-espace des distributions de Haar.

Démonstration. - Soit D l'opérateur de dérivation dans $K[X]$, et pour $a \in K$, soit e^{aD} l'opérateur de translation $P(X) \rightarrow P(X+a)$; les relations (C) s'écrivent

$$P_n = \left(\sum_{k=0}^{k=p-1} e^{kp^n D} \right) P_{n+1} .$$

Pour $a \neq 0$, l'opérateur $V_a = \frac{e^{aD} - 1}{D}$ est inversible; donc, de façon équivalente on a : $\left(\frac{e^{p^n D} - 1}{D} \right) P_n = \left(\frac{e^{p^{n+1} D} - 1}{D} \right) P_{n+1}$.

A une distribution formelle μ , on a ainsi associé le polynôme

$M_\mu = \sum_p^n \cdot P_n$, indépendant en fait de n . L'application $M : \mu \rightarrow M_\mu$

est alors un K -isomorphisme de l'ensemble considéré dans le K -espace vectoriel $K[X]$. Une base du premier peut s'obtenir par image réciproque de la base canonique $1, X, \dots, X^m \dots$ de $K[X]$. En posant $\beta_m = M^{-1}(X^m)$ un calcul classique montre que le $n^{\text{ème}}$ polynôme P_n associé à β_m est $p^{n(m-1)} B_m(\frac{X}{p^n})$ d'où le résultat puisque $\beta_m(x+p^n\mathbb{Z}_p) = P_n(e_n(x))$ ■

Remarque 2. - Pour une distribution formelle μ , tous les polynômes associés P_n ont le même degré, à savoir celui de $M_\mu(X)$.

Remarque 3. - A une distribution formelle μ , donnée par des polynômes P_n , on peut associer la distribution formelle dérivée μ' donnée par les P'_n (les relations formelles (C) sont bien vérifiées) et alors $M_{\mu'} = M'_\mu$. Par exemple, on a $\beta'_m = m\beta_{m-1}$.

La question se pose maintenant de savoir s'il existe des mesures parmi les distributions formelles, dans le cas où l'on n'a pas de mesures de Haar, c'est-à-dire lorsque K est un corps valué complet, extension de $\mathbb{Q}_p$.

Pour étudier le comportement "asymptotique" d'une distribution, on a

LEMME UTILE. - Soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\text{Distr}(\mathbb{Z}_p, K)$ vérifiant la condition : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |\mu_1(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x+p^n\mathbb{Z}_p)| = 0$.

Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. - Tout ouvert U de $\mathbb{Z}_p$ s'écrit, pour n assez grand, comme réunion finie d'ouverts élémentaires disjoints $(x_i + p^n\mathbb{Z}_p)$, d'où :

$$\mu_1(U) - \mu_2(U) = \sum_i [\mu_1(x_i + p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x_i + p^n\mathbb{Z}_p)]$$

par l'inégalité ultramétrique on déduit :

$$\begin{aligned} |\mu_1(U) - \mu_2(U)| &\leq \max_i |\mu_1(x_i + p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x_i + p^n\mathbb{Z}_p)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |\mu_1(x + p^n\mathbb{Z}_p) - \mu_2(x + p^n\mathbb{Z}_p)| \end{aligned}$$

à la limite on obtient $\mu_1(U) = \mu_2(U)$ ■

Ce lemme autorise l'usage d'équivalents pour l'étude de μ : on dit que les applications $\varphi_n : \mathbb{Z}_p \rightarrow K$ sont des équivalents pour μ si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \varphi_n(x)| = 0 .$$

PROPOSITION 4. - Une distribution formelle μ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans un corps K comme ci-dessus, admet pour chaque n , l'équivalent :

$$\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) \approx \frac{1}{p^n} M_\mu(e_n(x)) - \frac{1}{2} M'_\mu(e_n(x))$$

où M_μ désigne le polynôme associé à μ dans $K[X]$ (cf. dém. du th.1).

En particulier, $\beta_m(x+p^n\mathbb{Z}_p) \approx \frac{e_n^m(x)}{p^n} - \frac{m}{2} e_n^{m-1}(x)$.

Démonstration. - Si M_μ est de degré m , on obtient au moyen de $V_{p^n}^{-1}$:

$$P_n = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k!} p^{nk} M_\mu^{(k)} = \frac{1}{p^n} M_\mu + \frac{b_1}{1!} M'_\mu + \frac{b_2}{2!} p^n M''_\mu + \dots + \frac{b_m}{m!} p^{n(m-1)} M_\mu^{(m)} .$$

Quand n varie, M_μ , ainsi que ses dérivées, sont des fonctions bornées sur $\mathbb{Z}_p$. D'autre part, les nombres de Bernoulli $b_1, \dots, b_m$ le sont également. Donc, sur $\mathbb{Z}_p$, on a

$$P_n(x) \approx \frac{1}{p^n} M_\mu(x) + \frac{b_1}{1!} M'_\mu(x) .$$

Comme $b_1 = -\frac{1}{2}$ et $\mu(x+p^n\mathbb{Z}_p) = P_n(e_n(x))$ le résultat s'ensuit ■

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, l'unique distribution formelle sur $\mathbb{Z}_p$ qui est une mesure, est la distribution nulle.

Démonstration. - Il faut vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x = 0, 1, \dots, p^n - 1$, l'ensemble des $P_n(x)$ est borné ; avec l'équivalent précédent, et à cause du coefficient $\frac{1}{p^n}$ ceci revient à $M_\mu(x) = 0$, c'est-à-dire à $M_\mu = 0$.

§ 2 - LES MESURES ADDITIVES τ_a SUR $\mathbb{Z}_p$

K désigne désormais un corps valué complet, extension de $\mathbb{Q}_p$.

1. - DEFINITION DES MESURES τ_a .

N'ayant pas obtenu de mesures sur $\mathbb{Z}_p$, à partir des distributions de Bernoulli, par le seul moyen des opérations vectorielles, il est naturel, dans un premier temps, d'utiliser des opérations de transport par translation : pour $a \in \mathbb{Z}_p$, la translation $x \rightarrow x-a$ permet d'associer à une distribution μ sur $\mathbb{Z}_p$, une autre distribution μ_a définie par $\mu_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \mu(x-a+p^n\mathbb{Z}_p)$. On notera symboliquement $\mu_a(x) = \mu(x-a)$.

THEOREME 2. - Pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les distributions $\tau_{m,a}(x) = -\beta_m(x) + \beta_m(x-a) + a\beta'_m(x-a) + \dots + \frac{a^m}{m!} \beta^{(m)}_m(x-a)$ sont des mesures sur $\mathbb{Z}_p$ reliées entre elles par

$$\tau_{m,a}(x) = mx^{m-1} \tau_{1,a}(x) .$$

Démonstration. - Soit $(P_{m,n})_n$ la famille des polynômes associés à β_m ; la formule de Taylor montre que

$$\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) = P_{m,n}[e_n(x-a)+a] - P_{m,n}[e_n(x)] ;$$

par définition de e_n , on peut poser $e_n(x-a) + a = e_n(x) + p^n f_n(x,a)$

avec $f_n(x,a) \in \mathbb{Z}_p$; en utilisant l'équivalent $\frac{X^m}{p^n} - \frac{m}{2} X^{m-1}$ de $P_{m,n}(X)$,

on déduit que $\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq m f_n(x,a) e_n^{m-1}(x)$: ce qui montre que

$\tau_{m,a}$ est une mesure sur $\mathbb{Z}_p$ avec, pour tout ouvert U , la majoration $|\tau_{m,a}(U)| \leq 1$.

D'autre part, $\tau_{1,a}$ étant une mesure, $\nu(x) = mx^{m-1} \tau_{1,a}(x)$ aussi, et l'on a $\nu(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \int_{x+p^n\mathbb{Z}_p} mt^{m-1} d\tau_{1,a}(t)$. Comme

$\tau_{1,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq f_n(x,a)$, on déduit l'équivalence

$$\tau_{m,a}(x+p^n\mathbb{Z}_p) - \nu(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq \int_{x+p^n\mathbb{Z}_p} m[t^{m-1} - e_n^{m-1}(x)] d\tau_{1,a}(t) .$$

Or, cette intégrale est, en valeur absolue, majorée par

$\sup_{t \in x+p^n\mathbb{Z}_p} |t^{m-1} - e_n^{m-1}(x)| \leq p^{-n}$. D'après le lemme utile, on en déduit

que $\tau_{m,a} = \nu$ ■

Toutes les mesures $\tau_{m,a}$ se déduisent donc de $\tau_{1,a}$; par définition cette dernière est notée τ_a ; on a donc :

$$\underline{\tau_a(x) = \beta_1(x-a) - \beta_1(x) + a\beta_0(x)}$$

ou encore

$$\underline{\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}[e_n(x-a) - e_n(x) + a]} .$$

Cas particuliers.

■ $\tau_0 = 0$.

■ $\tau_1 = \delta_0$ mesure de Dirac à l'origine. (En effet on vérifie que

$$\tau_1(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{e_n(x-1) - e_n(x) + 1}{p^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin p^n\mathbb{Z}_p \\ 1 & \text{si } x \in p^n\mathbb{Z}_p . \end{cases}$$

■ $\tau_n = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence).

Remarque 4. - La relation précédente peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(x) = \eta\beta_0(x) + \beta_1(x-n) - \beta_1(x)$$

on en déduit, pour $f \in \text{Esc}(\mathbb{Z}_p, K)$, une relation de type Euler-Mac Laurin :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = n \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\beta_0(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} [f(x+n) - f(x)] d\beta_1(x) .$$

2. - PROPRIETES DES MESURES τ_a .

- (i) τ_a est une forme linéaire continue sur $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p K)$ vérifiant
 $|\tau_a(f)| \leq \|f\|$.
- (ii) $\tau_a(x-b) = \tau_{a+b}(x) - \tau_b(x)$; en particulier, pour $b = n$ entier naturel non nul on a $\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(x) = \tau_{a+n}(x) - \tau_a(x-n)$.
- (iii) $\tau_{pa}(px) = \tau_a(x)$.
- (iv) $\tau_a(x) + \tau_{1-a}(-x) = \delta_0(x)$.

Démonstration. - La 1ère propriété est conséquence directe du théorème 2. Les autres se prouvent par un calcul direct sur les ouverts élémentaires $x+p^n\mathbb{Z}_p$; par exemple, pour la dernière, on a, avec le 1er membre :

$$\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) + \tau_{1-a}(-x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}[e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) - e_n(x) - e_n(-x) + 1]$$

comme $(x-a) + (-x+a-1) = -1$, on a : $e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) \equiv -1 \pmod{p^n}$; prenant ses valeurs entre 0 et p^n-1 , la seule possibilité est

$$e_n(x-a) + e_n(-x+a-1) = p^n - 1 ;$$

enfin, on vérifie que

$$e_n(x) + e_n(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in p^n\mathbb{Z}_p \\ p^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où finalement $\tau_a(x+p^n\mathbb{Z}_p) + \tau_{1-a}(-x+p^n\mathbb{Z}_p) = \delta_0(x+p^n\mathbb{Z}_p)$ ■

Calcul d'une intégrale fondamentale.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\tau_a(x) = \frac{1}{m+1} [B_{m+1}(a) - B_{m+1}(0)] \quad \text{pour tout entier naturel } m .$$

Démonstration. - Avec les notations du théorème 2, on a

$$x^m \tau_a(x) = \frac{1}{m+1} \tau_{m+1,a}(x) , \text{ d'où}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\tau_a(x) = \frac{1}{m+1} \tau_{m+1,a}(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{m+1} [P_{m+1,0}(e_o(-a)+a) - P_{m+1,0}(e_o(0))]$$

comme $e_o = 0$ et $P_{m+1,0}(X) = B_{m+1}(X)$, le résultat s'ensuit ■

La structure de la formule fait penser à un théorème des primitives.

DEFINITION. Soit $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow K$, on appelle Δ -primitive de f sur $\mathbb{Z}_p$, toute fonction $F : \mathbb{Z}_p \rightarrow K$ telle que $(\Delta F)(x) = F(x+1) - F(x) = f(x)$ sur $\mathbb{Z}_p$.

Si F est une Δ -primitive de f , $F+c$ aussi pour tout $c \in \mathbb{Z}_p$.

PROPOSITION 5. - Toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow K$ admet une Δ -primitive et deux Δ -primitives de f diffèrent d'une constante.

Démonstration. - Par le théorème de Mahler, on sait que $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ admet la base normale $\binom{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, des polynômes binomiaux ; or Δ est un opérateur linéaire sur $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ et continu puisque $\|\Delta f\| \leq \|f\|$; donc si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$, avec $a_n \rightarrow 0$, on déduit

$$(\Delta f)(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \binom{x}{n-1} = \sum_{m \geq 0} a_{m+1} \binom{x}{m}$$

ceci prouve que Δ est surjectif et que son noyau est constitué des fonctions constantes ■

THEOREME 3 (dit des Δ -primitives). - Soient $f \in \text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ et F une Δ -primitive de f sur $\mathbb{Z}_p$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\tau_a(x) = F(a) - F(0) .$$

Démonstration. - Sur les fonctions-polynômes, on a

$\Delta = e^D - 1 = \frac{e^D - 1}{D} \circ D$, donc une Δ -primitive de x^m est une primitive -au sens usuel- de B_m , soit $\frac{1}{m+1} B_{m+1}$. Le théorème s'ensuit puisque les fonctions-polynômes sont denses dans $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ ■

Applications. - $\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{m} d\tau_a(x) = \binom{a}{m+1}$

pour $c \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $c \neq 1$: $\int_{\mathbb{Z}_p} c^x d\tau_a(x) = \frac{c^a - 1}{c - 1}$.

Démonstration. - La 1ère est immédiate puisque $\Delta \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$.

La 2ème se calcule directement sur le développement binomial :

$$c^x = \sum_{n \geq 0} (c-1)^n \binom{x}{n} \quad \blacksquare$$

3. - ETUDE DE LA FONCTION $F(a) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\tau_a(x)$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{Z}_p$ lorsque f est continue et, d'après ce qui précède, F est exactement la Δ -primitive de f nulle en 0.

PROPOSITION 6. - Si f possède l'une des propriétés suivantes sur $\mathbb{Z}_p$: (i) continue, (ii) strictement différentiable, (iii) localement analytique alors F possède la même propriété sur $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. - Chacune de ces propriétés a une caractérisation simple au moyen du développement binomial $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$:

(i) f continue $\Leftrightarrow \lim_n a_n = 0$ [Mah] ;

(ii) f strictement différentiable $\Leftrightarrow \lim_n n |a_n| = 0$ [We] ;

(iii) f localement analytique $\Leftrightarrow \lim_n \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ [Am]₁.

Comme $F(x) = \sum_{m \geq 1} a_{m-1} \binom{x}{m}$ dans les 3 cas, on vérifie que la suite des a_{m-1} satisfait aussi la même propriété $\blacksquare$

COROLLAIRE. - Dans le cas (ii) ou (iii), la dérivée de F vérifie :

$$F'(a) = F'(0) + \int_{\mathbb{Z}_p} f'(x) d\tau_a(x).$$

Démonstration. - Immédiate, puisque F' est alors une Δ -primitive de f' $\blacksquare$

Pour être intéressant, ce corollaire nécessite un moyen de calcul de la dérivée en 0. Le cadre utile pour l'étude des fonctions usuelles est celui de l'espace $\text{Locan}(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions localement analytiques. Lui-même est la réunion, pour $h \in \mathbb{N}$, des espaces de Banach $\text{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$, constitués des fonctions strictement analytiques sur les boules $(i+p^h\mathbb{Z}_p)$, $i=0, \dots, p^h-1$ (cf. [Am]₁).

PROPOSITION 7. - Pour toute fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ on pose : $\tau^*(f) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\tau_a(x)$. Alors, pour chaque $h \in \mathbb{N}$, la restriction de τ^* à l'espace $\text{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$ est une distribution vérifiant l'inégalité :

$$|\tau^*(f)| \leq p^{h+1} \|f\|_h.$$

Démonstration. - On se limite aux fonctions-polynômes qui sont denses dans $\text{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$. Soit $P \in K[X]$; sur chaque boule $i+p^h\mathbb{Z}_p$, on a $P(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{P^{(k)}(i)}{k!} (x-i)^k$ par la formule de Taylor, avec $m = \text{degré de } P$; d'où, par définition :

$$\|P\|_h = \max_i \max_k \left| \frac{P^{(k)}(i)}{k!} p^{hk} \right| \text{ avec } 0 \leq i \leq p^h-1 \text{ et } 0 \leq k \leq m.$$

D'autre part, $\tau^*(P) = \sum_i \sum_k \frac{P^{(k)}(i)}{k!} \int_{i+p^h\mathbb{Z}_p} (x-i)^k d\tau^*(x)$; un calcul facile

donne $\int_{i+p^h\mathbb{Z}_p} (x-i)^k d\tau_a(x) = \frac{p^{hk}}{k+1} [B_{k+1}(\frac{a}{p^h}) - B_{k+1}(0)]$ d'où, par dérivation en $a = 0$:

$$\tau^*(P) = \sum_i \sum_k \frac{P^{(k)}(i)}{k!} p^{h(k-1)} b_k$$

où b_k est le $k^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli. On déduit l'inégalité :

$$|\tau^*(P)| \leq \max_i \max_k \left| \frac{P^{(k)}(i)}{k!} p^{h(k-1)} b_k \right| \leq \|P\|_h p^h \max_k |b_k|$$

le résultat repose alors sur le fait connu que les nombres de Bernoulli sont bornés p -adiquement : $|b_k| \leq p$ (voir par exemple p.15 de [Iw]; voir aussi le § 3, remarque 8 de cet exposé) ■

Remarque 5. - τ^* n'est autre que "l'intégrale de Volkenborn" (cf. [Vo]). L'intérêt est de pouvoir la déduire d'une mesure, en l'occurrence τ_a .

4. - APPLICATION A LA FONCTION GAMMA p-ADIQUE.

Il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle classique : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ puisque la fonction $n \rightarrow n!$ n'est pas continue p-adiquement. Par contre, il est possible de définir un analogue de $\log \Gamma$ au moyen de la relation : $\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x$, qui fait penser à une Δ -primitive du logarithme.

Le logarithme p-adique utilisé ici est la fonction définie par la série usuelle : pour $x \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $\log x = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$. On peut la prolonger à $\mathbb{Z}_p^\times$ au moyen de l'application $x \rightarrow \langle x \rangle$ où $\langle x \rangle$ désigne le représentant de Teichmüller.

On définit une fonction gamma p-adique $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \rightarrow 1+p\mathbb{Z}_p$ par la formule :

$$\log \Gamma_p(a) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log \langle x \rangle d\tau_a(x) .$$

Cette formule est valable puisque l'intégrale est à valeurs dans $p\mathbb{Z}_p$, domaine de définition de l'exponentielle.

Remarque 6. - Il y a une part d'arbitraire dans le choix de cette fonction : d'abord en imposant que $\Gamma_p(a) \in 1+p\mathbb{Z}_p$, ensuite en fixant $\mathbb{Z}_p^\times$ comme domaine d'intégration : ce qui explique que l'on ne trouve pas exactement la fonction de Morita.

Valeurs particulières : $\Gamma_p(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_p(n) = \left\langle \prod_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{k=n-1} k \right\rangle$.

THEOREME 4. - Il existe une et une seule fonction continue

$\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ vérifiant les conditions suivantes : $\Gamma_p(a) = 1$ et
 $\Gamma_p(x+1) = \langle x \rangle \Gamma_p(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}_p^*$, $\Gamma_p(x+1) = \Gamma_p(x)$ pour $x \in p\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. - L'existence d'une telle fonction est une conséquence du théorème des Δ -primitives ; l'unicité résulte du fait que les conditions demandées déterminent la fonction sur $\mathbb{N}^*$, dense dans $\mathbb{Z}_p$ ■

Certaines propriétés de la fonction gamma usuelle ont des analogues p-adiques, par exemple, grâce aux résultats du (3), on a :

PROPOSITION 8. - La fonction $\Gamma_p(a)$ est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ et ses dérivées logarithmiques sont données par les formules suivantes :

$$\frac{\Gamma'_p(a)}{\Gamma_p(a)} = -\gamma_p + \int_{\mathbb{Z}_p^*} x^{-1} d\tau_a(x)$$

et pour $k \geq 2$: $(D^k \log \Gamma_p)(a) = -\gamma_p(k) + (-1)^{k-1} (k-1)! \int_{\mathbb{Z}_p^*} x^{-k} d\tau_a(x)$

avec γ_p , $\gamma_p(k)$ des constantes données par :

$$\gamma_p = - \int_{\mathbb{Z}_p^*} \log \langle x \rangle d\tau^*(x)$$

et pour $k \geq 2$, $\gamma_p(k) = (-1)^k (k-2)! \int_{\mathbb{Z}_p^*} x^{1-k} d\tau^*(x)$.

On peut dire que γ_p est l'analogue p-adique de la constante d'Euler.

Formule des compléments : pour $a \in \mathbb{Z}_p$, $\boxed{\Gamma_p(a) \Gamma_p(1-a) = 1}$.

A démontrer au moyen de la propriété (iv) de la mesure τ_a .

Remarque 7. - On peut effectuer explicitement certains calculs : par exemple, pour γ_p , on obtient, avec les nombres de Bernoulli b_k et

les nombres $s_k = \sum_{i=1}^{p-1} i^{-k}$ ($k \geq 0$) :

$$\gamma_p = -\log \langle (p-1)! \rangle + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} p^{k-1} s_k b_k .$$

§ 3 - LES MESURES MULTIPLICATIVES μ_c SUR $\mathbb{Z}_p$

1. - DEFINITION DES MESURES μ_c .

La technique est la même qu'au § 2 en remplaçant les translations par les homothéties $x \rightarrow cx$ de $\mathbb{Z}_p$ avec $c \in \mathbb{Z}_p^\times$.

THEOREME 5. - Pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les distributions $\mu_{m,c}(x) = \beta_m(x) - c^m \beta_m(c^{-1}x)$ sont des mesures sur $\mathbb{Z}_p$ reliées entre elles par les relations :

$$\boxed{\mu_{m,c}(x) = mx^{m-1} \mu_{1,c}(x)} .$$

Démonstration. - Par définition

$$\mu_{m,c}(x+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{n(m-1)} \left[B_m\left(\frac{e_n(x)}{p^n}\right) - C^m B_m\left(\frac{e_n(c^{-1}x)}{p^n}\right) \right]$$

d'où l'équivalent suivant :

$$\left[\frac{e_n^m(x)}{p^n} - \frac{m}{2} e_n^{m-1}(x) \right] - c^m \left[\frac{e_n^m(c^{-1}x)}{p^n} - \frac{m}{2} e_n^{m-1}(c^{-1}x) \right] .$$

On peut poser $ce_n(c^{-1}x) = e_n(x) + p^n g_n(x,c)$ avec $|g_n| \leq 1$, d'où

finalement : $\mu_{m,c}(x+p^n\mathbb{Z}_p) \simeq m e_n^{m-1}(x) \left[-g_n(x,c) + \frac{1-c}{2} \right]$. On en conclut que $\mu_{m,c}$ est une mesure et que $\mu_{1,c}(x) \simeq \left[-g_n(x,c) + \frac{1-c}{2} \right]$. Le même raisonnement prouve que $\mu_{m,c}(x) = mx^{m-1} \mu_{1,c}(x)$ ■

Toutes les mesures $\mu_{m,c}$ se déduisent de la mesure $\mu_{1,c}$ notée désormais μ_c . Donc on a : $\mu_c(x) = \beta_1(x) - c\beta_1(c^{-1}x)$ ou encore

$$\underline{\mu_c(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{1-c}{2} + p^{-n}[e_n(x) - ce_n(c^{-1}x)]} .$$

2. - PROPRIETES DES MESURES μ_c .

Les mêmes techniques permettent d'énoncer les propriétés suivantes :

- (i) μ_c est une forme linéaire continue sur $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ vérifiant
- $$|\mu_c(f)| \leq \|f\| .$$

- (ii) μ_c est invariante pour la multiplication par p : $\mu_c(px) = \mu_c(x)$.
 (iii) $\mu_c(x-a) = \mu_c(x) + \tau_a(x) - c \tau_{c^{-1}a}(c^{-1}x)$ pour $a \in \mathbb{Z}_p$ et $c \in \mathbb{Z}_p^\times$.
 (iv) $b_{\mu_c}(b^{-1}x) = \mu_{bc}(x) - \mu_b(x)$ pour $b, c \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Calcul d'une intégrale fondamentale : pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) = (1-c^{m+1}) \frac{b_{m+1}}{m+1}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^m d\mu_c(x) = (1-p^m)(1-c^{m+1}) \frac{b_{m+1}}{m+1} .$$

Démonstration. -

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) = \frac{1}{m+1} \mu_{m+1,c}(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{m+1} [\beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p) - c^{m+1} \beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p)]$$

d'où la réponse puisque $\beta_{m+1}(\mathbb{Z}_p) = B_{m+1}(0) = b_{m+1}$.

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^m d\mu_c(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x) - \int_{p\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x)$$

dans la 2e intégrale on effectue le changement de variable $x = py$ et on utilise la propriété (ii) de μ_c ■

Remarque 8. - La propriété (i) donne la majoration $|\int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mu_c(x)| \leq 1$
 d'où $|b_{m+1}| \cdot \left| \frac{1-c^{m+1}}{m+1} \right| \leq 1$ pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^\times$; avec $c = 1+p$ on déduit que $|b_{m+1}| \leq p$: ceci montre que l'ensemble des nombres de Bernoulli vérifie la propriété $pb_m \in \mathbb{Z}_p$.

En raffinant cette méthode, on peut démontrer les congruences de Kummer et de Clausen-Von Staudt (cf. [Ko] p.44).

Etude de la fonction $G(c) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x) d\mu_c(x)$.

G est définie sur $\mathbb{Z}_p^\times$ chaque fois que $g \in \text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$.

PROPOSITION 9. - L'application $g \rightarrow G$ ci-dessus définit une application linéaire et continue entre les espaces de Banach

$\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ et $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p^X, K)$ ■

Démonstration. - La propriété (i) de μ_c montre que, pour $c \in \mathbb{Z}_p^X$, on a : $|G(c)| \leq \|g\|$ d'où aussi $\|G\| \leq \|g\|$, chacune de ces mesures étant la borne supérieure des modules pour $c \in \mathbb{Z}_p^X$ et respectivement $x \in \mathbb{Z}_p$: d'où une application linéaire continue de $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans l'espace des fonctions $F(\mathbb{Z}_p^X, K)$. Le calcul fait pour $g(x) = x^m$ montre que la fonction $G_m(c)$ associée est continue, d'où le résultat par densité des fonctions polynômes dans $\text{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ ■

La proposition 6 du § 2 n'a pas son équivalente ici, cependant on a :

PROPOSITION 10. - Si g est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$, G est dérivable sur $\mathbb{Z}_p^X$ et l'on a :

$$G'(c) = - \int_{\mathbb{Z}_p} xg(cx) d\tau^*(x) .$$

Démonstration. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^X$ fixé et $b \in 1+p\mathbb{Z}_p$ on a, grâce à (iv) :

$$\frac{G(bc) - G(c)}{bc - c} = \frac{1}{b-1} \int_{\mathbb{Z}_p} g(cx) d\mu_b(x)$$

donc $G'(c)$ existe si et seulement si la limite du 2ème membre existe lorsque b tend vers 1 ; or, pour $g_m(x) = x^m$ où $m \in \mathbb{N}$, le calcul montre que $\lim_{b \rightarrow 1} \frac{1}{b-1} \int_{\mathbb{Z}_p} g_m(x) d\mu_b(x) = -b_{m+1} = - \int_{\mathbb{Z}_p} xg_m(x) d\tau^*(x)$ la proposition s'ensuit par densité des polynômes dans les espaces $\text{Ana}_h(\mathbb{Z}_p, K)$ ■

2. - APPLICATIONS AUX FONCTIONS L p-ADIQUES.

Les seuls caractères de Dirichlet, prolongeables par continuité à $\mathbb{Z}_p$, sont ceux de modules une puissance de p ; par exemple, le caractère de Teichmüller ω , primitif de conducteur $p(p \neq 2)$ ou 4 ($p=2$) .

Pour un caractère χ , primitif de conducteur $f = p^\alpha$, calculons pour $k \geq 1$ l'intégrale : $\int_{\mathbb{Z}_p^x} \chi(x) x^{k-1} d\mu_c(x)$.

En explicitant μ_c on trouve d'abord :

$$\frac{1}{k} (1 - \chi(p) p^{k-1}) (1 - \chi(c) c^k) \int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x) d\beta_k(x).$$

Sachant que $\chi(x)$ est localement constant modulo $p^\alpha \mathbb{Z}_p$ on tire :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x) d\beta_k(x) = \frac{1}{f} \sum_{i=0}^{f-1} \chi(i) B_k\left(\frac{i}{f}\right) f^k.$$

A droite, on reconnaît le même nombre de Bernoulli associé à χ et noté $b_k(\chi)$ (voir [Iw]). D'où le résultat suivant : pour $k \geq 1$ et $c \neq 1$, pour χ primitif de conducteur p^α :

$$\frac{1}{\chi(c) c^{k-1}} \int_{\mathbb{Z}_p^x} \chi(x) x^{k-1} d\mu_c(x) = (1 - \chi(p) p^{k-1}) \frac{-b_k(\chi)}{k}.$$

Le membre de droite est exactement la valeur en $s = 1-k$ de la fonction usuelle : $(1 - \chi(p) p^{-s}) L(s, \chi)$. On peut donc espérer définir un analogue p -adique par interpolation des fonctions $k \rightarrow a^k$ où $a \in \mathbb{Z}_p^x$ et $k \in \mathbb{N}$. Mais le prolongement par continuité de cette fonction n'est possible que pour $a \in 1 + p\mathbb{Z}_p$. Dans le cas contraire, on a, au mieux, un prolongement à partir d'une suite d'entiers $k \equiv i \pmod{p-1}$ où $i = 0, 1, \dots, p-2$. En effet, il suffit de prendre la fonction $A \rightarrow \langle a \rangle^s \omega^i(a)$ où $\langle a \rangle = a\omega^{-1}(a)$. On notera cette fonction $(a)_i^s$ et on remarquera qu'elle est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$, d'ordre 1 si $a \neq 1$.

THEOREME 6. - Pour chaque caractère primitif χ , localement constant sur $\mathbb{Z}_p$, pour chaque suite d'entiers $k = i+1(p-1)$ où $i = 0, 1, \dots, p-1$, il existe une fonction méromorphe unique
 $L_{p,i}(s, \chi) : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p(\chi)$ vérifiant pour tous les entiers naturels k de la suite : $L_{p,i}(1-k, \chi) = (1 - \chi(p) p^{k-1}) L(1-k, \chi)$. De plus,
 $L_{p,i}(s, \chi)$ est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si χ est distinct de ω^{-i-1} . Sinon, $L_{p,i}(s, \chi)$ admet un pôle simple en $s = 1$ (on obtient alors une fonction zeta p -adique notée

$\zeta_{p,i}(s)$. Enfin, pour $c \neq 1$ dans $\mathbb{Z}_p^X$, $L_{p,i}(s, \chi)$ admet la représentation intégrale - analogue d'une transformation de Mellin :

$$L_{p,i}(s, \chi) = \frac{1}{c \chi(c) \langle c \rangle_i^{-s} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^X} \chi(x) \langle x \rangle_i^{-s} d\mu_c(\chi)$$

avec $s \neq 1$ éventuellement.

Démonstration. - La quantité $c \chi(c) \langle c \rangle_i^{-s} - 1 = (\chi \omega^{i+1})(c) \langle c \rangle^{1-s} - 1$ ne peut s'annuler que si $s = 1$ et $(\chi \omega^{i+1})(c) = 1$; donc pour $s \neq 1$ la représentation donnée est définie quel que soit χ ; enfin, pour $s = 1$, si $\chi \omega^{i+1} \neq \chi_0$, on peut trouver un $c \in \mathbb{Z}_p^X$ tel que $(\chi \omega^{i+1})(c) \neq 1$.

D'autre part, les fonctions $s \rightarrow (a)_i^s$, pour $a \in \mathbb{Z}_p^X$, sont développables en séries entières pour $|s| \leq 1$ et l'on vérifie aisément que l'intégrale et la quantité au dénominateur sont analytiques dans ce domaine ; d'où la méromorphie des $L_{p,i}(s, \chi)$.

Un calcul immédiat montre que l'égalité voulue en $s = 1-k$ est satisfaite pour $k = i+1(p-1)$. Une telle suite étant dense dans $\mathbb{Z}_p$ ceci prouve que les $L_{p,i}$ sont uniques et que leur expression intégrale est indépendante du $c \neq 1$ choisi dans $\mathbb{Z}_p^X$. ■

Remarque 9. - Les fonctions d'Iwasawa sont obtenues par interpolation sur une suite d'entiers $(1-k)$ avec $k \equiv 0(p-1)$, donc pour $i = p-2$ ici. D'où avec ces notations :

$$L_p(s, \chi) = \frac{1}{\chi(c) \langle c \rangle^{1-s} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^X} (\chi \omega^{-1})(x) \langle x \rangle^{-s} d\mu_c(x)$$

et

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{\langle c \rangle^{1-s} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^X} \omega^{-1}(x) \langle x \rangle^{-s} d\mu_c(x).$$

Ces fonctions sont les fondamentales puisque $L_{p,i}(s, \chi) = L_p(s, \chi \omega^{i+1})$

THEOREME 7. - Avec la distribution τ^* , on peut écrire :

$$L_{p,i}(s, \chi) = L_p(s, \chi \omega^{i+1}) = \frac{1}{s-1} \int_{\mathbb{Z}_p^x} (\chi \omega^{i+1})(x) \langle x \rangle^{1-s} d\tau^*(x)$$

$$\zeta_{p,i}(s) = \zeta_p(s) = \frac{1}{s-1} \int_{\mathbb{Z}_p^x} \langle x \rangle^{1-s} d\tau^*(x) .$$

Démonstration. - Dans le théorème 6, la représentation intégrale se présente sous la forme d'un quotient de $\int_{\mathbb{Z}_p^x} \chi(x) (x)_i^{-1} d\mu_c(x)$ par la quantité $c \chi(c) (c)_i^{-s} - 1$, tous deux nuls pour $c = 1$. On passe à la limite quand $c \rightarrow 1$ en prenant le quotient des dérivées par rapport à c , en $c = 1$; pour l'intégrale on utilise la proposition 10 ■

La simplicité des expressions obtenues au théorème 7 permet d'établir un lien entre ζ_p et $\log \Gamma_p$.

COROLLAIRE 1. - ζ_p admet le développement en série de Laurent suivant, valable pour $s \in \mathbb{Z}_p$:

$$\zeta_p(s) = \frac{1-p^{-1}}{s-1} + \gamma_p + \sum_{n \geq 1} a_n (s-1)^n$$

$$\text{avec } a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathbb{Z}_p^x} \log^n \langle x \rangle d\tau^*(x) .$$

Démonstration. - Pour $s \in \mathbb{Z}_p$, on a $\langle x \rangle^{1-s} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \log^n \langle x \rangle \frac{(s-1)^n}{n!}$; cette série de fonctions localement analytiques en x , d'ordre 1, converge dans $\text{Ana}_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q})$, donc on peut l'intégrer termes à termes au moyen de τ^* . Si l'on pose $\zeta_p(s) = \frac{a_{-1}}{s-1} + a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (s-1)^n$, on obtient la forme voulue pour a_n et en particulier :

$$a_{-1} = \int_{\mathbb{Z}_p^x} d\tau^*(x) = 1 - \frac{1}{p}$$

$$a_0 = - \int_{\mathbb{Z}_p^x} \log \langle x \rangle d\tau^*(x) = \gamma_p \quad \text{par définition} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 2. - Pour tout entier $m \geq 2$, $m \equiv 1(p-1)$ on a :

$$\zeta_p(m) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \gamma_p(m) \quad \text{où } \gamma_p(m) \text{ est définie à la proposition 3.}$$

Démonstration. - Immédiate.

Remarque 9. - Pour les fonctions $L_{p,i}(s, \chi)$ on peut aussi obtenir un développement en série au voisinage de $s = 1$; par exemple, on a :

$$L_p(s, \chi) = \sum_{n \geq 0} a_n (s-1)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \chi(x) \log^{n+1} \langle x \rangle d\tau^*(x) .$$

Mais ces intégrales sont plus difficiles à évaluer, a_0 donnant d'ailleurs $L_p(1, \chi)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Am]₁ Y. AMICE - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. Fr 92, 117-180 (1964).
- [Am]₂ Y. AMICE - Nombres p-adiques. P.U.F. Paris (1975).
- [Bo] N. BOURBAKI - Fonctions d'une variable réelle. Ch.4-7, Paris Hermann (1961).
- [Di] J. DIAMOND - The p-adic log-gamma function and p-adic Euler constants. Trans. Amer. Math. Soc. 233, 321-337 (1977).
- [Iw] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. Princeton Univ. Press (1972).
- [K.L.] T. KUBOTA & M.W. LEOPOLDT - Eine p-adische Theorie der Zetawerte. J. Reine Angew. Math. 214/215, 328-339 (1964).
- [Ko] N. KOBLITZ - p-adic numbers, p-adic analysis and zeta function. Graduate Texts in Mathematics n°58. Springer Verlag (1977).
- [La] S. LANG - Introduction to Modular Forms. Springer Verlag (1976).

- [Mah] K. MAHLER - An interpolation series for a continuous function of a p -adic variable. J. Reine Angew Math. 199, 23-34 (1958).
- [Maz] B. MAZUR - Analyse p -adique. Rapport Bourbaki (1972).
- [Mo] Y. MORITA - A p -adic analogue of the Γ -function. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22, 255-266 (1975).
- [Vo] A. VOLKENBORN - Eine p -adische Integrale und seine Anwendungen Dissertation Universität Köln (1971).
- [We] C.S. WEISMAN - On p -adic differentiability. J. of Number Theory 9, 79-86 (1977).

3. - CALCUL INTEGRAL DE $L_p(1, \chi)$.

Pour tout $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $\chi(c) \neq 1$, la remarque suivant le théorème 6 montre que $L_p(1, \chi) = \frac{1}{\chi(c)-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x) x^{-1} d\mu_c(x)$. D'autre part, par un argument d'analyse de Fourier sur $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, il est connu que

$$\chi(x) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) \xi^{-ix} \quad \text{où } \xi \text{ désigne une racine primitive } f\text{-ème de l'unité}$$

$$\text{et } \tau(\chi) = \sum_{j=1}^f \chi(j) \xi^j \text{ la somme de Gauss associée.}$$

Comme $|\xi-1| = p^{-1/p^{a-1}(p-1)}$ tout revient à calculer l'intégrale :
 $H(u, c) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} u^x x^{-1} d\mu_c(x)$ pour $u \in \mathbb{C}_p$ tel que $|u-1| < 1$.

Dans tout ce qui suit, $\log$ désigne la fonction logarithmique définie sur $\mathbb{C}_p^\times$ comme dans [Iw] .

LEMME 1. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ on a $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-1} d\mu_c(x) = -(1-\frac{1}{p}) \log c$.

Démonstration. - Cette intégrale donne $H(1, c)$; en utilisant la propriété (iv) de μ_c on obtient l'équation fonctionnelle $H(1, bc) = H(1, b) + H(1, c)$; d'autre part, par dérivation par rapport à c , on voit que

$$\frac{\partial H}{\partial c}(1, c) = -(1-\frac{1}{p}) \frac{1}{c} ;$$

d'où le résultat ■

LEMME 2. - Pour $t \in \mathbb{C}_p$ tel que $|t| < p^{-1/p-1}$ on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp(tx) d\mu_c(x) = \frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{c}{\exp(ct)-1}$$

la formule étant vraie en $t = 0$ par continuité.

Démonstration. - Intégrer terme à terme la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et utiliser le fait que $\sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{y^m}{m!} = \frac{y}{\exp(y)-1}$ pour $y \neq 0$ tel que $|y| < p^{-1/p-1}$.

PROPOSITION 11. - Pour $c \in \mathbb{Z}_p^{\times}$, $H(u, c)$ est analytique pour $u \in \mathbb{C}_p$ tel que $|u-1| < 1$ et admet l'expression :

$$H(u, c) = \frac{1}{p} \log\left(\frac{u^{pc}-1}{u^{p-1}}\right) - \log\left(\frac{u^c-1}{u-1}\right)$$

la formule restant vraie, par continuité, en une racine p -ème de l'unité.

Démonstration. - Pour $u \in \mathbb{C}_p$ avec $|u-1| < 1$ on a, uniformément pour $x \in \mathbb{Z}_p$: $u^x = \sum_{n=0}^{\infty} (u-1)^n \binom{x}{n}$, d'où par intégration terme à terme :
 $H(u, c) = \sum_{n=0}^{\infty} (u-1)^n a_n(c)$ où $a_n(c) = \int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} x^{-1} \binom{x}{n} d\mu_c(x)$ vérifie $|a_n(c)| \leq 1$; on en déduit l'analyticit de $H(u, c)$.

Pour effectuer le calcul, on suppose d'abord que $|u-1| < p^{-1/p-1}$ auquel cas on a $u^x = \exp(x \log u)$; d'autre part, par drivation on a
 $\frac{\partial H}{\partial u}(u, c) = u^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} u^x d\mu_c(x) = u^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} (u^x - u^{px}) d\mu_c(x)$; le lemme 2 s'applique avec $t = \log u$ ou $p \log u$; il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, c) = \frac{1}{u} \left[\left(\frac{1}{u-1} - \frac{c}{u^c-1} \right) - \frac{1}{p} \left(\frac{p}{u^{p-1}} - \frac{pc}{u^{pc}-1} \right) \right]$$

par la formule de drivation : $\frac{d}{du} [\log(1-u^{-a})] = \frac{au^{-1}}{u^a-1}$ on tire :

$H(u, c) = h(c) + \frac{1}{p} \log\left(\frac{u^{pc}-1}{u^{p-1}}\right) - \log\left(\frac{u^c-1}{u-1}\right)$ o $h(c)$ est une fonction que l'on dtermine en faisant tendre u vers 1 ; le lemme 1 donne alors $h(c) = 0$.

Dans la formule, les deux quotients figurant dans les $\log$ sont en fait analytiques pour $|u-1| < 1$ ce qui explique que cette formule est valable mme pour une racine p -me de l'unit.

Remarque. - Un calcul immdiat montre d'ailleurs que le dveloppement en srie de H au voisinage de 1 commence comme suit :

$$H(u, c) = -\left(1-\frac{1}{p}\right) \log c + \frac{(p-1)(c^2-1)}{24} (u-1)^2 + \dots$$

Application à $L_p(1, \chi)$.

Avec la proposition 11, appliquée à $u = \bar{\xi}^i$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\chi(c)-1)L_p(1, \chi) &= \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) H(\bar{\xi}^i, c) \\ &= \frac{\tau(\chi)}{f} \left[(S_1 - S_c) - \frac{1}{p} (S_p - S_{pc}) \right] \end{aligned}$$

où $S_a = \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) \log(\bar{\xi}^{ia} - 1)$. Ceci n'est pas défini si $\bar{\xi}^p = 1$ mais dans ce cas, par un argument de continuité, on voit que $S_p - S_{pc} = \sum_i \bar{\chi}(i) \log c = 0$. On peut donc supposer pour continuer que $f = p^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Alors il existe un entier j tel que $j \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-1}\mathbb{Z}_p}$ et $j \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha\mathbb{Z}_p}$ et par un calcul connu on voit que $S_p = \bar{\chi}(j)S_p$ d'où $S_p = 0$. Même chose avec S_{pc} . Le même calcul avec l'unité p -adique c montre que $S_c = \chi(c)S_1$ d'où finalement $(\chi(c)-1)L_p(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f} (\chi(c)-1)S_1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{L_p(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) \log(1 - \bar{\xi}^{-i})} .$$