PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Valeurs aux entiers négatifs des fonctions L et fonctions L p-adiques d'un corps de nombres totalement réel

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. nº 5, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A5_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
11 mai 1978
Grenoble

VALEURS AUX ENTIERS NEGATIFS DES FONCTIONS L et FONCTIONS L p-ADIQUES D'UN CORPS DE NOMBRES TOTALEMENT REEL

par

Pierrette CASSOU-NOGUES

Soit K un corps de nombres totalement réel et M une extension abélienne réelle finie de K, de conducteur $\mathfrak{f}$. Notons $I_{\mathfrak{f}}$, le groupe des idéaux fractionnaires de K, premiers à $\mathfrak{f}$ et $P_{\mathfrak{f}}$ le sous-groupe des idéaux principaux engendrés par des éléments totalement positifs, congrus à 1 mod $\mathfrak{f}$ (c'est-à-dire, les éléments α tels que $v_{\mathfrak{p}}(\alpha-1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de K qui divise $\mathfrak{f}$). On appelle le quotient $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$, le groupe des classes de rayon $\mathfrak{f}$ et on le note $R_{\mathfrak{f}}$. L'application d'Artin $\mathfrak{a} \mapsto \sigma_{\mathfrak{a}}$ de $I_{\mathfrak{f}}$ dans le groupe de Galois de M sur K, $G(M/K)$, induit un homomorphisme surjectif de $R_{\mathfrak{f}}$ dans $G(M/K)$. On définit pour $\sigma \in G(M/K)$

(1) $$\zeta_M(\sigma,s) = \sum_{\substack{(\mathfrak{g},\mathfrak{f})=1 \\ \sigma_{\mathfrak{g}}=\sigma}} N\mathfrak{g}^{-s} \quad \text{pour} \quad Re(s) > 1$$

où la sommation est prise sur tous les idéaux $\mathfrak{g}$ entiers, premiers à $\mathfrak{f}$, tels que $\sigma_{\mathfrak{g}} = \sigma$.

Siegel [10] a montré que pour tout entier $k \geq 0$, $\zeta_M(\sigma,-k)$ est rationnel. On peut alors se poser le problème de l'existence de congruences du type de celles de Kummer pour les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Riemann. On sait que ces congruences, légèrement modifiées, sont équivalentes à l'existence d'une fonction continue p-adique qui coïncide avec la fonction complexe sur les entiers négatifs.

Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, ce problème avait été résolu en 1964 par Kubota et Leopoldt [6] . Dans le cas général, il a été abordé en 1972 par Serre [8] en utilisant des formes modulaires à une variable. En 1974, Queen [7] a généralisé les résultats précédents, mais dans les deux cas, on n'obtenait pas toutes les propriétés conjecturées [3] . Coates et Sinnott [4] en 1974, les ont obtenues dans le cas où K est quadratique réel en utilisant une formule explicite pour $\zeta_M(\sigma,-k)$ donnée par Siegel [11] . Plus tard, Deligne et Ribet [5] ont résolu complètement le problème en utilisant des formes modulaires de Hilbert, ce qui nécessitait un apport important de géométrie algébrique. En fait, grâce à un résultat de Shintani [9] , on peut traiter ce problème simplement, à l'aide de propriétés de certaines séries de Dirichlet. C'est ce que nous allons expliquer ici.

I. - EXPRESSION DES FONCTIONS ZETA PARTIELLES A L'AIDE DE SERIES DE DIRICHLET.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{f}$. Nous définissons

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},s) = \sum_{\substack{(\mathfrak{g},\mathfrak{f})=1 \\ \mathfrak{g}\sim\mathfrak{a}^{-1}}} N\mathfrak{g}^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

où la sommation est prise sur tous les idéaux $\mathfrak{g}$ de K , premiers à $\mathfrak{f}$, dans la même classe que $\mathfrak{a}^{-1}$ mod $P_{\mathfrak{f}}$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{-1}(\alpha)$ où α est un élément de $\mathfrak{a}$, totalement positif, congru à 1 mod $\mathfrak{f}$. Notons A l'ensemble de ces éléments. On a donc

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{\alpha\in A \bmod E^{+}(\mathfrak{f})} N(\alpha)^{-s}$$

où A mod $E^{+}(\mathfrak{f})$ désigne un système de représentants des éléments de A modulo l'action multiplicative du groupe $E^{+}(\mathfrak{f})$, des unités totalement positives congrues à 1 mod $\mathfrak{f}$.

Shintani [9] a montré qu'il existait un nombre fini de fonctions linéaires affines, notées $L_{j,x}$

$$L_{j,x}(y) = x + y_1 v_{j1} + \dots + y_{r(j)} v_{jr(j)}$$

possédant les propriétés suivantes

(2) $\begin{cases} \text{i)} & x \gg 0 \ , \ x \in \mathfrak{a} \ , \ x \equiv 1 \bmod \mathfrak{f} \\ \text{ii)} & v_{ji} \gg 0 \ , \ v_{ij} \in \mathfrak{a}\mathfrak{f} \quad \text{pour tout} \quad (i,j) \\ \text{iii)} & \bigcup_{L_{j,x}} \{L_{j,x}(m) \ ; \ m \in \mathbb{N}^{r(j)}\} \ \text{forme un système de représen-} \\ & \text{tants des éléments de } A \text{ modulo l'action de } E^{+}(\mathfrak{f}) \ . \end{cases}$

On a donc

(3) $$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{L_{j,x}} Z(NL_{j,x},s)$$

où

(4) $$Z(NL_{j,x},s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{r(j)}} N(L_{j,x}(m))^{-s} \ .$$

On a donc ramené l'étude des fonctions zêta partielles, à l'étude de séries de Dirichlet. Ces séries ont un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec une infinité de pôles. Il est plus aisé d'étudier d'autres séries que nous allons introduire maintenant.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de K, possédant les propriétés suivantes :

(5) $\begin{cases} \text{i)} & \mathfrak{c} \text{ est premier à la différente } \mathfrak{D} \text{ de } K \\ \text{ii)} & (\mathfrak{c},(v_{ji})) = 1 \quad \text{pour tout} \quad (i,j) \\ \text{iii)} & \mathcal{O}_K/\mathfrak{c} \simeq \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \ \text{ où } c \text{ désigne le générateur positif de } \mathfrak{c} \cap \mathbb{Z} \ . \end{cases}$

Soit ν un élément de $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{D}^{-1}$ tel que $\mathrm{Tr}\,\nu = b/c$ avec $(b,c) = 1$ (Tr désigne la trace de K sur $\mathbb{Q}$). Posons

(6) $$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},\mathfrak{c},s) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},s) - N\mathfrak{c}^{1-s}\,\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c}^{-1},s) \ .$$

On peut montrer [1] :

THEOREME 1. -

(7) $$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},c,s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} (\exp 2\pi i \operatorname{Tr}(\mu\nu x)) Z(NL_{j,x},\xi^{\mu},s)$$

où

(8) $$Z(NL_{j,x},\xi_j^{\mu},s) = \sum_{m\in\mathbb{N}^{r(j)}} N(L_{j,x}(m))^{-s}\,\xi_j^{\mu m}$$

et $\xi_j = \xi_{j1}\xi_{j2}\cdots\xi_{jr(j)}$ où les ξ_{ji} sont des racines primitives c-ièmes de l'unités, pour tout (i,j).

Nous allons étudier maintenant ces séries de Dirichlet.

II. - SERIES DE DIRICHLET.

THEOREME 2. - Soit $P(X) = (P^{(1)}(X)+x^{(1)})^{\alpha_1}\cdots(P^{(n)}(X)+x^{(n)})^{\alpha_n}$ où les $P^{(i)}(X)$ sont des polynômes homogènes du premier degré à r variables, à coefficients réels positifs, les $x^{(i)}$ sont des nombres réels positifs et les α_i des nombres entiers positifs. Soient $\xi_1\ldots\xi_r$ des racines de l'unité différentes de 1. Posons

(9) $$Z(P,\xi,s) = \sum_{m\in\mathbb{N}^r} P(m)^{-s}\,\xi_1^{m_1}\cdots\xi_r^{m_r}.$$

Alors $Z(P,\xi,s)$ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction holomorphe et pour tout entier $k \geq 0$

(10) $$Z(P,\xi,-k) = R(P^k)(\xi)$$

où $R(P^k)(T) = \sum_{m\in\mathbb{N}^r} P(m)^k\,T^m$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans [1]. C'est une forme affaiblie d'un théorème plus général [2].

Remarques :

(1) On sait que $R(P^k)(T) = \sum_i \dfrac{\lambda_i(k)}{(1-T)^i}$ où $(1-T)^i = (1-T_1)^{i_1}\cdots(1-T_r)^{i_r}$.

Puisque $\xi_1\ldots\xi_r$ sont différentes de 1, on voit que la valeur $R(P^k)(\xi)$ est bien définie.

(2) On peut montrer que si l'un des ξ_i est égal à 1, alors $Z(P,\xi,s)$ a un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles.

Soit maintenant K un corps de nombres contenu dans $\mathbb{R}$. On suppose, à partir de maintenant que les $x^{(i)}$ et les coefficients des $P^{(i)}$ sont dans K. Alors pour tout entier $k \geq 0$, $Z(P,\xi,-k) \in K(\xi)$. On peut alors montrer les deux théorèmes suivants qui concernent ces valeurs.

THEOREME 3. - Si p est un nombre premier tel que les ξ_i ne soient pas des racines de l'unité d'ordre une puissance de p, alors

$$|Z(P,\xi,-k)|_{\mathfrak{p}} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^r} |P(n)^k|_{\mathfrak{p}}$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $K(\xi_1,\dots,\xi_r)$ au-dessus de p.

Soit p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire et $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation. Soit $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On note F l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans un anneau $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_p$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Si $u \in 1+\mathfrak{p}$, on note f_u la fonction $s \mapsto u^s$. Les f_u engendrent un sous $\mathcal{O}$-module L de F. On définit maintenant $\overline{L}$ comme étant l'adhérence de L dans F pour la topologie de la convergence uniforme. Les éléments de $\overline{L}$ sont appelés fonctions d'Iwasawa.

THEOREME 4. - Soit p un nombre premier et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K au-dessus de p. On suppose que les ξ_i ne sont pas des racines de 1 d'ordre une puissance de p et que pour tout i, $x^{(i)} \in 1+\mathfrak{p}$ et les coefficients de $P^{(i)}$ appartiennent à $\mathfrak{p}$. Alors, il existe une fonction d'Iwasawa unique $Z_{\mathfrak{p}}(P,\xi,s)$ telle que pour tout entier $k \geq 0$

$$Z_{\mathfrak{p}}(P,\xi,-k) = Z(P,\xi,-k) .$$

III. - APPLICATIONS ARITHMETIQUES.

D'après (7) et (8), on utilise le théorème 2 avec $\alpha_i = 1$ pour tout i et $L_{j,x}$ et ses conjuguées. On a donc pour tout entier $k \geq 0$

(11) $$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},c,-k) = N\mathfrak{a}^{-k} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} (\exp 2\pi i\, \mathrm{Tr}(\mu\nu x)) R(N(L_{j,x})^k)(\xi_j^{\mu})$$

où $R(N(L_{j,x})^k)(T) = \sum_{m\in\mathbb{N}^{r(j)}} N(L_{j,x}(m))^k T^m$.

D'autre part, on déduit du théorème 3 :

THEOREME 5. - <u>Si</u> p <u>est un nombre premier qui ne divise pas</u> c , $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1},c,-k)$ <u>est</u> p-<u>entier</u>.

Ceci permet de donner une évaluation du dénominateur de $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma,-k)$. On définit [3] , $w_n(M)$ comme étant le plus grand entier m tel que $G(M(\mu_m)/M)$ ait un exposant divisant n , où μ_m désigne le groupe des racines m-ièmes de l'unité.

THEOREME 6. - <u>Pour toute extension abélienne finie</u> M <u>de</u> K <u>et tout</u> $\sigma \in G(M/K)$, $w_{k+1}(M)\,\xi_M(\sigma,-k)$ <u>est un entier</u>.

Supposons maintenant que p soit un nombre premier tel que $\mathfrak{f}$ soit divisible par tous les idéaux premiers de K au-dessus de p . Puisque les $L_{j,x}$ possèdent les propriétés (2), on est dans les conditions du théorème 4. Pour toute $L_{j,x}$, il existe une fonction d'Iwasawa unique $Z_p(NL_{j,x},\xi,s)$ telle que pour tout entier k

$$Z_p(NL_{j,x},\xi,-k) = Z(NL_{j,x},\xi,-k) .$$

Notons ω le caractère de Teichmüller

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &\to \mathbb{Z}_p \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} x^{p^n} . \end{aligned}$$

Soit θ le caractère défini sur l'ensemble des idéaux de K premiers à p par $\theta(\mathfrak{a}) = \omega(N\mathfrak{a})$. θ est un caractère d'ordre δ où $\delta = [K(\mu_p):K]$. On note $\langle N\mathfrak{a}\rangle = N\mathfrak{a}/\theta(\mathfrak{a})$.

On peut définir une fonction d'Iwasawa

$$\zeta_{\mathfrak{f},p}(\mathfrak{a}^{-1},\mathfrak{c},s) = \langle N\mathfrak{a}\rangle^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \left(\exp 2\pi i \operatorname{Tr}(\mu\nu x)\right) Z_p(NL_{j,x},\xi^{\mu},s) .$$

Enfin, on a le théorème

THEOREME 7. - Soit χ un caractère non trivial de conducteur $\mathfrak{f}$ divisible par tous les idéaux premiers de K au-dessus de p . Alors il existe une fonction $L_p(\chi,s)$ continue sur $\mathbb{Z}_p$, telle que

i) pour tout entier $m \geq 1$

$L_p(\chi,1-m) = L(\chi\theta^{-m},1-m)$.

ii) $s \mapsto \left(\chi(\mathfrak{c})\langle N(\mathfrak{c})\rangle^{1-s}-1\right)L_p(\chi,s)$ est une fonction d'Iwasawa pour tout idéal $\mathfrak{c}$ vérifiant (5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. CASSOU-NOGUES - Valeurs sur les entiers négatifs des fonctions zêta des corps de nombres et des fonctions L des courbes elliptiques. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I (1978) (polycopié).

[2] P. CASSOU-NOGUES - Séries de Dirichlet et applications arithmétiques. Journées arithmétiques françaises, Luminy 1978, Astérisque (à paraître).

[3] J. COATES - p-adic L functions and Iwasawa's theory. Durham symposium in algebraic number fields. A. Fröhlich éd., Academic Press (1977).

[4] J. COATES, W. SINNOT - On p-adic L functions over real quadratic fields. Inv. Math. 25 (1974), 253-279.

[5] P. DELIGNE, K. RIBET - Values of abelian L functions at negative integers (en préparation).

[6] T. KUBOTA, H.W. LEOPOLDT - Eine p-adische Theorie der Zetawerte I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen. J. für die reine und ang. math. t.214-215, 1964, 328-339.

[7] C. QUEEN - The existence of p-adic abelian L-functions. Number theory and algebra, H. Zassenhaus ed. Academic Press, 1977 263-288.

[8] J.P. SERRE - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. Modular functions of one variable III. 191-268, Berlin Springer Verlag, 1973, Lecture Notes in Mathematics, 350.

[9] T. SHINTANI - On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers. Journal of the Faculty of Science Tokyo Sec I A , vol. 23, n°2, Aug. 1976, 393-417.

[10] C.L. SIEGEL - Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Ann. Math. 38, 1937, 212-291.

[11] C.L. SIEGEL - Bernoullische Polynom und quadratische Zahlkörper. Göttingen Nachr., t.2, 1968, 7-38.

- o -

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)