JEAN-RENÉ JOLY

Séries L des cubiques $X^3 + Y^3 = \mathcal{D}$ et décomposition d'un nombre rationnel en somme de deux cubes (démonstration d'une conjecture de Stephens)

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A1_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
27 octobre 1977
Grenoble

SERIES L DES CUBIQUES $X^3+Y^3 = D$, ET DECOMPOSITION D'UN NOMBRE RATIONNEL EN SOMME DE DEUX CUBES (démonstration d'une conjecture de Stephens)

par

Jean-René JOLY (Grenoble)

On démontre une conjecture de Stephens relative à la parité de l'ordre en $s=1$ des séries L des cubiques $X^3+Y^3 = D$. On en déduit que, si ces courbes vérifient une conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, alors 50 % au moins des nombres rationnels positifs sont représentables comme somme de deux cubes rationnels positifs.

1. INTRODUCTION, RAPPELS (d'après Birch et Stephens, [2], [6], [7], dont nous conservons les notations).

Soit $D \geq 1$ un entier sans facteur cubique. Notons Γ_D la courbe elliptique $X^3+Y^3 = D$ (définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels), $\zeta_D(s)$ la fonction zêta globale de Γ_D, et $L_D(s)$ la série L de Γ_D, telle que $\zeta_D(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)/L_D(s)$. Un calcul classique de nombre de points d'une courbe sur un corps fini (voir par exemple [4], pp. 59-62) montre que $L_D(s)$ est une série L de Hecke, prolongeable analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier ([6], pp. 123-126), munie d'une équation fonctionnelle de la forme $L_D(2-s) = \Delta(s)L_D(s)$, et dont l'ordre $\gamma(D)$ en $s = 1$ vérifie une relation de la forme

(1) $\quad (-1)^{\gamma(D)} = W(D)$.

$W(D)$ désigne ici une certaine somme de caractères ([6], p. 125) dont la valeur peut se calculer de la manière suivante (voir [2]) : on pose

(2) $\quad \Delta(D) =$ le produit des nombres premiers $\neq 3$ et divisant D ;

(3) $\quad \delta(D) = \pm 1 =$ la classe de $\Delta(D)$ modulo 3 ;

on a alors

$$W(D) = \begin{cases} \delta(D) & \text{si } D \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 9 ; \\ -\delta(D) & \text{si } D \equiv 0, \pm 2, \pm 4 \pmod 9 . \end{cases} \tag{4}$$

Dans [7], Stephens introduit la somme

$$R(x) = \sum_{D \le x}{}' \; W(D) \tag{5}$$

(où $x \ge 1$ est une variable réelle, et où l'accent rappelle que la sommation est restreinte aux entiers <u>sans facteur cubique</u>). Il en donne une majoration $|R(x)| \le \frac{39}{72} x$ $\left(\text{à comparer avec } \sum_{D\le x}{}' \, 1 \sim \frac{1}{\zeta(3)} x\right)$ et ajoute (p. 148, § 3) :

> "... une étude plus détaillée du comportement de $R(x)$ pourrait montrer que $R(x) = o(x)$, car il semble que $W(D)$ prenne les valeurs ± 1 avec une égale probabilité."

Nous nous proposons ici de vérifier cette conjecture, et plus précisément de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1. - <u>Avec les définitions ci-dessus</u>, <u>on a</u>

$$R(x) = O(x^{3/4} \log x) = o(x) . \tag{6}$$

Ce théorème sera démontré aux §§ 2-3. La démonstration consiste à utiliser (2) - (4) pour ramener $R(x)$ à des sommes $S(x;\chi\delta)$, qui sont à peu de choses près des sommes de caractères non principaux modulo 9 étendues aux entiers sans facteurs cubiques (voir § 2), puis à transformer ces sommes $S(x;\chi\delta)$ par des considérations élémentaires pour en donner une estimation en $O(x^{3/4} \log x)$ (voir § 3).

L'estimation (6) admet une conséquence intéressante (voir d'ailleurs [7], § 2). Notons A (resp. B, C) l'ensemble des $D \ge 1$ tels que $\nu(D)$ soit pair (resp. impair, supérieur ou égal à 1). On a évidemment

$$R(x) = \sum_{\substack{D\le x \\ D\in A}}{}' \, 1 - \sum_{\substack{D\le x \\ D\in B}}{}' \, 1 . \tag{7}$$

Il est bien connu d'autre part que

$$(8)\qquad \sum_{D\le x}{}' 1 = \sum_{\substack{D\le x\\ D\in A}}{}' 1 + \sum_{\substack{D\le x\\ D\in B}}{}' 1 \sim \frac{x}{\zeta(3)} .$$

L'estimation $(\mathcal{E})$, combinée avec (7) et (8), implique donc

$$(9)\qquad \sum_{\substack{D\le x\\ D\in A}}{}' 1 \sim \sum_{\substack{D\le x\\ D\in B}}{}' 1 \sim \frac{x}{2\,\zeta(3)} .$$

Comme $B \subset C$, la deuxième équivalence (9) entraîne

$$(10)\qquad \underline{\lim}\ \Big(\sum_{\substack{D\le x\\ D\in C}}{}' 1 \Big/ \sum_{D\le x}{}' 1\Big) \ge \frac{1}{2} ;$$

en d'autres termes :

(11) 50 % au moins des cubiques Γ_D ont une série L dont l'ordre en $s = 1$ vérifie $\gamma(D) \ge 1$.

Soit maintenant $g(D)$ le rang de $\Gamma_D(\mathbb{Q})$, groupe (abélien, de type fini) des points $\mathbb{Q}$-rationnels de Γ_D . Admettons la conjecture suivante (conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour les cubiques $X^3 + Y^3 = D$: voir [3] , [6]) :

(12) quel que soit D , $g(D) = \gamma(D)$.

La propriété (11) se réénonce alors

(13) 50 % au moins des cubiques Γ_D ont un rang $g(D) \ge 1$.

On sait enfin (voir [3]) que, pour $D \ge 3$ et sans facteur cubique, le groupe $\Gamma_D(\mathbb{Q})$ est sans torsion : il est facile d'en déduire que les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) $g(D) \ge 1$; (ii) Γ_D admet un point $\mathbb{Q}$-rationnel "à distance finie";
(iii) Γ_D admet un point $\mathbb{Q}$-rationnel (x,y) tel que $x \ge 0$, $y \ge 0$.

(Noter par exemple que $\Gamma_D(\mathbb{R})$ est connexe, donc isomorphe au tore de dimension 1 , et que par conséquent, si $\Gamma_D(\mathbb{Q}) \subset \Gamma_D(\mathbb{R})$ est sans torsion et non trivial, il est partout dense dans $\Gamma_D(\mathbb{R})$.)

La combinaison de (13) et de l'équivalence ci-dessus donne ainsi la conséquence annoncée :

THEOREME (conditionnel) 2. - <u>Si les cubiques</u> Γ_D <u>vérifient la conjecture</u> (12), <u>alors</u> 50 % <u>au moins des entiers positifs sans facteur cubique sont représentables comme somme de deux cubes rationnels positifs</u> (<u>non entiers en général</u> : <u>le nombre d'entiers positifs</u> $\leq x$ <u>et représentables comme somme de deux cubes entiers positifs est</u> $O(x^{2/3})$).

2. <u>REDUCTION DE LA SOMME</u> $R(x)$ <u>A DES SOMMES</u> $S(y\,;\chi_j\delta)$.

Cette réduction va s'effectuer en plusieurs temps.

<u>1er temps</u>. - A la manière de Stephens ([7] , p. 147), mais en utilisant le module 9 au lieu du module 4, on peut écrire

(14) $$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) ,$$

avec

(15) $$R_1(x) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{n\leq x\\(n,3)=1}} W(n) ,$$

(16) $$R_2(x) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{3n\leq x\\(n,3)=1}} W(3n) ,$$

(17) $$R_3(x) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{9n\leq x\\(n,3)=1}} W(9n) ,$$

l'accent indiquant toujours que la sommation est restreinte aux entiers <u>sans facteur cubique</u>.

<u>2ème temps</u>. - Pour toute fonction arithmétique $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, posons

(18) $$S(y\,;\alpha) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{n\leq y\\(n,3)=1}} \alpha(n) .$$

On peut transformer les sommes R en sommes S de la façon suivante :

<u>Somme</u> $R_2(x)$: si $(n,3) = 1$, on a $3n \equiv \pm 3 \pmod 9$, donc, d'après (2) - (4) , $W(3n) = \delta(3n) = \delta(n)$, et par conséquent

$$(19)\qquad R_2(x) = \sum_{\substack{n\le x/3\\(n,3)=1}}{}' \delta(n) = S(x/3\,;\delta)\ .$$

<u>Somme</u> $R_3(x)$: si $(n,3)=1$, on a $9n \equiv 0 \pmod 9$, donc, d'après (2)-(4), $W(9n) = -\delta(9n) = -\delta(n)$, et par conséquent

$$(20)\qquad R_3(x) = -\sum_{\substack{n\le x/9\\(n,3)=1}}{}' \delta(n) = -S(x/9\,;\delta)\ .$$

<u>Somme</u> $R_1(x)$: si $(n,3)=1$, on a ou bien $n\equiv \pm 1 \pmod 9$, auquel cas $W(n)=\delta(n)$; ou bien $n\equiv\pm 2,\ \pm 4 \pmod 9$, auquel cas $W(n) = -\delta(n)$ (voir toujours (2)-(4)) . D'où

$$(21)\qquad R_1(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\pm1(9)}}{}' \delta(n) - \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\pm2,\pm4}}{}' \delta(n)\ .$$

Les six valeurs $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4 \pmod 9$ sont les éléments du groupe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, cyclique d'ordre 6. Soit X le dual de ce groupe, soit χ_1 un caractère de Dirichlet générateur de X , et posons $\chi_j = \chi_1^j$. On vérifie sans peine que $\chi_2(n)+\chi_4(n)$ vaut 2 si $n\equiv\pm1 \pmod 9$, et vaut -1 si $n\equiv\pm2,\ \pm4 \pmod 9$: d'où

$$(22)\qquad R_1(x) = \sum_{\substack{n\le x\\(n,3)=1}}{}' (\chi_2\delta)(n) + \sum_{\substack{n\le x\\(n,3)=1}}{}' (\chi_4\delta)(n) - \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\pm1(9)}}{}' \delta(n)\ .$$

Un argument classique donne d'autre part, pour $a=\pm 1$,

$$(23)\qquad \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a(9)}}{}' \delta(n) = \sum_{n\le x}{}' \Big(\frac16\sum_{j=0}^{5}\overline{\chi}_j(a)\chi_j(n)\Big)\delta(n) = \frac16\sum_{j=0}^{5}\overline{\chi}_j(a)\sum_{n\le x}{}'(\chi_j\delta)(n)\ ,$$

d'où

$$(24)\qquad \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\pm1(9)}}{}' \delta(n) = \frac16\sum_{j=0}^{5}[\overline{\chi}_j(1)+\overline{\chi}_j(-1)]\sum_{n\le x}{}'(\chi_j\delta)(n)\ .$$

Mais $\chi_j(-1) = (-1)^j$: le terme entre crochets vaut donc 0 si $j=1,3,5$, et vaut 2 si $j=0,2,4$. Compte tenu de cette remarque, et du fait que les seuls termes figurant explicitement à droite de (24) correspondent à des n tels que $(n,3)=1$, la combinaison de (22) et (24) donne finalement (avec la notation (18))

(25) $R_1(x) = \frac{2}{3} S(x;\chi_2\delta) + \frac{2}{3} S(x;\chi_4\delta) - \frac{1}{3} S(x;\chi_0\delta)$.

<u>3ème temps</u>. - On combine (14), (15), (16), (17), et (19), (20), (25). On arrive ainsi au résultat suivant :

LEMME 1. - <u>La somme</u> $R(x)$ <u>s'exprime à l'aide de sommes</u> $S(y;\chi_j\delta)$ <u>par la formule</u>

(26) $R(x) = S(x/3;\delta) - S(x/9;\delta) + \frac{2}{3} S(x;\chi_2\delta) + \frac{2}{3} S(x;\chi_4\delta) - \frac{1}{3} S(x;\chi_0\delta)$.

Le lemme 1, la définition (18) et le fait que $\chi_0(n) = 0$ si $(n,3) \neq 1$ réduisent alors la démonstration du théorème 1 à celle du résultat suivant :

LEMME 2. - <u>Pour</u> $j = 0,2,4$, <u>on a</u>

(27) $S(y;\chi_j\delta) = O(y^{3/4}\log y)$.

3. <u>ESTIMATION</u> $S(y;\chi_j\delta) = O(y^{3/4}\log y)$ <u>ET FIN DE LA DEMONSTRATION</u>.

Il s'agit de démontrer le lemme 2. Pour simplifier, écrivons χ et x au lieu de χ_j et y . On a par définition

(28) $$S(x;\chi\delta) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{n\leq x \\ (n,3)=1}} \chi(n)\,\delta(n) .$$

Comme tout entier <u>sans facteur cubique</u> se met de façon unique sous la forme mn^2 , avec m et n <u>sans facteur carré</u> et premiers entre eux, (28) peut se réécrire (avec pour n une nouvelle signification)

(29) $$S(x;\chi\delta) = \sum\sum_{\substack{mn^2\leq x \\ (m,n)=1 \\ (m,3)=(n,3)=1}} \mu^2(m)\,\mu^2(n)\,\chi(mn^2)\,\delta(mn^2) .$$

μ désigne ici la fonction de Möbius, et on a utilisé le fait que μ^2 est égale à la fonction caractéristique des entiers sans facteur carré.

Pour les entiers m, n apparaissant dans cette dernière somme, on a, d'après (2) - (3) ,

(30) $$\delta(mn^2) = \prod_{p|mn^2} \left(\frac{p}{3}\right) = \prod_{p|m} \left(\frac{p}{3}\right) \prod_{p|n} \left(\frac{p}{3}\right) .$$

Pour m et n sans facteur carré, ce dernier produit est égal à $(\frac{m}{3})(\frac{n}{3}) = \lambda(m)\lambda(n)$, λ désignant le caractère de Legendre $(\frac{\cdot}{3})$. Les formules (29) et (30) mènent donc à

(31) $$S(x;\chi\delta) = \sum_{\substack{mn^2 \leq x \\ (m,n)=1}}\sum (\mu^2(n)\chi(n^2)\lambda(n))(\mu^2(m)(\chi\lambda)(m)) .$$

Noter que χ et λ étant des caractères modulo 9 et 3 , on a $\chi(n) = \lambda(n) = 0$ si $(n,3) \neq 1$ (et de même pour m), ce qui permet d'abandonner les conditions $(m,3) = (n,3) = 1$ dans la sommation double.

Réécrivons maintenant (31) sous la forme

(32) $$S(x;\chi\delta) = \sum_{n \leq x^{1/2}} \mu^2(n)\chi(n^2)\lambda(n) \sum_{\substack{m \leq x/n^2 \\ (m,n)=1}} \mu^2(m)\psi(m) ,$$

avec $\psi = \chi\lambda$ = un caractère modulo 9 non principal (puisque, dans le dual X de $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, λ est évidemment d'ordre 2 , et $\chi = \chi_j$ d'ordre 1 pour $j = 0$, et d'ordre 3 pour $j = 2,4$) . Une estimation de la somme $\sum_m \mu^2(m)\psi(m)$ va résulter du lemme suivant :

LEMME 3. - Soient n et k deux entiers ≥ 1 et ψ un caractère de Dirichlet non principal modulo k . Posons

(33) $$T_n(y;\psi) = \sum_{\substack{m \leq y \\ (m,n)=1}} \mu^2(m)\psi(m) .$$

On a alors l'estimation

(34) $$T_n(y;\psi) = O\left(y^{1/2}(nk)^{1/2}\log nk\right) .$$

Admettons provisoirement ce lemme et appliquons-le à la somme $\sum_m$ de (32) , avec $k = 9$ et $y = x/n^2$: on obtient

$$(35)\qquad \sum_{\substack{m\le x/n^2\\(m,n)=1}} \mu^2(m)\,\psi(m) = O\left(x^{1/2}\frac{\log n}{n^{1/2}}\right) .$$

Comme $|\mu^2(n)\,\chi(n^2)\,\lambda(n)| \le 1$ pour tout n , la combinaison de (31) et (35) donne alors

$$(36)\qquad S(x\,;\chi\delta) = O\left(x^{1/2}\sum_{n\le x^{1/2}}\frac{\log n}{n^{1/2}}\right) .$$

Enfin, on a évidemment

$$(37)\qquad \sum_{n\le y}\frac{\log n}{n^{1/2}} \le (\log y)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1/2}}$$

et

$$(38)\qquad \sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1/2}} = O\left(\int_1^y \frac{dt}{t^{1/2}}\right) = O(y^{1/2}) .$$

Faisant $y = x^{1/2}$ dans (37) - (38) et portant le résultat dans (36) , on obtient ainsi

$$(39)\qquad S(x\,;\chi\delta) = O(x^{3/4}\log x) ,$$

ce qui démontre le lemme 2 .

Reste à prouver le lemme 3 . Posant $k^* = nk$, et notant ψ^* le caractère modulo k^* induit par ψ , on peut écrire

$$(40)\qquad T_n(y\,;\psi) = \sum_{m\le y}\mu^2(m)\,\psi^*(m) .$$

Un argument classique ([5] , p. 53) montre d'autre part que $\mu^2(m) = \sum_{d^2|m}\mu(d) = \sum_{rd^2=m}\mu(d)$ et permet de transformer (40) en

$$(41)\qquad T_n(y\,;\psi) = \sum\sum_{rd^2\le y}\mu(d)\,\psi^*(rd^2) = \sum_{d\le y^{1/2}}\mu(d)\,\psi^*(d^2)\sum_{r\le y/d^2}\psi^*(r) .$$

L'inégalité de Pòlya-Vinogradov ([1] , p. 320) appliquée à ψ^* , caractère <u>non principal</u> modulo k^* , donne

$$(42)\qquad \sum_{r\le y/d^2}\psi^*(r) = O(k^{*1/2}\log k^*) .$$

Si alors on remplace k^* par nk et si on porte (42) dans (41) en remarquant que $|\mu(d)\,\psi^*(d^2)| \leq 1$ pour tout d, on obtient l'estimation

$$(43) \qquad T_n(y\,;\psi) = O\left(y^{1/2}(nk)^{1/2}\log(nk)\right) .$$

Ceci prouve le lemme 3 et achève donc la démonstration du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AYOUB R. - An Introduction to the Analytic Theory of Numbers. A.M.S. Math. Surveys, 10 (1963).

[2] BIRCH B.J., STEPHENS N.M. - The parity of the rank of the Mordell-Weil group. Topology, 5 (1966), 295-299.

[3] BIRCH B.J., SWINNERTON-DYER H.P.F. - Notes on elliptic curves II. J. reine angew. Math., 228 (1966), 79-108.

[4] JOLY J.R. - Equations et variétés algébriques sur un corps fini. Enseign. Math. 19 (1973), 1-117.

[5] PRACHAR K. - Primzahlverteilung. Springer (1957).

[6] STEPHENS N.M. - The diophantine equation $X^3+Y^3 = D$, and the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. J. reine angew. Math. 231 (1968), 121-162.

[7] STEPHENS N.M. - A corollary to a conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. J. London Math. Soc., 43 (1968), 146-148.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)