

ROLAND GILLARD

Unités cyclotomiques et unités semi-locales

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 5 (1975-1977), exp. n° 7, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A7_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1975-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNITES CYCLOTOMIQUES ET
UNITES SEMI-LOCALES

par

Roland GILLARD

0. - INTRODUCTION

Je me propose dans cet exposé d'expliciter et de généraliser le § 2 de mon exposé du 9 décembre 1976.

Soit K un corps de nombres abélien réel, G le groupe de Galois de K/\mathbb{Q} et ℓ un nombre premier. Pour chaque idéal premier \mathfrak{L} de K au-dessus de ℓ , désignons par $U_{\mathfrak{L}}$ le groupe des unités du complété correspondant $K_{\mathfrak{L}}$ qui sont congrues à 1 modulo le complété de \mathfrak{L} . Nous appelons groupe des unités semi-locales le groupe $U = \prod_{\mathfrak{L}|\ell} U_{\mathfrak{L}}$. Soit C (resp E) le groupe des unités cyclotomiques formelles de K - cf. [5] et § 2.2 - (resp le groupe des unités de K). Considérons l'intersection de U et de l'image de C par l'application diagonale dans le produit $\hat{K} = \prod_{\mathfrak{L}|\ell} K_{\mathfrak{L}}$. Désignons par \bar{C} sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On note $C(K)$ le ℓ -groupe des classes de K .

On peut écrire canoniquement G sous la forme d'un produit direct $\Gamma \times \Delta$ avec Γ sous-groupe d'ordre une puissance de ℓ et Δ sous-groupe d'ordre premier à ℓ . Il est alors possible de décomposer l'anneau $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ et les modules sur $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ à l'aide des idempotents associés aux caractères de Δ définis et irréductibles sur \mathbb{Q}_{ℓ} . Si ϕ est un tel caractère, j'obtiens alors (au § 4.4) une formule analogue à celle de [2] pour l'ordre de la ϕ -composante de U/\bar{C} . Il y figure

une constante N_Γ qui ne dépend que de la structure de Γ et qui joue le même rôle que l'indice limite Q_G dans [5]. Lorsque Γ est cyclique, il est possible (cf. §5) de supprimer cette constante en agrandissant le groupe C

Dans la suite, nous choisissons une clôture algébrique Ω_ℓ de \mathbb{Q}_ℓ et un plongement φ dans Ω_ℓ d'une extension abélienne maximale \mathbb{Q}^{ab} de \mathbb{Q} contenant K . On utilise la valeur absolue de Ω_ℓ telle que $|\ell| = \frac{1}{\ell}$. Pour tout entier positif n on choisit dans \mathbb{Q}^{ab} une racine de l'unité d'ordre n , ζ_n de façon à avoir des relations de compatibilité $\zeta_{nm}^m = \zeta_n$.

§ 1. - PRELIMINAIRES

1.1. Tous les caractères que nous étudions sont à valeurs dans Ω_ℓ . On appelle \mathbb{Q} -caractères (resp \mathbb{Q}_ℓ -caractères, resp Ω_ℓ -caractères) d'un groupe, les caractères définis et irréductibles sur \mathbb{Q} (resp \mathbb{Q}_ℓ , resp Ω_ℓ). Si H est un groupe fini, à tout caractère χ de H défini sur \mathbb{Q} (resp \mathbb{Q}_ℓ , resp Ω_ℓ) on associe un élément e_χ de $\mathbb{Q}[H]$ (resp $\mathbb{Q}_\ell[H]$, resp $\Omega_\ell[H]$) par la formule :

$$e_\chi = \frac{1}{[H]} \sum_{\sigma \in H} \chi(\sigma^{-1}) \sigma \quad (1).$$

Nous choisissons une fois pour toutes un \mathbb{Q}_ℓ -caractère non trivial \mathfrak{f} de Δ ; soit d sa dimension. Par l'inclusion canonique de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G]$, $e_{\mathfrak{f}}$ s'identifie à l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ associé par (1) au caractère \mathfrak{f}^* de G induit par \mathfrak{f} . La décomposition de \mathfrak{f} en Ω_ℓ -caractères est notée :

$$\mathfrak{f} = \sum_{\psi | \mathfrak{f}} \psi.$$

Choisissons un Ω_ℓ -composant ψ_0 de \mathfrak{f} (i.e. un Ω_ℓ -caractère intervenant dans la décomposition précédente) et désignons par A (resp L) le

sous-anneau de Ω_ℓ engendré sur \mathbb{Z}_ℓ (resp le sous-corps de Ω_ℓ engendré sur \mathbb{Q}_ℓ) par l'image de ψ_0 . On définit comme suit un isomorphisme d'anneaux :

$$e_{\mathbb{F}} \mathbb{Z}_\ell [G] \xrightarrow{\sim} A[\Gamma] \quad (2) ;$$

à l'élément $\sum a_{\gamma\delta} \gamma\delta$ de $e_{\mathbb{F}} \mathbb{Z}_\ell [G]$, somme prise sur tous les couples (γ, δ) de $\Gamma \times \Delta \cong G$ et les coefficients $a_{\gamma\delta}$ étant dans \mathbb{Z}_ℓ , on associe l'élément $\sum a_{\gamma\delta} \cdot \psi_0(\delta)\gamma$ de $A[\Gamma]$. Par extension des scalaires, on déduit aussi un isomorphisme entre $e_{\mathbb{F}} \mathbb{Q}_\ell [G]$ et $L[\Gamma]$.

Si H est un groupe abélien fini et χ un Ω_ℓ -caractère, on désigne par g_χ l'ordre de χ (considéré comme élément du groupe dual de H) et d_χ le discriminant du corps $\mathbb{Q}(\zeta_{g_\chi})$. Si ξ est un \mathbb{Q} -caractère de H , on pose $g_\xi = g_\chi$ et $d_\xi = d_\chi$ où χ est un Ω_ℓ -composant quelconque de ξ .

Pour chaque Ω_ℓ caractère χ de G , soit K_χ le sous-corps de K défini par le noyau de χ considéré comme homomorphisme de G dans Ω_ℓ^* et f_χ le conducteur de K_χ . Si χ est un Ω_ℓ composant d'un \mathbb{Q} -caractère ξ de G , on notera encore K_ξ ou f_ξ pour K_χ ou f_χ . Tout Ω_ℓ caractère χ de G définit un caractère de Dirichlet modulo f_χ , qu'on note encore χ . Ceci permet de définir une somme de Gauss :

$$\tau(\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\chi)=1}}^{f_\chi} \chi(a) \zeta_{f_\chi}^a .$$

1.2. Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers de K et $\hat{\mathcal{O}}$ le produit des anneaux des entiers $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ des complétés $K_{\mathfrak{f}}$ pour \mathfrak{f} au-dessus de ℓ . Les anneaux $\hat{\mathcal{O}}$ et \hat{K} sont les complétés ℓ -adiques de \mathcal{O} et K : on identifie donc \mathcal{O} et K à leurs images dans $\hat{\mathcal{O}}$ et \hat{K} par l'application diagonale. L'action d'un élément quelconque σ de G se prolonge par continuité en un automorphisme de l'anneau \hat{K} encore noté σ . De

même on prolonge par continuité la restriction du plongement φ à K en une application encore notée φ . Pour chaque $\mathfrak{L}|\ell$ le logarithme définit une application de $U_{\mathfrak{L}}$ dans $K_{\mathfrak{L}}$. Notons $\mathfrak{L}\log$ l'application de U dans \hat{K} , produit des applications précédentes. Pour chaque Ω_{ℓ} -caractère χ de G , définissons une application T_{χ} de \hat{K} dans Ω_{ℓ} par :

$$T_{\chi}(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)^{-1} \varphi(\sigma(\alpha)) .$$

Il est facile de vérifier que l'on a la formule :

$$\forall \tau \in G , \quad T_{\chi}(\tau(\alpha)) = \chi(\tau) \cdot T_{\chi}(\alpha) .$$

Cette formule se prolonge par \mathbb{Z}_{ℓ} linéarité :

$$\forall u \in \mathbb{Z}_{\ell}[G] , \quad T_{\chi}(u(\alpha)) = \chi(u) T_{\chi}(\alpha) \quad (3).$$

Si ε est une unité de K congrue à 1 modulo \mathfrak{L} ($\forall \mathfrak{L}|\ell$), $\varphi(\sigma(\mathfrak{L}\log \varepsilon))$ est égal à $\varphi(\mathfrak{L}\log \sigma(\varepsilon))$ donc à $\log[\varphi(\varepsilon^{\sigma})]$. Ici \log est le logarithme dans Ω_{ℓ} , cf. [4] §4 ; ainsi :

$$T_{\chi}(\mathfrak{L}\log \varepsilon) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)^{-1} \log[\varphi(\varepsilon^{\sigma})] \quad (4).$$

1.3. Si M et N sont deux A -modules qui sont des réseaux dans un même espace vectoriel de dimension finie, on peut leur associer un idéal fractionnaire $[M, N]$ (cf. [1]) de A . Cet idéal est de la forme $\ell^a \cdot A$ pour a unique dans \mathbb{Z} . Nous appelons "indice" de N dans M et nous notons encore $[M:N]$ le nombre rationnel ℓ^a . Bien sûr, si M contient N , $[M:N]$ est égal à l'indice de N dans M au sens usuel. Enfin si M est un réseau et si N est de rang strictement inférieur, on dit que l'"indice" $[M:N]$ est infini.

Soit α un élément de \hat{K} tel que $e_{\mathfrak{L}} \mathbb{Z}_{\ell}[G] \cdot \alpha$ soit un réseau du L -espace vectoriel $e_{\mathfrak{L}} \hat{K}$, c'est-à-dire soit un \mathbb{Z}_{ℓ} module libre de rang d . Soit β un élément de \hat{K} . On peut alors énoncer :

LEMME 1. L'"indice" de $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\beta$ dans $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\alpha$ est fini si et seulement si pour tout \mathbb{Z}_ℓ -composant χ de Φ^* , $T_\chi(\beta)$ est non nul. Cet "indice" vaut alors :

$$[e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\alpha : e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\beta] = \frac{\prod_{\chi \in \Phi^*} T_\chi(\alpha)}{\prod_{\chi \in \Phi^*} T_\chi(\beta)} \quad (5).$$

Démonstration : On peut écrire $e_{\Phi} \beta = u(\alpha)$ avec u dans $e_{\Phi} \mathbb{Q}_\ell [G]$; en multipliant β par une puissance de ℓ suffisante, on voit qu'on peut supposer que u est dans $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G]$, on a alors un isomorphisme entre $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\alpha / e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\beta$ et $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G]/(u)$. Notons \tilde{u} l'application de $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G]$ dans lui-même définie par la multiplication par u . L'anneau $e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G]$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de rang d . L'indice étudié est fini si et seulement si le déterminant de \tilde{u} est non nul. Si cette condition est vérifiée l'indice vaut $|\det \tilde{u}|^{-1}$. Le déterminant de \tilde{u} peut être étudié à l'aide d'une extension des scalaires de \mathbb{Z}_ℓ à Ω_ℓ et de l'application Ω_ℓ -linéaire

$$e_{\Phi} \Omega_\ell [G] \xrightarrow{\pi e_\chi} \Omega_\ell^{d.} [\Gamma]$$

définie à l'aide des idempotents associés, cf. (1), aux Ω_ℓ -composants de Φ^* . Sur $\Omega_\ell^{d.} [\Gamma]$ l'endomorphisme \tilde{u} est traduit par une application linéaire de matrice diagonale, les éléments sur la diagonale de cette matrice sont précisément les nombres $\chi(u)$. Ainsi

$$[e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\alpha : e_{\Phi} \mathbb{Z}_\ell [G].\beta] = |\det \tilde{u}|^{-1} = \left| \prod_{\chi \in \Phi^*} \chi(u) \right|^{-1} .$$

Le lemme résulte alors de l'égalité (cf. 1.2 (3)) :

$$\chi(u) = \frac{T_\chi(\beta)}{T_\chi(\alpha)} .$$

§ 2. - RESUME DE RESULTATS DE LEOPOLDT

2.1. Rappelons rapidement des résultats de [6] utilisés dans la suite. Pour chaque nombre premier p ramifié dans K/\mathbb{Q} soit I_p^k le k ème groupe de ramification. Soit I (resp I^*) le sous-groupe $\prod_p I_p^1$ (resp $I_2^2 \cdot \prod_{p \neq 2} I_p^1$). Soit ξ un \mathbb{Q} -caractère de I trivial sur I_2^2 (i.e. tel que $\forall x \in I_2^2, \xi(x) = \xi(1)$) ou un \mathbb{Q} -caractère de I^* non trivial sur I_2^2 . On note par Ξ le caractère de G induit par ξ et e_{Ξ} l'idempotent de $\mathbb{Q}_\ell[G]$ associé à Ξ (cf. (1)). Soit Z l'ensemble des caractères Ξ définis de la façon précédente. Pour Ξ dans Z , soit f_{Ξ} le plus petit commun multiple des f_{χ} et K_{Ξ} le corps composé des corps K_{χ} , pour χ Ω_ℓ -composant de Ξ .

Pour Ξ dans Z et χ Ω_ℓ -composant, posons :

$$\tau(\chi, \zeta_{f_{\Xi}}) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_{\Xi})=1}}^{f_{\Xi}} \chi(a) \zeta_{f_{\Xi}}^a.$$

Pour Ξ dans Z définissons t_{Ξ} par :

$$t_{\Xi} = \frac{1}{[K_{\Xi} : \mathbb{Q}]} \sum_{\chi | \Xi} \tau(\chi, \zeta_{f_{\Xi}}).$$

A K est associé un ordre de $\mathbb{Q}[G]$

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{\Xi \in Z} e_{\Xi} \mathbb{Z}[G]$$

et un élément de \mathbb{Q}^{ab} :

$$t = \sum_{\Xi \in Z} t_{\Xi}.$$

Le résultat fondamental de [6] est que \mathcal{B} est l'ordre associé au $\mathbb{Z}[G]$ -module \mathcal{O} (i.e. on a $\mathcal{B} = \{\lambda \in \mathbb{Q}[G] \mid \lambda \mathcal{O} \subset \mathcal{O}\}$, que t est dans K et qu'on a :

$$\mathcal{O} = \mathcal{B}.t.$$

Un Ω_ℓ -caractère χ de G figure dans la décomposition d'un et d'un seul caractère Ξ de Z , f_{χ} divise alors f_{Ξ} et le rapport $\frac{f_{\Xi}}{f_{\chi}}$

est sans facteur carré et premier à f_χ (cf. [6]). Si μ désigne la fonction de Moebius, on a la relation pour χ Ω_ℓ -composant de Ξ (comparer à (1) et (15) de [6]) :

$$\sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \sigma(t) = \mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \tau(\chi^{-1}) [K:K_\Xi] \quad (6).$$

Remarquons que $\mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)$ est une racine de l'unité donc une unité de Ω_ℓ . Posons $\mathcal{D}_\ell = \bigoplus_{\Xi \in \mathbb{Z}} e_\Xi \mathbb{Z}_\ell [G]$: $\hat{\mathcal{O}}$ est un \mathcal{D}_ℓ -module libre de rang 1 engendré par t .

2.2. Nous rappelons maintenant la définition des unités cyclotomiques (cf. [5]). Si ξ est un \mathbb{Q} -caractère de G , Leopoldt définit l'entier algébrique θ_ξ comme suit. Choisissons pour tout automorphisme sur K_ξ , σ , du sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$, un prolongement $\bar{\sigma}$ à $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons θ_ξ par :

$$\theta_\xi = \prod_{\sigma} \bar{\sigma}(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1}).$$

Le carré de θ_ξ est égal au signe près à la norme dans K_ξ de l'élément $1 - \zeta_{f_\xi}$ de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$. Le groupe des unités cyclotomiques C_0 de K est l'intersection du groupe des unités E de K et du groupe engendré par -1 , les éléments θ_ξ et leurs conjugués, ξ parcourant l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de G .

Pour chaque ξ , notons σ_ξ un générateur du groupe de Galois (cyclique) de K_ξ sur \mathbb{Q} et $\bar{\sigma}_\xi$ un relèvement de σ_ξ dans $\mathcal{G} = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q})$. On considère alors les éléments γ_ξ et $\bar{\gamma}_\xi$ de $\mathbb{Z}[\text{Gal}(K_\xi/\mathbb{Q})]$ et $\mathbb{Z}[\mathcal{G}]$ définis par :

$$\gamma_\xi = \prod_{p|g_\xi} (1 - \sigma_\xi^{g_\xi/p}) \quad \bar{\gamma}_\xi = \prod_{p|g_\xi} (1 - \bar{\sigma}_\xi^{g_\xi/p}).$$

En prolongeant par \mathbb{Z} -linéarité l'action de \mathcal{G} sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{Q}^{\text{ab}})^*$, on peut considérer $\theta_\xi^{\bar{\gamma}_\xi}$: c'est une unité de K_ξ dont la norme

sur les sous-corps stricts de K_ξ vaut ± 1 . Soit Θ le produit des éléments $\theta_\xi^{\bar{\gamma}_\xi}$ pour ξ parcourant l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de G . Leopoldt définit le groupe des unités cyclotomiques formelles C comme étant le sous- $\mathbb{Z}[G]$ -module de E engendré par -1 et les éléments $\theta_\xi^{\bar{\gamma}_\xi}$. L'ordre de $\mathbb{Q}[G]$ associé au sous-module de E engendré par Θ (i.e. l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{Q}[G] \mid \Theta^\lambda \in E\}$) est l'ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ c'est-à-dire $\bigoplus_{\xi} e_\xi \mathbb{Z}[G]$, la somme étant prise sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de G : ceci résulte de l'égalité au signe près entre Θ^{e_ξ} et $\theta_\xi^{\bar{\gamma}_\xi}$. Si ξ est un \mathbb{Q} -caractère de G et χ un Ω_ℓ -composant de ξ on notera aussi $\theta_\chi \dots \bar{\gamma}_\chi$ pour $\theta_\xi \dots \bar{\gamma}_\xi$. De plus, pour tout Ω_ℓ caractère χ de G on définit $\chi(\gamma_\chi)$ en considérant χ comme un caractère de $G/\ker \chi$ et en l'étendant par linéarité. Considérons l'intersection de U et de l'image diagonale de C (resp de C_0) dans \hat{K} et notons \bar{C} (resp \bar{C}_0) sa fermeture.

2.3. Définissons (cf. [5] et [3]) pour tout groupe abélien H des entiers :

$$N_H = \sqrt{\frac{[H][H]}{\pi d_\xi}} \quad C_H = \sqrt{\pi d_\xi \left(\frac{[H]}{g_\xi}\right)^{\varphi(g_\xi)}}$$

où les produits sont pris sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de H et où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. On sait que C_H (cf. [3]) est égal à 1 si et seulement si H est cyclique et que N_H est l'indice de $\mathbb{Z}[H]$ dans l'ordre maximal $\bigoplus_{\xi} e_\xi \mathbb{Z}[H]$ de $\mathbb{Q}[H]$, somme prise sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de H .

LEMME 2. Le produit $N_H \cdot C_H$ est égal au produit des ordres des noyaux des Ω_ℓ -caractères de H . Le quotient N_H/C_H est donné par les formules où les produits sont pris sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de H :

$$N_H/C_H = \prod_{\xi} \frac{g_\xi^{\varphi(g_\xi)}}{d_\xi} = \prod_{\xi} \prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}.$$

Démonstration : Il suffit d'effectuer le produit et la division en tenant compte de la relation $[H] = \Sigma \varphi(g_{\xi})$. La dernière égalité provient de la valeur de d_{ξ} .

Exemples : Si H est cyclique d'ordre ℓ^n , alors C_H vaut 1 et N_H est égal à ℓ élevé à la puissance $(1 + \ell + \dots + \ell^{n-1})$. Si H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$, alors N_H (resp C_H) est égal à ℓ élevé à la puissance $\frac{1}{2}[(n-1)\ell^n + 1 + \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}]$ (resp $\frac{1}{2}[(n-1)\ell^n + 1 - \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}]$).

§ 3. - CALCUL DE L'INDICE DE $e_{\Phi} \mathbb{Z}_{\ell}[G]$ DANS $e_{\Phi} \mathcal{D}_{\ell}$

3.1. Pour chaque Ω_{ℓ} -caractère χ de G , on note $\Xi(\chi)$ l'unique élément de Z (cf. 2.1) qui admet χ comme Ω_{ℓ} -composant. Le but du § 3 est de démontrer la proposition :

PROPOSITION 1. Si \mathcal{D}_{ℓ} désigne l'ordre de $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ introduit à la fin de 2.1 on a :

$$[e_{\Phi} \mathcal{D}_{\ell} : e_{\Phi} \mathbb{Z}_{\ell}[G]] = \prod_{\chi | \Phi^*} [K : K_{\Xi(\chi)}]^{-1}.$$

3.2. Nous allons utiliser l'isomorphisme d'anneaux signalé en 1.1 entre $e_{\Phi} \mathbb{Q}_{\ell}[G]$ et $L[\Gamma]$. Soit Γ_1 (resp Γ_1^*) l'intersection de Γ et de I (resp I^*). Soit Ξ l'élément de Z défini par induction d'un \mathbb{Q} -caractère ξ de I (resp I^*). Notons ξ' la restriction de ξ à Γ_1 (resp Γ_1^*). Nous disons que Ξ et Φ sont compatibles si et seulement si Φ^* et Ξ possèdent au moins un Ω_{ℓ} -composant commun. A l'aide de l'inclusion de $L[\Gamma_1]$ (resp $L[\Gamma_1^*]$) dans $L[\Gamma]$ on peut considérer $e_{\xi'}$ comme un élément de $L[\Gamma]$.

LEMME 3. L'image de $e_{\Phi} \cdot e_{\Xi}$ dans $L[\Gamma]$ est $e_{\xi'}$, si Φ et Ξ sont compatibles et 0 sinon.

Démonstration : Remarquons d'abord que e_{Ξ} est égal à la somme $\sum e_{\chi}$, somme prise sur les Ω_{ℓ} -composants de Ξ ; comme $e_{\psi_0} \cdot e_{\chi}$ est nul sauf si χ et ψ_0 coïncident sur Δ , $e_{\psi_0} \cdot e_{\Xi}$ est nul sauf si un Ω_{ℓ} -composant de Ξ coïncide avec ψ_0 sur $\Delta \cap I$ (resp $\Delta \cap I^*$). Ceci signifie exactement que Ξ et Φ sont compatibles. Si cette dernière condition est vérifiée, on a $e_{\psi_0} \cdot e_{\Xi} = \sum e_{\chi}$, la somme étant prise sur les Ω_{ℓ} -caractères de G égaux à ψ_0 sur Δ et à ξ' sur Γ_1 (resp Γ_1^*). Ainsi $e_{\psi_0} \cdot e_{\Xi}$ n'est autre que l'idempotent du caractère de G induit par le caractère θ de $\Delta \times \Gamma_1$ (resp $\Delta \times \Gamma_1^*$) qui vaut $\psi_0(\delta)\xi'(\gamma)$ pour l'élément $\delta.\gamma$ de $\Delta \times \Gamma_1$ (resp $\Delta \times \Gamma_1^*$). C'est donc aussi e_{θ} considéré dans $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$. Cet idempotent s'identifie au produit des idempotents e_{ψ_0} et $e_{\xi'}$, dont les images dans $L[\Gamma]$ sont respectivement 1 et $e_{\xi'}$. Son image qui est la même que celle de e_{Ξ} est donc bien $e_{\xi'}$.

3.3. Supposons dans ce n° 3.3 que Γ_1 et Γ_1^* soient égaux, ce qui est toujours vérifié si $\ell \neq 2$. Le lemme 3 et (2) montrent qu'on a un isomorphisme de $A[\Gamma_1]$ -modules entre $e_{\Phi} \mathcal{D}_{\ell}$ et $\oplus e_{\lambda} A[\Gamma]$, donc encore entre $e_{\Phi} \mathcal{D}_{\ell}$ et $(\oplus e_{\lambda} A[\Gamma_1])^{[\Gamma:\Gamma_1]}$ (les sommes sont prises sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères λ de Γ_1). Le sous-module $e_{\Phi} \mathbb{Z}_{\ell}[G]$ est envoyé sur le sous-module $A[\Gamma_1]^{[\Gamma:\Gamma_1]}$. Comme A est un \mathbb{Z}_{ℓ} -module de rang d , l'indice $[e_{\Phi} \mathcal{D}_{\ell} : e_{\Phi} \mathbb{Z}_{\ell}[G]]$ est égal à la puissance $d \cdot [\Gamma:\Gamma_1]$ de l'indice $[\oplus e_{\lambda} \mathbb{Z}_{\ell}[\Gamma_1] : \mathbb{Z}_{\ell}[\Gamma_1]]$ c'est donc $(N_{\Gamma_1})^{d \cdot [\Gamma:\Gamma_1]}$. Par la théorie du corps de classes Γ_1 (resp Γ_1^* si $\ell = 2$) est cyclique car c'est l'image du groupe multiplicatif $1+p\mathbb{Z}_p$ (resp $1+4\mathbb{Z}_2$ si $\ell=2$) par l'application de réciprocité locale. Il en résulte que N_{Γ_1} est égal (cf. lemme 2) au produit des ordres des noyaux des Ω_{ℓ} -caractères de Γ_1 . Pour chaque Ω_{ℓ} -composant χ de Φ^* , soit χ_1 sa restriction à Γ_1 : il est facile de voir que le noyau de χ_1 est d'ordre $[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de \mathbb{Z}_{ℓ} près. La proposition de 3.1 provient (avec l'hypothèse $\Gamma_1 = \Gamma_1^*$) du fait qu'il y a exactement $(d \cdot [\Gamma:\Gamma_1])$ Ω_{ℓ} -composants de Φ^* qui ont même restriction à Γ_1 .

3.4. Etudions maintenant le cas où Γ_1^* est strictement inclus dans Γ_1 . Dans ce cas ℓ est égal à 2 et Γ_1^* est facteur direct de Γ_1 et d'indice 2. Ceci se voit en remarquant que grâce à la théorie du corps de classes Γ_1 est un quotient de $(\mathbb{Z}_2)^*$ et Γ_1^* est l'image du sous-groupe $1+4\mathbb{Z}_2$. Soit J l'élément de Γ_1 , image de $-1 \in 1+2\mathbb{Z}_2$: alors Γ_1 est égal au produit direct de Γ_1^* par $\{1, J\}$. Les caractères Ξ de Z proviennent soit d'un caractère ξ de I trivial sur I_2^2 , soit d'un caractère ξ de I^* non trivial sur I_2^2 . Les idempotents de $L[\Gamma]$ obtenus sont dans le premier cas

$$e = \frac{1}{[\Gamma_1]} (1+J) \sum_{\gamma \in \Gamma_1^*} \gamma \quad \text{et} \quad e' = \frac{1}{[\Gamma_1]} (1-J) \sum_{\gamma \in \Gamma_1^*} \gamma$$

et dans le second les e_λ où λ décrit l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères non triviaux de Γ_1^* . L'ordre de $L[\Gamma]$ image de $e_{\mathfrak{f}_\ell}$ est donc, en sommant sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères λ non triviaux de Γ_1^* :

$$eA[\Gamma] \oplus e'A[\Gamma] \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \neq 1} e_\lambda A[\Gamma] \right).$$

Il contient l'ordre $\bigoplus e_\lambda A[\Gamma]$, somme prise sur l'ensemble de tous les \mathbb{Q} -caractères de Γ_1^* avec l'indice $2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Ce qui précède, ajouté à un raisonnement calqué sur celui de 3.3, montre que l'indice de $e_{\mathfrak{f}_\ell} \mathbb{Z}_\ell[G]$ dans $e_{\mathfrak{f}_\ell}$ est égal à $(N_{\Gamma_1^*})^{d[\Gamma:\Gamma_1^*]} \cdot 2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Pour évaluer $N_{\Gamma_1^*}$ on utilise la propriété de Γ_1^* d'être cyclique. Pour chaque Ω_ℓ composant χ de \mathfrak{f}^* soit χ_1^* sa restriction à Γ_1^* . Il est facile de voir que si χ_1^* n'est pas trivial, son noyau est d'ordre $[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de \mathbb{Z}_2 près. Ceci est encore vrai si χ est trivial sur Γ_1^* mais non sur Γ_1 . Enfin si χ est trivial sur Γ_1 , le noyau de χ_1^* est d'ordre $\frac{1}{2}[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de \mathbb{Z}_2 près. La proposition de 3.1 résulte alors du fait qu'il y a exactement $d[\Gamma:\Gamma_1^*]$ (resp $d[\Gamma:\Gamma_1]$) Ω_ℓ -composants de \mathfrak{f}^* qui ont même restriction à Γ_1^* (resp à Γ_1).

§ 4. - INDICE DU GROUPE DES UNITES CYCLOTOMIQUES FORMELLES

4.1. Soit m un entier strictement positif, premier à ℓ , assez grand pour que l'image diagonale dans \hat{K} des unités $\theta_{\xi}^{\bar{y}_{\xi}^m}$ soit dans U , pour tous les \mathbb{Q} -caractères ξ de G . L'image de Θ^m dans \hat{K} est alors aussi dans U . Soit \bar{C}_1 le sous- $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -module de U engendré par cet élément. Nous allons d'abord évaluer l'indice de $e_{\mathbb{F}}\bar{C}_1$ dans $e_{\mathbb{F}}U$. Désignons par Q l'indice $\left[e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathbb{F}}\left(\prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right) \right]$.

LEMME 4. On a la relation suivante sur les "indices" :

$$[e_{\mathbb{F}}(U/\bar{C}_1)] = \frac{1}{Q} [e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathbb{F}}\mathbb{Z}_{\ell}[G] \mathfrak{L}\log \Theta^m]$$

Démonstration : Soit μ l'ordre du sous-groupe de torsion de $e_{\mathbb{F}}U$ on a :

$$\begin{aligned} [e_{\mathbb{F}}(U/\bar{C}_1)] &= [e_{\mathbb{F}}U/e_{\mathbb{F}}\bar{C}_1] \\ &= [e_{\mathbb{F}} \mathfrak{L}\log U / e_{\mathbb{F}}\mathbb{Z}_{\ell}[G] \mathfrak{L}\log \Theta^m] \cdot \mu \\ &= \frac{[e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathbb{F}}\mathbb{Z}_{\ell}[G] \mathfrak{L}\log \Theta^m]}{[e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathbb{F}} \mathfrak{L}\log U]} \cdot \mu . \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour r entier assez grand, $e_{\mathbb{F}} \mathfrak{L}\log \left(\prod_{\mathfrak{p}|\ell} (1 + \mathfrak{L}^r \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \right)$ est égal à $e_{\mathbb{F}} \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{L}^r \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Son indice dans $e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}}$ est Q^r celui dans $e_{\mathbb{F}} \mathfrak{L}\log U$ est $\frac{1}{\mu} Q^{r-1}$. D'après la multiplicativité de l'"indice" introduit en 1.3, on a :

$$[e_{\mathbb{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathbb{F}} \mathfrak{L}\log U] = Q \cdot \mu .$$

4.2. Calculons maintenant l'indice Q :

LEMME 5. L'indice Q vaut $\left| \prod_{\chi|\mathbb{F}^*} \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell} \right) \right|$.

Démonstration : Notons D (resp $D_\circ, \Gamma_\circ, \Delta_\circ$) le sous-groupe de décomposition de ℓ dans K/\mathbb{Q} (resp le sous-groupe d'inertie de ℓ dans D, Γ, Δ) . Choisissons un idéal premier \mathfrak{L}_\circ de K au-dessus de ℓ . On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est le G -module induit par le D -module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_\circ}$. De même $\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est le G -module induit par le D -module $\mathfrak{L}_\circ\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_\circ}$. Il résulte alors de l'interprétation du module induit à l'aide d'un produit tensoriel et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est le $\mathbb{F}_\ell[G]$ -module induit par le $\mathbb{F}_\ell[D]$ -module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_\circ}/\mathfrak{L}_\circ\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_\circ}$. D'après le théorème de la base normale pour les extensions galoisiennes, ce dernier module est isomorphe à $\mathbb{F}_\ell[D/D_\circ]$ c'est-à-dire au $\mathbb{F}_\ell[D]$ -module induit par le D_\circ -module \mathbb{F}_ℓ où D_\circ agit trivialement. On en conclut que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est un G -module isomorphe à $\mathbb{F}_\ell[G/D_\circ]$, donc un Δ -module isomorphe au produit de $[\Gamma:\Gamma_\circ]$ -copies de $\mathbb{F}_\ell[\Delta/\Delta_\circ]$. L'ordre de $e_{\mathfrak{F}}\left(\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}\right)$ est donc $\ell^{d \cdot [\Gamma:\Gamma_\circ]}$ si les composants ψ de \mathfrak{F} sont triviaux sur Δ_\circ et 1 sinon. Le lemme en résulte facilement sachant que pour tout Ω_ℓ -caractère χ , composant de \mathfrak{F}^* , $|1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell}|$ vaut ℓ si χ est trivial sur D_\circ et 1 sinon.

4.3. L'"indice" $[e_{\mathfrak{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathfrak{F}}\mathbb{Z}_\ell[G]\mathfrak{L}\log \mathcal{O}^m]$ se calcule par la méthode 1.3 en tenant compte des résultats des § 2 et 3. On obtient alors le résultat suivant où figure la fonction L ℓ -adique (cf. [4]) :

LEMME 6. L'ordre de $e_{\mathfrak{F}}(U/\bar{C}_1)$ est égal à

$$\left| \prod_{\chi|\mathfrak{F}^*} \frac{[G]}{g_\chi} \chi(\gamma_\chi) \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Démonstration : On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est un \mathcal{H}_ℓ -module engendré par t (cf. 2.1) on a donc (cf. prop. 1 du § 3) :

$$[e_{\mathfrak{F}}\hat{\mathcal{O}} : e_{\mathfrak{F}}\mathbb{Z}_\ell[G]t] = \left| \prod_{\chi|\mathfrak{F}^*} [K : K_{\mathbb{H}(\chi)}] \right|^{-1} .$$

De plus, d'après le lemme 1 de 1.3 :

$$[e_{\mathfrak{f}} \mathbb{Z}_{\ell}[G]_t : e_{\mathfrak{f}} \mathbb{Z}_{\ell}[G] \mathfrak{L} \log \Theta^m] = \left| \frac{\overline{\prod_{\chi | \mathfrak{f}^*} T_{\chi}(t)}}{\overline{\prod_{\chi | \mathfrak{f}^*} T_{\chi}(\mathfrak{L} \log \Theta^m)}} \right| .$$

La formule (6) de 2.1, appliquée à $T_{\chi}(t) = \Sigma \chi(\sigma)^{-1} \sigma(t)$, et la remarque qui la suit montrent que :

$$\left| \overline{\prod_{\chi | \mathfrak{f}^*} T_{\chi}(t)} \right| = \left| \overline{\prod_{\chi | \mathfrak{f}^*} \tau(\chi^{-1}) \cdot [K : K_{\Xi(\chi)}]} \right| .$$

D'autre part, d'après (3) $T_{\chi}(\mathfrak{L} \log \Theta^m)$ est égal à $T_{\chi}(e_{\xi} \mathfrak{L} \log \Theta^m)$ si ξ est le \mathbb{Q} -caractère de G ayant χ comme Ω_{ℓ} -composant, donc en tenant compte de 2.2 à $T_{\chi}(\mathfrak{L} \log \theta_{\xi}^{m\gamma_{\xi}})$. Ce dernier nombre se calcule à l'aide de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} T_{\chi}(\mathfrak{L} \log \theta_{\xi}^{2m\gamma_{\xi}}) &= \sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \log \left[\varphi \left(\theta_{\xi}^{2m\gamma_{\xi}\sigma} \right) \right] \\ &= m \cdot \chi(\gamma_{\xi}) \cdot \sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \log [\varphi(\theta_{\xi}^{2\sigma})] \\ &= m \cdot \chi(\gamma_{\xi}) \cdot \frac{[G]}{g_{\xi}} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_{\chi}/\mathbb{Q})} \chi^{-1}(\sigma) \log [\varphi(\theta_{\xi}^{2\sigma})] \\ &= m \cdot \chi(\gamma_{\xi}) \cdot \frac{[G]}{g_{\chi}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_{\chi})=1}}^{f_{\chi}} \chi^{-1}(a) \log \left[\varphi \left(1 - \zeta_{f_{\chi}}^a \right) \right] . \end{aligned}$$

La première égalité écrite provient de la formule (4), la seconde est conséquence d'un calcul analogue à celui de (3) le logarithme a été prolongé comme dans [4] § 4. Dans la troisième égalité, on a considéré χ comme un caractère de $G/\text{Ker } \chi$ qui est isomorphe au groupe de Galois $\text{Gal}(K_{\chi}/\mathbb{Q})$. Dans la dernière égalité χ est identifié au caractère de Dirichlet modulo f_{χ} qu'il définit ; on a exprimé $\theta_{\xi}^{2\sigma}$ comme norme de $(1 - \zeta_{f_{\chi}})$ (cf 2.2). La somme sur a se calcule à l'aide de la formule donnant $L_{\ell}(1, \chi)$ (cf. par exemple [4] §5) et la relation classique $\tau(\chi)\tau(\chi^{-1}) = f_{\chi}$:

$$-\sum \chi^{-1}(a) \ell \log \left[\varphi \left(1 - \zeta_{f_\chi}^a \right) \right] = \tau(\chi^{-1}) \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell} \right)^{-1} L_\ell(1, \chi) .$$

Le lemme 6 résulte alors des calculs précédents et des lemmes 4 et 5.

4.4. Traduisons maintenant 4.3 sur le groupe des unités formelles :

THEOREME 1. L'ordre de $e_{\mathfrak{f}}(U/\bar{C})$ est donné par :

$$[e_{\mathfrak{f}}(U/\bar{C})] = N_\Gamma^d \cdot \left| \prod_{\chi \in \mathfrak{f}^*} \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Démonstration : En revenant aux définitions de C_1 et C (cf. § 4.1 et 2.2) on voit que l'indice de $e_{\mathfrak{f}}\bar{C}_1$ dans $e_{\mathfrak{f}}\bar{C}$ est égal à celui de $e_{\mathfrak{f}}\mathbb{Z}_\ell[G]$ dans $e_{\mathfrak{f}}(\oplus e_\xi\mathbb{Z}_\ell[G])$ où dans la somme ξ parcourt l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères non triviaux de G . C'est aussi, grâce à la formule (2) l'indice de $A[\Gamma]$ dans $\oplus e_\lambda A[\Gamma]$ où dans la somme λ parcourt l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères de Γ , c'est donc (cf. 2.3) N_Γ^d . Ainsi :

$$[e_{\mathfrak{f}}(U/\bar{C})] = \frac{1}{N_\Gamma^d} \left| \prod_{\chi \in \mathfrak{f}^*} \chi(\gamma_\chi) \frac{[G]}{g_\chi} \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Si χ est un composant de \mathfrak{f}^* , notons ψ et π ses restrictions à Δ et Γ ; soit ξ (resp ρ) le \mathbb{Q} -caractère de G (resp Γ) ayant χ (resp π) parmi ses Ω_ℓ -composants. On a alors :

$$\left| \frac{[G]}{g_\chi} \right| = \left| \frac{[\Gamma]}{g_\pi} \right| \quad \text{et} \quad |\chi(\gamma_\chi)| = |1 - \pi(\sigma_\xi)| .$$

D'après le lemme 2 de 2.3, on déduit :

$$\left| \prod_{\chi \in \mathfrak{f}^*} \frac{[G]}{g_\chi} \right|^{-1} = (N_\Gamma \cdot C_\Gamma)^d$$

et, en observant qu'il y a exactement d caractères χ qui correspondent au même π

$$\left| \prod_{\chi \in \mathfrak{f}^*} \chi(\gamma_\chi) \right|^{-1} = \left[\prod_{\rho} \ell^{\varphi(g_\rho)/\ell-1} \right]^d = \left(\frac{N_\Gamma}{C_\Gamma} \right)^d .$$

Dans le terme du milieu, le produit est pris sur l'ensemble des \mathbb{Q} -caractères ρ de Γ .

4.5. Remarque sur le caractère trivial. Dans ce qui précède, nous avons supposé que Φ est non trivial. Le théorème 1 est encore vrai si Φ est trivial, en convenant que les deux membres de l'égalité sont infinis : le rang de $e_{\Phi} \bar{C}$ est $[\Gamma]-1$, celui de $e_{\Phi} U$ est $[\Gamma]$ et la fonction L ℓ -adique correspondant au Ω_{ℓ} -caractère trivial de G admet un pôle en $s = 1$. Cependant en remplaçant \bar{C} par le $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -module \bar{C}' engendré par \bar{C} et $(1+\ell)$ on obtient :

$$[e_{\Phi}(U/\bar{C}')] = \frac{N_{\Gamma}}{2} \left| \prod_{\substack{\chi | \Phi^* \\ \chi \text{ non trivial}}} \frac{L_{\ell}(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

§ 5. - CAS OU Γ EST CYCLIQUE

Si Γ est cyclique, montrons qu'on peut supprimer l'indice N_{Γ} figurant dans le théorème 1, en remplaçant les unités cyclotomiques formelles par les unités cyclotomiques (cf. § 2.2) :

THEOREME 2. Si Γ est cyclique et Φ non trivial, on a :

$$[e_{\Phi}(U/\bar{C}_0)] = \left| \prod_{\chi | \Phi^*} \frac{L_{\ell}(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

Démonstration : Il s'agit de montrer que $e_{\Phi} \bar{C}$ est un sous-groupe d'indice N_{Γ}^d de $e_{\Phi} \bar{C}_0$. C'est clair si Γ est trivial car alors les éléments γ_{χ} introduits plus haut sont inversibles dans $e_{\Phi} \mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$. Si Γ est cyclique d'ordre ℓ^n , on sait que N_{Γ} vaut $\ell^{1+\ell+\dots+\ell^{n-1}}$ (cf. § 2.3). Soit π un générateur de $\text{Hom}(\Gamma, \Omega_{\ell}^*)$, ψ un Ω_{ℓ} -composant de Φ et δ un générateur de $\text{Gal}(K_{\psi}/\mathbb{Q})$. Pour

apparaître des blocs d'ordre $(\ell-1)$ et de déterminant ℓ :

$$\begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ & 0 & \\ 1 & \diagdown & \\ & & -1 \\ 0 & \diagup & \\ & & 1 \\ & & -2 \end{pmatrix} \text{ pour } \ell \neq 3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ pour } \ell = 3 .$$

Un bloc correspond à un couple d'entiers positifs (k, j) avec $0 \leq k < n$, $0 \leq j < \ell^k$: on regroupe les lignes et les colonnes correspondant aux éléments $\beta_{\ell^{k_{i+j}}}$ pour $i = 1, \dots, \ell-1$.

Le déterminant de la matrice est donc au signe près $\ell^{1+\dots+\ell^{n-1}}$ (il y a $(\ell^n-1)/(\ell-1)$ blocs si $\ell \neq 2$) c'est donc N_{Γ} (cf. fin de 2.3). Enfin $e_{\mathbb{F}} \mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ est un \mathbb{Z}_{ℓ} -module de rang d . L'indice de $e_{\mathbb{F}} \bar{C}$ dans $e_{\mathbb{F}} \bar{C}_0$ est bien N_{Γ}^d .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. FRÖHLICH - Ideals in a extension field as modules...
Math. Zeit. 74 (1960) pp. 29-38.
- [2] R. GILLARD - Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles. Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, 9 déc. 1976.
- [3] H. HASSE - Uber die Klassenzahl abelscher Zahlkörper Akademie Verlag Berlin 1952.
- [4] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. press.
- [5] H. LEOPOLDT - Uber Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin 2 (1954).
- [6] H. LEOPOLDT - Uber die Hauptordnung der ganze Elemente eines abelschen Zahlkörper. J. reine angew. Math. Bd 201 (1959) pp. 119-149.