SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

ROLAND GILLARD

**Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles**

*Séminaire de théorie des nombres de Grenoble*, tome 5 (1975-1977), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A3_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
9 décembre 1976
Grenoble



# SUR LE GROUPE DES CLASSES DES EXTENSIONS ABELIENNES REELLES

par

Roland GILLARD

## §1 - ENONCE DES RESULTATS [1]

1.1. Soient $K$ un corps de nombres abélien réel et $\ell$ un nombre premier impair. On suppose que le degré (fini) de $K$ est premier à $\ell$. On désigne par $E$ le groupe des unités de $K$ et par $C$ le sous-groupe des unités cyclotomiques : on sait (cf. [6] Satz 20) que la $\ell$-partie de l'ordre du groupe $E/C$ est égale à la $\ell$-partie de l'ordre du groupe $\mathcal{C}(K)$ des classes d'idéaux de $K$. Le but de ce travail est de préciser ce résultat. Pour tout groupe fini $X$, on note $[X]$ son ordre.

Soit $G$ le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$. L'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$ se décompose en somme directe :

$$\mathbb{Z}_\ell[G] = \oplus\, e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$$

où $\Phi$ parcourt l'ensemble des caractères de $G$ définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}_\ell$ et $e_\Phi$ l'idempotent correspondant :

$$e_\Phi = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma\in G} \Phi(\sigma^{-1})\sigma \ .$$

Ceci permet de décomposer les $\ell$-sous-groupes de Sylow de $E/C$ et

---

[1] En préparant cet exposé, j'ai appris que Ralph Greenberg avait déjà obtenu ces résultats par une méthode analogue.

$\mathcal{C}(K)$ notés respectivement $(E/C)_\ell$ et $\mathcal{C}_\ell(K)$ :

$$(E/C)_\ell = \oplus\, e_\Phi (E/C)_\ell \qquad \mathcal{C}_\ell(K) = \oplus\, e_\Phi\, \mathcal{C}_\ell(K) .$$

Dans [3], G. Gras formule la conjecture :

CONJECTURE 1. - <u>Les groupes</u> $e_\Phi(E/C)_\ell$ <u>et</u> $e_\Phi\,\mathcal{C}_\ell(K)$ <u>ont même ordre</u>.

Remarquons que si $\Phi$ est le caractère trivial, les deux groupes ci-dessus sont nuls. Nous écartons donc ce cas dans la suite. Soient $K'$ le corps obtenu par adjonction à $K$ des racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $G'$ son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$. Pour notre discussion nous formulons des hypothèses restrictives :

(H.R.)

a) aucun idéal au-dessus de $\ell$ n'est décomposé dans l'extension entre $K'$ et son sous-corps réel maximal.

b) le $\ell$-sous-groupe de Sylow $\mathcal{C}_\ell(K')$ du groupe des classes de $K'$ est $\mathbb{Z}_\ell[G']$-monogène.

Ces hypothèses nous sont indispensables pour appliquer le théorème 3 ci-dessous. Le résultat principal est le suivant :

THEOREME 1. - <u>Si</u> $K$ <u>et</u> $\ell$ <u>vérifient</u> (H.R.), <u>pour chaque</u> $\Phi$ <u>la conjecture</u> 1 <u>est vraie</u>.

1.2. Pour chaque idéal $\mathfrak{L}$ de $K$ au-dessus de $\ell$, désignons par $K_\mathfrak{L}$ le complété de $K$ correspondant, par $\mathcal{O}_\mathfrak{L}$ l'anneau des entiers de $K_\mathfrak{L}$, par $U_\mathfrak{L}$ le groupe des unités de $K_\mathfrak{L}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{L}\mathcal{O}_\mathfrak{L}$. Désignons par $U$ (resp. par $\hat{K}$, resp. par $\hat{\mathcal{O}}$) le produit des $U_\mathfrak{L}$ (resp. des $K_\mathfrak{L}$, resp. des $\mathcal{O}_\mathfrak{L}$) muni de la topologie produit. Considérons l'intersection de $U$ et de l'image diagonale de $E$ (resp. de $C$) dans $\hat{K}$ ; notons $\bar{E}$ (resp. $\bar{C}$) sa fermeture dans $U$. Désignons par $\Omega_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ et par $|\;|$ la valeur absolue de $\Omega_\ell$ vérifiant $|\ell| = 1/\ell$. Si $\psi$ est un caractère de $G$ défini et irréductible sur $\Omega_\ell$ et si $\psi$ intervient dans la décomposition de $\Phi$, on notera $\psi|\Phi$. A un tel $\psi$ est attaché une fonction L $\ell$-adique (cf. par exemple [5]). Le groupe $\overline{C}$ intervient dans la démonstration du théorème 1 par l'énoncé suivant (indépendant de (H.R.)) :

THEOREME 2. - <u>Le groupe</u> $e_\Phi(U/\overline{C})$ <u>est fini et son ordre est égal à</u> :

$$|L_\ell(1,\Phi)|^{-1} = |\prod_{\psi|\Phi} L_\ell(1,\psi)|^{-1} .$$

1.3. La démonstration du théorème 1 utilise les $\mathbb{Z}_\ell$-extensions cyclotomiques de K et K' (cf [4]) : si $\mathbb{Q}_\infty$ désigne l'unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension de $\mathbb{Q}$, on note $K_\infty$ et $K'_\infty$ les extensions composées de $\mathbb{Q}_\infty$ avec K et K'. On désigne par $M_\infty$ (resp. $L_\infty$) la $\ell$-extension abélienne non ramifiée pour les idéaux premiers à $\ell$ (resp. non ramifiée) maximale de $K_\infty$. On définit de même $M$, $L$, $M'_\infty$, $L'_\infty$ (à partir de K et $K'_\infty$). Pour $\Phi$ donné (fixé dans toute la suite) et $\psi|\Phi$, soient f le conducteur de $\psi$ et q le plus petit commun multiple de f et $\ell$. On appelle $\gamma$ le générateur du groupe de Galois $\Gamma$ de $K'_\infty/K'$ qui agit sur les racines d'ordre une puissance de $\ell$ par élévation à la puissance $1+q$. Les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$, $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ etc... sont des $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-modules topologiques compacts. En faisant correspondre à $\gamma$, la série formelle $1+T$, on peut les munir de structures de $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ modules de type fini (cf [4]).

Désignons par A l'anneau obtenu par adjonction à $\mathbb{Z}_\ell$ de l'image de $\psi$. Soit $\omega$ le caractère de G' obtenu par l'action sur les racines de l'unité d'ordre $\ell$. On note $\tilde{\psi}$ le caractère $\omega\psi^{-1}$ et $\tilde{\Phi}$ la somme de ses conjugués sur $\mathbb{Q}_\ell$. Soit $f(T,\psi)$ la série formelle associée par Iwasawa (cf [5] §6) au caractère de Dirichlet primitif défini par $\psi$. Soit enfin $e_{\tilde{\Phi}}$ l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ associé à $\tilde{\Phi}$. La conjugaison dans $\mathrm{Gal}(L'_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ permet de définir une action de G' sur $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$. On peut énoncer (cf [1]) :

CONJECTURE 2. - Il existe un $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$-homomorphisme injectif à conoyau fini de $e_{\tilde{\Phi}}\ \mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ dans le quotient $A[[T]]/(f(T,\psi))$ .

Les hypothèses (H.R.) interviennent dans le théorème suivant (cf.[1])

THEOREME 3. - Si $K$ et $\ell$ vérifient (H.R.) alors la conjecture 2 est vraie.

Le théorème 3 permet d'utiliser le théorème 4 (indépendant de (H.R.)):

THEOREME 4. - Si $K$ , $\ell$ et $\Phi$ vérifient la conjecture 2, ils vérifient la conjecture 1.

Ainsi, le théorème 1 résulte immédiatement des théorèmes 3 et 4. Le théorème 4 est démontré au §3 . Sa démonstration utilise le théorème 2 dont la démonstration fait l'objet du §2 . Les notations introduites ci-dessus restent valables dans la suite.

## §2 - DEMONSTRATION DU THEOREME 2

2.1. Fixons un plongement $\varphi$ de $K$ dans $\Omega_\ell$ . Définissons pour $\alpha$ dans $K$ un élément $T_\psi(\alpha)$ dans $\Omega_\ell$ :

$$T_\psi(\alpha) = \sum_{\theta\in G} \psi^{-1}(\theta)\varphi(\theta(\alpha)) \quad . \tag{1}$$

Comme $K$ , identifié à son image par le plongement diagonal, est dense dans $\hat{K}$ , on peut prolonger à cet anneau l'action de $G$ et les applications $\varphi$ et $T_\psi$ . On conserve les mêmes notations pour les prolongements. En prenant le logarithme sur chaque composante on définit une application Log de $U$ dans $\hat{K}$ . Cette application commute avec l'action de $G$ sur $\hat{K}$ . De plus, si un élément $\alpha$ de $E$ se plonge diagonalement dans $U$ , $\varphi(\mathrm{Log}\ \alpha)$ n'est autre que le logarithme de $\varphi(\alpha)$ dans $\Omega_\ell$ . On a alors :

$$T_\psi(\mathrm{Log}\ \alpha) = \sum_{\theta\in G} \psi^{-1}(\theta)\ \log[\varphi(\theta(\alpha))] \tag{2}$$

Si $\alpha$ est un élément de $\hat{K}$ et $u$ un élément de $G$ on déduit de (1) :

$$T_\psi(u(\alpha)) = \psi(u)\,T_\psi(\alpha)\,. \tag{3}$$

Cette formule s'étend sans difficulté au cas où $u$ est un élément de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ en prolongeant $\psi$ par linéarité sur cette algèbre. Pour $\alpha$ dans $\hat{K}$ posons :

$$T_\Phi(\alpha) = \Big|\prod_{\psi|\Phi} T_\psi(\alpha)\Big|\;. \tag{4}$$

Si $\operatorname{Im}\psi$ désigne l'image de $\psi$ dans $\Omega_\ell$ et $N$ la norme de $\mathbb{Q}_\ell(\operatorname{Im}\psi)$ à $\mathbb{Q}_\ell$, à partir de (3) on obtient :

$$\forall u \in \mathbb{Z}_\ell[G]\;,\; T_\Phi(u(\alpha)) = |N(\psi(u))|\,T_\Phi(\alpha)\;. \tag{5}$$

Cette formule permet de montrer qu'il existe une et une seule fonction $T'_\Phi$ définie sur l'ensemble des sous $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules de $e_\Phi\hat{K}$ qui en sont des réseaux, fonction vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall\alpha\in e_\Phi\hat{K}\;,\;\alpha\neq 0\;,\; T'_\Phi(\mathbb{Z}_\ell[G]\,.\alpha) = T_\Phi(\alpha) \tag{6}$$

$$\text{pour tout } A,B \text{ avec } A\supset B\;,\; T'_\Phi(A) = [A/B]\,.T'_\Phi(B)\;. \tag{7}$$

2.2. Nous allons énoncer trois formules pour $T'_\Phi$ qui suffisent à démontrer le théorème 2. La première donne l'expression de $T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log}\bar{C})$ :

$$T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log}\bar{C}) = \Big|\prod_{\psi|\Phi} L_\ell(1,\psi)\Big|\cdot\Big|\prod_{\psi|\Phi}\frac{\tau(\psi)}{f}\Big(1-\frac{\psi(\ell)}{\ell}\Big)\Big|^{-1}\;. \tag{8}$$

Le fait que $e_\Phi \operatorname{Log}\bar{C}$ soit un réseau de $e_\Phi\hat{K}$ résulte de la conjecture de Leopoldt vérifiée puisque $K$ est abélien. La formule (8) résulte de (6), de la définition des unités cyclotomiques (cf.[6]), de (2) et de la formule de [5] §5 pour $L_\ell(1,\psi)$. Dans les calculs s'introduisent des facteurs parasites qui se réduisent à ceux de (8) grâce à l'hypothèse $\ell \nmid [G]$. La formule suivante ramène le calcul de $T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log} U)$ à celui de $T'_\Phi(e_\Phi\hat{\mathcal{O}})$. On désigne par $\mu$ l'ordre du groupe de torsion de $e_\Phi U$ :

$$T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log} U) = \mu^{-1}.T_\Phi(e_\Phi\hat{\mathcal{O}}).\Big|\prod_{\psi|\Phi}\Big(1-\frac{\psi(\ell)}{\ell}\Big)\Big|^{-1}\;. \tag{9}$$

Sa démonstration résulte d'un calcul d'indice facile : par (7), il suffit d'exprimer les indices du module $e_\Phi\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}^r = e_\Phi \operatorname{Log}\big(\prod_{\mathfrak{L}|\ell}(1+\mathfrak{L}^r\mathcal{O}_\mathfrak{L})\big)$, pour

$r$ assez grand, dans $e_\Phi \operatorname{Log} U$ et $e_\Phi \hat{\mathcal{O}}$ . Notre dernière formule donne la valeur de $T'_\Phi(e_\Phi \hat{\mathcal{O}})$ à l'aide de sommes de Gauss.

$$T'_\Phi(e_\Phi \hat{\mathcal{O}}) = \left| \prod_{\psi \mid \Phi} \tau(\psi^{-1}) \right| . \tag{10}$$

On utilise [7] pour obtenir une base explicite de $\mathcal{O}$ sur un ordre de $\mathbb{Q}[G]$ exprimée à l'aide d'une somme $T_K$ de sommes de Gauss. Lorsqu'on passe de $\mathcal{O}$ à $\hat{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ ,l'ordre est remplacé (en vertu de l'hypothèse $\ell \not| [G]$ ) par $\mathbb{Z}_\ell[G]$ . Il suffit alors de calculer l'image des sommes de Gauss par les applications $T_\psi$ .

2.3. D'après (7), on a :

$$[e_\Phi(U/\overline{C})] = \mu[e_\Phi \operatorname{Log} U / e_\Phi \operatorname{Log} \overline{C}] = \mu T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log} U)/T'_\Phi(e_\Phi \operatorname{Log} \overline{C}) . \tag{11}$$

Le théorème 2 résulte alors des égalités précédentes et de l'égalité classique $\tau(\psi)\tau(\psi^{-1}) = f$ .

## §3 - DEMONSTRATION DU THEOREME 4

On suppose qu'il existe un $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ – homomorphisme à noyau et conoyau finis :

$$e_{\tilde{\Phi}} \operatorname{Gal}(L'_\infty/K'_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(T,\psi)) .$$

On déduit comme dans [4] théorème 16, mais en tenant compte de l'idempotent et du choix différent de $\gamma$ , qu'il existe aussi un $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ homomorphisme à noyau et conoyau finis :

$$e_{\Phi'} \operatorname{Gal}(M'_\infty/K'_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(\tfrac{1+q}{1+T} - 1, \psi)) .$$

Ici $\Phi'$ désigne le caractère de $G'$ défini à l'aide de $\Phi$ et du passage au quotient $G' \to G$ , et $e_{\Phi'}$ l'idempotent correspondant. On rappelle que la conjugaison dans $\operatorname{Gal}(M'_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et $\operatorname{Gal}(M_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ permet de munir $\operatorname{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)$ et $\operatorname{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ de structures respectivement de $G'$ - module et de $G$-module, ces structures étant compatibles entre elles. On sait d'après [4] théorème 18 que $\operatorname{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)$ n'a pas de sous-$\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ -module fini non trivial. De plus, $e_{\Phi'}\, Gal(M'_\infty/K'_\infty)$ s'identifie à $e_\Phi\, Gal(M_\infty/K_\infty)$. Il en résulte qu'on peut écrire une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$-modules avec un conoyau $D$ fini :

$$0 \to e_\Phi\, Gal(M_\infty/K_\infty) \to A[[T]]/(f(\frac{1+q}{1+T}-1,\psi)) \to D \to 0 \quad . \tag{12}$$

Il est clair que $M$ contient $K_\infty$ ; de plus $Gal(M/K_\infty)$ s'obtient en divisant $Gal(M_\infty/K_\infty)$ par le groupe des commutateurs qui est, en notations additives, $(1-\gamma)Gal(M_\infty/K_\infty) = T.Gal(M_\infty/K_\infty)$. L'action de $G$ commutant avec celle de $Gal(K_\infty/K)$ on a un résultat analogue pour $e_\Phi Gal(M_\infty/K_\infty)$ et $e_\Phi Gal(M/K_\infty)$. Le caractère $\Phi$ étant non trivial, ce dernier groupe s'identifie à $e_\Phi Gal(M/K)$. Le noyau de la multiplication par $T$ dans le module du milieu de (12) est nul (cf.[4] §2.2). En notant par ${}_TD$ le noyau de la multiplication par $T$ dans $D$, on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to {}_TD \to e_\Phi\, Gal(M/K) \to A/(f(q,\psi)) \to D/T.D \to 0 \ .$$

Les modules finis ${}_TD$ et $D/T.D$ ayant le même ordre, on voit que le groupe $e_\Phi\, Gal(M/K)$ (fini d'après [4] §2.2) est d'ordre $|N(f(q,\psi))|^{-1}$, $N$ désignant comme en 2.1 la norme de $\mathbb{Q}_\ell(\mathrm{Im}\,\psi)$ à $\mathbb{Q}_\ell$. Mais d'après [5] § 6 on a :

$$L_\ell(s,\psi) = 2f((1+q)^s-1,\psi) \ , \ \forall s \in \mathbb{Z}_\ell \ .$$

En utilisant le théorème 2, on déduit ($\ell$ étant impair) :

$$[e_\Phi(G(M/K)] = \Big|\prod_{\psi|\Phi} L_\ell(1,\psi)\Big|^{-1} = [e_\Phi(U/\overline{C})] \ .$$

D'après la théorie du corps de classes on a un isomorphisme :

$$e_\Phi\, Gal(M/L) \simeq e_\Phi(U/\overline{E}) \ .$$

Ces groupes sont finis (cf. toujours [4] §2.2). En comparant avec ce qui précède, on déduit que les groupes $e_\Phi\, Gal(L/K)$ et $e_\Phi(\overline{E}/\overline{C})$ ont même ordre. Pour achever la démonstration du théorème 4, il suffit d'observer que $\overline{E}$ et $\overline{C}$ étant respectivement isomorphes à $E\otimes\mathbb{Z}_\ell$ et $C\otimes\mathbb{Z}_\ell$, $e_\Phi(\overline{E}/\overline{C})$ est isomorphe à $e_\Phi(E/C)_\ell$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (J.) et LICHTENBAUM (S.) - On $\ell$ adic zeta functions. Ann. of Math., 98 (1973) pp. 498-550.

[2] COATES (J.) - L functions and Iwasawa theory. Proceedings of symposium on algebraic number theory Durham (1975).

[3] GRAS (G.) - Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés. Ann. de l'Institut Fourier, 1977, fasc.1, t.27.

[4] IWASAWA (K.) - On $\mathbb{Z}_\ell$ extensions of algebraic number fields. Ann. of Math., 98 (1973) pp.246-326.

[5] IWASAWA (K.) - Lectures on p adic L functions, Ann. of Math. Studies n° 74, Princeton University Press, 1972.

[6] LEOPOLDT (H.) - Uber Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh der Deut. Akad. Berlin (1954) n° 2 pp.3-48.

[7] LEOPOLDT (H.) - Uber die Hauptordnung der ganze Elemente eines abelschen Zahlkörpers. J. für reine und angew. Math. Bd 201 (1959), pp.119-149.

-:-:-:-

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)