SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

LYLIANE BOUVIER

Représentations entières de certains groupes finis. 1ère partie : Passage du cas local au cas global

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 3 (1973-1974), exp. n° 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1973-1974__3__A5_0>

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie des Nombres
7 février 1974
Grenoble

REPRESENTATIONS ENTIERES DE CERTAINS GROUPES FINIS

- 1ère partie -

PASSAGE DU CAS LOCAL AU CAS GLOBAL

par Lyliane BOUVIER

Introduction.

Chercher des représentations d'un groupe fini G sur un anneau intègre R , c'est chercher à représenter G à l'aide de matrices à coefficients dans R ou encore chercher des $R[G]$-modules libres de type fini sur R . Or la plupart des théorèmes démontrés pour les représentations de G sur un corps ne sont plus vrais lorsque R n'est pas un corps, même dans le cas où R est un anneau principal. Et notamment, il existe des $R[G]$-modules réductibles (i.e. tels que le $K[G]$-module $K \otimes_R M$ possède un sous-$K[G]$-module strict non trivial, K étant le corps des fractions de R , ou encore tels que M possède un sous-$R[G]$-module non trivial dont le rang sur R est strictement inférieur au rang de M) qui sont indécomposables (i.e. tels qu'on ne puisse les écrire comme somme directe de deux de leurs sous-$R[G]$-modules).

Afin de connaître les différentes représentations de G sur R , on est amener à chercher les $R[G]$-modules, libres de type fini sur R , indécomposables et distincts à $R[G]$-isomorphismes près. Dans certains cas, il peut y en avoir une infinité ; en effet A. Jones cf. [4] ainsi que

S.D. Berman -cf. [1]- ont démontré le théorème suivant :

"Le nombre de $\mathbb{Z}[G]$-modules indécomposables non $\mathbb{Z}[G]$-isomorphes est fini si et seulement si, pour chaque nombre premier p divisant l'ordre de G, chaque p-sous-groupe de Sylow est cyclique et d'ordre inférieur ou égal à p^2 ".

Nous allons, ici, nous intéresser plus particulièrement à la détermination des $R[G]$-modules indécomposables lorsque G est le groupe cyclique d'ordre premier p ou le groupe diédral d'ordre $2p$, p premier impair, et lorsque R est égal à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}_p$. La recherche des $R[G]$-modules indécomposables étant relativement plus simple dans le cas local, nous allons établir une relation entre les $\mathbb{Z}[G]$-modules indécomposables et les $\mathbb{Z}_p[G]$-modules indécomposables : ce sera le but de cette première partie.

<u>Notations</u>.

Soient G un groupe fini d'ordre n et I l'ensemble des nombres premiers distincts qui divisent n. Si n appartient à I et si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module, on note :

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\tfrac{a}{b} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ et } (b,p) = 1\}$$

$$\mathbb{Z}_{(I)} = \bigcap_{p \in I} \mathbb{Z}_{(p)}$$

$$\mathbb{Z}_p = \text{le complété de } \mathbb{Z}_{(p)}$$

$$\mathbb{Q}_p = \text{le complété de } \mathbb{Q} \text{ pour la valuation p-adique}$$

$$M_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} M = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

$$M_{(I)} = \mathbb{Z}_{(I)} M = \mathbb{Z}_{(I)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

$$M'_p = \mathbb{Z}_p M' = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M' \text{ où } M' \text{ est un } \mathbb{Z}_{(p)}[G]\text{-module.}$$

On peut considérer M comme un sous-module de $M_{(p)}$ ou de $M_{(I)}$ en identifiant M est $1 \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

N.B. Tous les $\mathbb{Z}[G]$ (resp. $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$, resp $\mathbb{Z}_{(I)}[G]$, resp $\mathbb{Z}_p[G]$)-modules considérés par la suite sont libres de type fini sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_{(p)}$, resp $\mathbb{Z}_{(I)}$, resp $\mathbb{Z}_p$) .

I - PRELIMINAIRES.

1. Extensions de modules.

Soient A un anneau commutatif unitaire et X et Y deux $A[G]$-modules libres de type fini sur A .

On dit qu'un $A[G]$-module L est une extension du $A[G]$-module Y par le $A[G]$-module X si la suite

$$0 \to X \to L \to Y \to 0$$

est exacte comme suite de $A[G]$-modules et scindée comme suite de A-modules.

On dit que deux extensions L et L' du $A[G]$-module Y par le $A[G]$-module X sont équivalentes s'il existe un $A[G]$-isomorphisme Φ de L sur L' tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X & \to & L & \to & Y & \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \Phi & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & X & \to & L' & \to & Y & \to & 0 \end{array} .$$

On peut remarquer que c'est bien une relation d'équivalence et qu'elle est "plus forte" que la relation "être $A[G]$-isomorphe". L'ensemble des classes d'équivalence ainsi obtenues est noté $\mathrm{Ext}^1(Y,X)$.

PROPOSITION 1. *Etant donné deux* $A[G]$-*modules libres et de type fini sur* A , *il existe une bijection de* $\mathrm{Ext}^1(Y,X)$ *sur* $H^1(G,T)$ *avec* $T = \mathrm{Hom}_A(Y,X)$.

En effet, soit L une extension du $A[G]$-module Y par le $A[G]$-module X , comme A-module $L = X \times Y$. L'action d'un élément g de G

sur un élément (x,y) de L est définie par

$$g.(x,y) = g.(x,o) + g.(o,y)$$

car L est un $A[G]$-module. Or $g.(x,o) = (g.x,o)$ car X peut être considéré comme un sous-$A[G]$-module de L et $g.(o,y) = (\Lambda_g y, g.y)$ où Λ_g est un élément de T car L/X est isomorphe à Y comme $A[G]$-module.

Posons $\lambda_g = \Lambda_g \circ g^{-1}$, λ_g appartient aussi à T . On obtient alors $g.(x,y) = (g.x + \lambda_g g\cdot y, g\cdot y)$. Si g et g' appartiennent à G , la condition $gg'.(x,y) = g.[g'.(x,y)]$ équivaut à $\lambda_{gg'} = g\lambda_{g'}g^{-1} + \lambda_g$.

On munit T d'une structure de $A[G]$-module en posant, pour tout (g,t) dans $G\times T$, $g.t = gtg^{-1}$. Alors l'application λ de G dans T définie par $\lambda(g) = \lambda_g$ est un élément de $Z^1(G,T)$, car $\lambda(gg') = g.\lambda(g') + \lambda(g)$.

Réciproquement, à tout élément λ de $Z^1(G,T)$ correspond une suite exacte de $A[G]$-modules scindée sur A :

$$0 \to X \to L \to Y \to 0 ,$$

il suffit de munir le A-module $L = X\times Y$ de la structure de $A[G]$-module définie par, $(g,(x,y)) \in G\times L$,

$$g.(x,y) = (g.x+\lambda(g)g.y, g.y) .$$

Considérons maintenant deux extensions équivalentes L et L' et soit Φ le $A[G]$-isomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X & \to & L & \to & Y & \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \Phi & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & X & \to & L' & \to & Y & \to & 0 \end{array}$$

Comme précédemment on montre qu'il existe $t \in T$ tel que $\Phi(x,y) = (x+ty, y)$. Alors $\Phi[g.(x,y)] = g.[\Phi(x,y)]$ équivaut à $\lambda(g) - \lambda'(g) = gtg^{-1}-t$ ou encore $(\lambda-\lambda')(g) = (g-1).t$, en désignant par λ (resp λ') l'élément de $Z^1(G,T)$ qui correspond à L (resp L') . On voit donc que $\lambda-\lambda'$ appartient à $B^1(G,T)$. Réciproquement, si $\lambda-\lambda'$

appartient à $B^1(G,T)$, c'est-à-dire, s'il existe $t \in T$ tel que pour tout $g \in G$, $(\lambda-\lambda')(g) = (g-1).t$, alors L et L' sont deux extensions équivalentes de Y par X ; il suffit de définir Φ par $\Phi[(x,y)] = (x+ty,y)$. Ceci termine la démonstration de la proposition II.1.

Remarque 1.1: On peut munir $Ext^1(Y,X)$ d'une structure de groupe de telle sorte que la bijection vue précédemment de $Ext^1(Y,X)$ sur $H^1(G,T)$ soit un isomorphisme. On obtient alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1'. Les groupes $Ext^1(Y,X)$ et $H^1(G,T)$ sont isomorphes.

Remarque 1.2: La classe neutre de $Ext^1(Y,X)$ (ou encore l'élément neutre de $H^1(G,T)$) correspond aux extensions L de Y par X telles que la suite

$$0 \to X \to L \to Y \to 0$$

soit scindée comme suite de $A[G]$-modules. Pour le voir, il suffit de considérer l'extension L qui correspond au cobord nul dans $B^1(G,T)$; alors pour tout $g \in G$ et tout $(x,y) \in L$, $g.(x,y) = (g.x, g.y)$.
Et réciproquement, si L est une extension de Y par X telle que la suite

$$0 \to X \to L \to Y \to 0$$

soit scindée comme suite de $A[G]$-module, alors la classe de L est l'élément neutre de $Ext^1(Y,X)$.

Par conséquent, pour qu'une extension L de Y par X soit un $A[G]$-module indécomposable, il faut que L n'appartienne pas à la classe neutre de $Ext^1(Y,X)$ ou encore que l'élément de $H^1(G,T)$ qui correspond à L ne soit pas l'élément neutre.

2. Localisation dans les groupes de cohomologie. (rédigé avec l'aide précieuse de R. Gillard).

a) Un lemme : Soient A un anneau commutatif unitaire, B un anneau commutatif contenant A et qui soit plat comme A-module. Soit M un $A[G]$-module de type fini sur A. On va comparer les groupes de cohomologie de M et de $B\otimes_A M$ ($B\otimes_A M$ étant considéré comme un G-module grâce à l'action de G sur M).

Les groupes de cohomologie $H^i(G,M)$ sont définis pour $i \geq 0$ -cf [5], chap.VII, §2 et 3- à l'aide d'applications de G^{i+1} dans G qu'on prolonge par $\mathbb{Z}$-linéarité. Si on prolonge par A-linéarité (M est un A-module) on obtient des éléments de $\mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G]^{i+1},M)$. La formule (*) de [5] chap.VII §3, fournit par prolongement A-linéaire une famille d'applications de $A[G]^{i+1}$ dans $A[G]^i$ (pour $i \geq 0$). Ceci fournit un complexe (c) :

$$\text{(c)} \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G],M) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G]^2,M) \to \cdots$$
$$\to \mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G]^i,M) \xrightarrow{d_i} \mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G]^{i+1},M) \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots.$$

Il est clair que le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie $\ker d_{i+1}/\mathrm{Im}\, d_i = H^i(c)$ de ce complexe n'est autre que $H^i(G,M)$. En particulier, ce groupe est un A-module.

On peut naturellement faire la même construction pour le B-module $M_B = B\otimes_A M$. La cohomologie de ce module se déduit donc de l'homologie du complexe (c') formé par les modules

$$\mathrm{Hom}_{B[G]}(B[G]^i,M_B).$$

D'autre part, on a pour chaque i un isomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}_{B[G]}(B[G]^i,M_B)$ sur $B\otimes_A \mathrm{Hom}_{A[G]}(A[G]^i,M)$. L'homologie du complexe (c') est donc donné par les groupes $B\otimes_A H^i(c)$ (B étant A-plat, l'extension des scalaires à B par produit tensoriel préserve les suites exactes donc en particulier les noyaux, conoyaux et images). D'où le lemme :

LEMME. <u>Pour chaque</u> $i \geq 0$, $H^i(G,B\otimes_A M)$ <u>est isomorphe à</u> $B\otimes_A H^i(G,M)$.

Notons de plus que l'application canonique de $H^i(G,M)$ dans

$B \otimes_A H^i(G,M)$ correspond à l'application de $H^i(G,M)$ dans $H^i(G, B\otimes_A M)$ donnée par l'application canonique de M dans $B\otimes_A M$.

b) Application à la localisation : Prenons $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}_{(p)}$. On sait que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat. Donc si M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. $H^i(G,M)_{(p)}$ est isomorphe à $H^i(G,M_{(p)})$.

D'autre part, $H^i(G,M)$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion (annulé par Card G) et de type fini (comme M). On a donc la décomposition suivante, où les p_j sont des nombres premiers et les n_j des entiers ≥ 0 :

$$H^i(G,M) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/p_j^{n_j} \quad . \tag{1}$$

Lorsqu'on localise un tel module en p , il ne reste que les indices j tels que $p_j = p$:

$$H^i(G,M)_{(p)} \simeq \bigoplus_{\substack{j=1 \\ p_j=p}}^{r} \mathbb{Z}/p_j^{n_j} \quad . \tag{2}$$

La décomposition (1) peut donc s'écrire, en tenant compte de (2) , la somme portant sur les nombres premiers p de $\mathbb{Z}$:

$$H^i(G,M) \simeq \oplus\, H^i(G,M)_{(p)} \simeq \oplus\, H^i(G,M_{(p)}) \quad . \tag{3}$$

On peut remarquer que si p ne divise pas Card G , alors $H^i(G,M_{(p)}) = \{0\}$. On obtient donc la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. $H^i(G,M)$ est isomorphe à $\bigoplus_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} H^i(G,M_{(p)})$.

Remarque 1.3 : La projection sur le facteur relatif à p est induite par l'application envoyant $H^i(G,M)$ dans $H^i(G,M)_{(p)}$: elle est donc induite par l'application analogue de M dans $M_{(p)}$.

Considérons, à présent, $A = \mathbb{Z}_{(I)}$ et $B = \mathbb{Z}_{(p)}$, le module

$M_{(I)} = \mathbb{Z}_{(I)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_{(I)}$. Comme $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}_{(I)}} M_{(I)} = M_{(p)}$, nous pouvons démontrer, de même que précédemment, que $H^i(G, M_{(I)})$ est isomorphe à $\bigoplus_{\substack{p \text{ premier} \\ p | \text{Card } G}} H^i(G, M_{(p)})$.

On obtient, par suite, le théorème suivant :

THEOREME I. $H^i(G,M)$ <u>est isomorphe à</u> $H^i(G, M_{(I)})$ <u>pour tout</u> $i \geq 0$, <u>où</u> I <u>est l'ensemble des nombres premiers qui divisent le cardinal de</u> G.

<u>Remarque 1.4</u> : Cet isomorphisme est induit par l'injection canonique de M dans $M_{(I)}$.

II - <u>LOCALISATION</u>.

Avec les notations données précédemment, on peut démontrer le théorème suivant :

THEOREME II. <u>Soit</u> M <u>un</u> $\mathbb{Z}[G]$-<u>module libre de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$, M <u>est un</u> $\mathbb{Z}[G]$-<u>module indécomposable si et seulement si</u> $M_{(I)}$ <u>est un</u> $\mathbb{Z}_{(I)}$-<u>module indécomposable</u>.

Il est clair que c'est une condition suffisante.

Supposons, à présent, que $M_{(I)}$ soit un $\mathbb{Z}_{(I)}$-module décomposable ; alors $M_{(I)} = V \oplus V'$ où V et V' sont des sous-$\mathbb{Z}[G]$-modules de $M_{(I)}$. Posons $N = M \cap V$, en identifiant M et $1 \otimes_{\mathbb{Z}} M$ dans $M_{(I)}$, on montre facilement que $\mathbb{Z}_{(I)} N = V$. Or, comme $\mathbb{Z}$-module, N est facteur direct de M, car M/N est sans torsion de type fini sur $\mathbb{Z}$, $M_{(I)}$ étant sans torsion sur $\mathbb{Z}_{(I)}$. Par suite M est une extension du $\mathbb{Z}[G]$-module M/N par le $\mathbb{Z}[G]$-module N. Comme M/N est libre de type fini sur $\mathbb{Z}$, $(M/N)_{(I)} = M(I)/N(I)$ et la suite exacte

$0 \to N_{(I)} \to M_{(I)} \to (M/N)_I \to 0$ est scindée comme suite de $\mathbb{Z}_{(I)}[G]$-modules, l'extension $M_{(I)}$ de $(M/N)_{(I)}$ par $N_{(I)}$ correspond donc à l'élément neutre de $H^1(G,T_{(I)})$ avec $T_{(I)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{(I)}}((M/N)_{(I)},N_{(I)})$. Par suite, d'après le théorème I et la remarque 1.4, l'extension M de M/N par N correspond à l'élément neutre de $H^1(G,T)$ avec $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/N,N)$, ce qui implique que M est un $\mathbb{Z}[G]$-module décomposable.

Remarque : On obtient un résultat analogue à celui du théorème II si, au lieu de $\mathbb{Z}$, on considère l'anneau R des entiers d'un corps de nombres -cf [3]- .

III - COMPLETION.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe, dans un cadre plus restreint, un théorème analogue à celui obtenu pour la localisation. Pour cela, nous utiliserons les lemmes suivants dont on pourra trouver une démonstration dans [2] pp. 531-542.

Etant donné un groupe G d'ordre n et p un diviseur premier de n , on note $\mathbb{Z}_p$ le complété de $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique et on pose $n = p^{\gamma} m$ avec $(m,p) = 1$.

LEMME 3.1. Soient M et N deux $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-modules libres de type fini sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, si M et N sont $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-isomorphes alors $\hat{M} = M/p^k M$ et $\hat{N} = N/p^k N$ sont isomorphes comme $\mathbb{Z}_{(p)}/p^k\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-module pour tout $k > 0$.

Réciproquement, si $k>\gamma$ et si $\hat{M}$ et $\hat{N}$ sont $\mathbb{Z}_{(p)}/p^k\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-isomorphes alors M et N sont $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-isomorphes.

LEMME 3.2. On obtient un résultat analogue en remplaçant dans l'énoncé du lemme 3.1, $\mathbb{Z}_{(p)}$ par $\mathbb{Z}_p$.

On peut en déduire alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1. Soient M et N deux $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-modules libres de type fini, M et N sont $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-isomorphes si et seulement si $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M$ et $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} N$ sont $\mathbb{Z}_p[G]$-isomorphes.

LEMME 3.3. Si pour tout module W irréductible sur $\mathbb{Q}[G]$, le module $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} W$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p[G]$, alors tout module X' de $\mathbb{Q}[G]$ provient d'un module X de $\mathbb{Q}[G]$, c'est-à-dire que $X' = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} X$.

LEMME 3.4. Etant donné un $\mathbb{Z}_p[G]$-module M' tel que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M' = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} V$ où V est un $\mathbb{Q}[G]$-module, alors il existe un $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-module M tel que $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M = M'$.

LEMME 3.5. (cf [3]) Soit G un groupe abélien d'ordre p^e. Posons $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ où ζ est une racine primitive p^e-ième. Si $L/\mathbb{Q}$ est non décomposée par rapport à p alors tout $\mathbb{Q}[G]$-module irréductible M est tel que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p[G]$.

En effet, soit M un $\mathbb{Q}[G]$-module irréductible, alors M est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]/(h(X))$ où $h(X)$ est un facteur irréductible de $X^{p^e}-1$. Par suite $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M$ qui est isomorphe à $\mathbb{Q}_p[X]/(h(X))$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p[G]$ si et seulement si $h(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$. Soit $\omega \in L$, une racine de $h(X)$. Le nombre de facteurs irréductibles distincts de $h(X)$ dans $\mathbb{Q}_p[X]$ est égal au nombre de manière d'étendre la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Q}(\omega)$, or $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\omega) \subset L$; donc si $L/\mathbb{Q}$ est non décomposée au-dessus de p, la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$ n'admet qu'un prolongement à L. Donc la seule possibilité de décomposition de $h(X)$ dans $\mathbb{Q}_p[X]$ est $h(X) = (h'(X))^m$, ce qui est impossible car $\mathbb{Q}$ est parfait.

Par suite, nous obtenons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. <u>Etant donné un groupe</u> G <u>cyclique d'ordre</u> p^e <u>pour tout</u> $\mathbb{Z}_p[G]$-<u>module</u> M' <u>libre de type fini sur</u> $\mathbb{Z}_p$, <u>il existe un</u> $\mathbb{Z}_p[G]$-<u>module</u> M <u>tel que</u> $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M = M'$.

En corollaire de cette proposition, nous pouvons démontrer le :

THEOREME III. <u>Soit</u> G <u>un groupe cyclique d'ordre</u> p^e , <u>alors un</u> $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-<u>module</u> M <u>libre de type fini sur</u> $\mathbb{Z}_{(p)}$ <u>est décomposable si et seulement si le module</u> $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M$ <u>est</u> $\mathbb{Z}_p[G]$-<u>décomposable</u>.

La condition nécessaire est évidente. Si on suppose que $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M = M'_1 \oplus M'_2$ en tant que $\mathbb{Z}_p[G]$-module, il existe un $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-module N_i tel que $M'_i = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} N_i$; par conséquent

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} M = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} (N_1 \oplus N_2)$$

et, par suite du corollaire 3.1, M est $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-isomorphe à $N_1 \oplus N_2$ et donc $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-décomposable.

<u>Remarque</u> : Le résultat du théorème III reste vrai si on remplace $\mathbb{Z}$ par l'anneau R des entiers d'une extension finie K de $\mathbb{Q}$ telle que, si L est le corps de nombres obtenu en adjoignant à K une racine primitive p^e-ième de l'unité, la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$ ait un prolongement unique à L -cf [3]-.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.D. BERMAN - "Representation of finite groups over an arbitrary field and over rings of integers".
Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 30 (1966) pp.69-132.
Amer. Math. Soc. Transl. (2) 65 (1967) pp.147-215.

[2] C.W. CURTIS and I. REINER - "Representation theory of finite groups and associative algebras".
Interscience Publishers-New York (1966).

[3] A. HELLER and I. REINER - "Representation of cyclic groups in rings of integers, I".
Annals of Math. Vol.76, n°1 (July 1962) pp.73-92.

[4] A. JONES - "Groups with a finite number of indecomposable integral representations".
Michigan Math. J. 10 (1963) pp. 257-261.

[5] J.P. SERRE - "Corps locaux".
Hermann Paris (1962).

-:-:-:-