SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL WALDSCHMIDT

Répartition des valeurs d'une somme de fonctions exponentielles

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1971), exp. n° 4, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A4_0>

REPARTITION DES VALEURS D'UNE SOMME DE FONCTIONS EXPONENTIELLES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-

Pour démontrer la transcendance du nombre e , en 1873, Hermite a étudié l'ordre du zéro $z = 0$ d'une fonction du type :

$$(1) \qquad z \to f(z) = \sum_{h=1}^{\ell} b_h(z) \, e^{\omega_h z} ,$$

où $b_1(z) \ldots b_\ell(z)$ sont des polynômes à coefficients complexes, et $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ des nombres complexes. Ces investigations étaient reprises par Mahler [11], Siegel [16], puis Jager [9] qui développait des propriétés analogues pour des fonctions binomiales et logarithmiques (Baker [1]). Coates [2] et Van der Poorten [14], utilisant une méthode de Turan [19] étudiaient des minorations pour des sommes de puissances, conduisant à des résultats sur la répartition des valeurs de fonctions analytiques de type exponentiel (Dancs et Turan [3] ; Turan [20]) , binomial ou logarithmique (Van der Poorten [15]). En liaison avec des théorèmes d'indépendance algébrique, Gel'fond [6] chap. III , puis Mahler [12] et Spira [17] ont obtenu des majorations du nombre de zéros de fonctions du type (1) , tandis que Pontrjagin [13] étudiait la répartition de ces zéros et de leur partie réelle pour l'appliquer à l'étude de la stabilité de solutions d'équations aux dérivées partielles.

La distribution des valeurs de fonctions du type (1) intervient dans l'étude des solutions d'équations différentielles à coefficients constants, ainsi que dans des questions de stabilité de systèmes de contrôles ; elle a également des relations avec des processus stochastiques [3].

Nous allons, ici, nous intéresser au nombre de $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z_o$, z_o étant un nombre complexe donné. Ceci revient à majorer le nombre de zéros de :

$$z \to \sum_{i=0}^{\ell} b_i(z)\, e^{\omega_i z} ,$$

où $b_o(z) = z_o$ et $\omega_o = 0$. Ainsi, il suffit d'étudier les zéros des fonctions du type (1). Les résultats connus [3], [4], [6], [12], [14], [20], donnent une majoration du nombre de zéros de f (1) dans un carré du plan complexe, de telle manière que la majoration obtenue est indépendante de la position du carré, ainsi que des coefficients des polynômes $b_i(z)$; elle ne dépend que du degré p_i de ces polynômes, du côté du carré ainsi que des nombres ω_i. Les nombres ω_i interviennent par les deux quantités :

$$\Omega = \max_{1 \leqslant i \leqslant \ell} |\omega_i| , \quad \Delta = \min_{i \neq j} |\omega_i - \omega_j| .$$

Le seul énoncé ne faisant pas intervenir Δ est celui de Spira [17] dont la démonstration est incomplète. Nous allons justifier l'énoncé de Spira et répondre ainsi à une question de Turan [3], [20].

Examinons plusieurs cas particuliers.

<u>Exemple 1.</u> - Soit $f(z) = 2\cos z = e^{iz} + e^{-iz}$. Le nombre de zéros de f dans le disque $|z| \leqslant \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, est supérieur à 2λ.

<u>Exemple 2.</u> - Soit $f(z) = (e^{\frac{z}{m}} - 1)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} e^{\frac{j}{m} z}$. La fonction f ainsi définie admet $z = 0$ comme zéro d'ordre m. (Voir [16], ch. I, §. 7).

<u>Exemple 3.</u> - Soit $f(z) = 2i \sin(2^N z) = e^{2^N iz} - e^{-2^N iz}$. La fonction f admet les zéros $z = \frac{\pi}{2\ell}$, $0 \leqslant \ell \leqslant N$, qui appartiennent tous au disque $|z| \leqslant \pi$.

Exemple 4. - Fel'dman a démontré ([5] I lemme 5 et II lemme 7) :

LEMME 1. - Si $P_o, \dots, P_{q_o-1}$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, de degré $\leq q_o-1$, si $u_1, \dots, u_p$ sont des nombres complexes distincts non nuls, et si $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, alors le déterminant :

$$| P_k(T.x)\, u_\ell^x |_{\substack{0 \leq k \leq q_o-1,\ 1 \leq \ell \leq p \\ 0 \leq x \leq p\, q_o-1}}$$

est non nul.

Soit f une fonction définie par (1), où les polynômes b_h ne sont pas tous nuls, et $\omega_h \neq \omega_j$ si $h \neq j$. Soit $T \in \mathbb{C}$, avec $T(\omega_h - \omega_j) \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ pour $h \neq j$. Alors l'un des nombres $f(T.x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, est non nul.

On en déduit le résultat suivant, que l'on retrouvera au §. 4 :

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors les fonctions $z, e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_m z}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Enfin, le lemme de Fel'dman permet de construire une fonction f du type (1), non identiquement nulle, et admettant les zéros : $1, \dots, \sum_{h=1}^{\ell} p_h - 1$, où p_h est le degré du polynôme b_h.

Exemple 5. - Soient $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes non tous nuls, de degré inférieur ou égal à $p_1, \dots, p_\ell$ avec $n = \sum_{h=1}^{\ell} p_h$. Soient $\omega_1, \dots, \omega_\ell$, $x_o, \dots, x_{n+1}$ des nombres complexes tels que : $x_i \neq x_j$ pour $1 \leq i < j \leq n+1$ et $e^{\omega_h x_i} \neq e^{\omega_k x_i}$ pour $1 \leq h < k \leq m$ et $0 \leq i \leq n+1$.

Soit F la fonction :

$$z \to \sum_{h=1}^{\ell} P_h(z)\, e^{\omega_h z} .$$

L'un au moins des nombres $F(x_i + j\, x_o)$, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq \ell$ est non nul.

Preuve : On suit la méthode que Schneider a utilisée, dans le cas où les nombres ω_h sont des multiples entiers de Log a(a algébrique non racine de l'unité) et où les nombres x_i sont de la forme $\lambda + \mu b$, λ et μ entiers (b algébrique irrationnel), pour montrer que a^b est transcendant [16].

Soit $P_{k,h}(z) = P_h(z+kx_o)\, e^{\omega_h k x_o}$.

Ainsi $F(z+kx_o) = \sum_{h=1}^{\ell} P_{k,h}(z)\, e^{\omega_h z}$. On peut évidemment supposer chaque polynôme P_h non nul et de degré exactement p_h.

Le déterminant $\Delta(z) = |P_{k,h}(z)|_{k,h=1,\dots,\ell}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, dont le terme de plus haut degré est :

$$\alpha_1 \dots \alpha_\ell\, \delta\, x^n ,$$

où $\delta = \prod_{i<j} (e^{\omega_j x_o} - e^{\omega_i x_o}) \neq 0$, et où $\alpha_h\, x^{r_h}$ est le terme de plus haut degré de P_h. Donc, l'un au moins des nombres $\Delta(x_i)$, $1 \leq i \leq n+1$, est non nul. D'autre part, si $\xi \in \mathbb{C}$ est tel que :

$$e^{\omega_i \xi} \neq e^{\omega_j \xi} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq \ell \quad \text{et} \quad \Delta(\xi) \neq 0 ,$$

alors l'un au moins des nombres $\Delta(\xi + kx_o)$, $1 \leq k \leq \ell$ est non nul.

Exemple 6. :

LEMME 2. - [6]. Soient $b_{i,j}$ des nombres réels non tous nuls, $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ des nombres réels distincts. Alors le nombre de zéros réels de la fonction :

$$f_\ell(z) = \sum_{i=1}^{\ell} e^{\omega_i z} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j}\, z^{j-1}$$

est inférieur à $\sum_{i=1}^{\ell} p_i$.

La démonstration se fait par récurrence sur ℓ. Pour $\ell = 1$, f est un polynôme non nul de degré $p_1 - 1$.

Supposons le lemme vrai pour $\ell \leq \lambda-1$, et soit f_λ une telle fonction dont le nombre de zéros réels est σ .

D'après le théorème de Rolle, le nombre de zéros de la fonction :

$$\frac{d^{p_\lambda}}{dz^{p_\lambda}} e^{-\omega_\lambda z} f_\lambda(z) = \sum_{i=1}^{\lambda-1} e^{(\omega_i - \omega_\lambda) z} \sum_{j=1}^{p_i} c_{i,j} z^{j-1} ,$$

dépasse le nombre $\sigma - p_\lambda$; d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\sigma - p_\lambda < \sum_{i=1}^{\lambda-1} p_i .$$

Les exemples précédents montrent que le nombre σ de zéros de f dans le disque $|z| \leq \rho$ dépend de ρ , de $n = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$, et de $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |\omega_i|$.

Nous allons voir que ces trois quantités permettent de majorer σ .

PROPOSITION. - Soient $p_1, \ldots, p_\ell$ des nombres entiers positifs, $b_{i,j}$ $(1 \leq j \leq p_i \; ; \; 1 \leq i \leq \ell)$ des nombres complexes non tous nuls , $w_1, \ldots, w_\ell$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |w_i|$, f la fonction :

$$z \to f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1} e^{w_i z} , \tag{1}$$

et σ le nombre de zéros de la fonction f , comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|z - z_0| \leq \rho$. Pour tout nombre réel $R > \rho\Omega + 1$, on a :

$$\left(\frac{R - \rho\Omega}{\rho\Omega + 1}\right)^\sigma \leq n\,!\; 2^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{2R} . \tag{2}$$

COROLLAIRE. - Avec les notations de la proposition, pour tout réel $\lambda > 0$, on a :

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(1+n^{\lambda})}{\lambda \operatorname{Log} n} \quad (1+\rho\Omega) \; .$$

Démonstration du corollaire :

Soit $\Lambda = \rho\Omega + (\rho\Omega + 1)\, n^{\lambda}$.

a) Si $\Lambda \geqslant e$, on choisit $R = \Lambda$ et on majore $n!\, 2^{n+1}$ par $4n^n$ et $4\frac{\Lambda}{\Lambda - 1}$ par e^2 :

$$n^{\lambda\sigma} < n^{n} \quad e^{2(R+1)}$$

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(1+n^{\lambda})}{\lambda \operatorname{Log} n} \quad (1+\rho\Omega) \; .$$

b) Si $\Lambda < e$, on choisit $R = \rho\Omega + (\rho\Omega + 1)\, e$. On majore de même $n!\, 2^{n+1} \frac{R}{R-1}$ par $n^n e^2$:

$$e^{\sigma} < n^{n} \quad e^{2(\rho\Omega+1)(e+1)} \; ,$$

d'où :

$$\sigma < n \operatorname{Log} n + 2(1+e)\,(1+\rho\Omega) \; .$$

Comme $\Lambda < e$, on a $n^{\lambda} < e$, donc $1 + e < \frac{1+n^{\lambda}}{\lambda \operatorname{Log} n}$.

D'où :

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + 2\,\frac{1+n^{\lambda}}{\lambda \operatorname{Log} n} \quad (1+\rho\Omega) \; ,$$

d'où le corollaire.

Remarque : Si $1 + \rho\Omega < n$, le corollaire montre que l'on a :

$$\sigma < \frac{1}{\lambda}\left(n + \frac{4n}{\operatorname{Log} n}\right) \quad \text{avec}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\operatorname{Log}(1+\rho\Omega)}{\operatorname{Log} n}$$

ce qui améliore l'énoncé de Spira [16] .

Remarque : La majoration obtenue pour le nombre de zéros est indépendante du centre du disque. En effet, en effectuant le changement de variable $t = z - z_o$, nous avons à étudier les zéros de la fonction :

$$t \to \sum_{h=1}^{\ell} c_h(t)\, e^{\omega_h t} \quad ,$$

dans le disque $|t| \leq \rho$, avec :

$$c_h(t) = \sum_{j=1}^{p_h} b_{h,j}\, e^{\omega z_o} (t+z_o)^{j-1} \quad .$$

Il suffit donc d'étudier le cas $z_o = 0$. Nous allons tout d'abord étudier l'ordre du zéro $z = 0$ de f .

§. 2 - CALCUL D'UN DETERMINANT.

Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ des nombres complexes, $p_1, \ldots, p_\ell$ des nombres entiers positifs, et $n = p_1 + \ldots + p_\ell$. Soit Δ le déterminant de la matrice :

$$(3) \qquad \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} z^{j-1} e^{\omega_i z} \Big|_{z=0} \right] = \left[\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\, \omega_j^{m-1} \right] = \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{m-1} \Big|_{z=\omega_i} \right]$$

où m est l'indice de ligne, $1 \leq m \leq n$, et (i,j) est l'indice de colonne, $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq p_i$. (On convient que $\frac{(m-1)!}{(m-j)!} = (m-1)\ldots(m-j+1)$ est nul si $j > m$).
On a alors :

$$(4) \qquad \Delta = \pm \left(\prod_{i=1}^{\ell} \prod_{s=0}^{p_i - 1} s! \right) \times \prod_{i<j} (\omega_i - \omega_j)^{p_i p_j} \quad .$$

On en déduit en particulier que l'ordre de multiplicité du point $z = z_o$ comme zéro de la fonction (1) définie par les hypothèses de la proposition, est inférieur à n . Par conséquent, f n'est pas identiquement nul.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ <u>sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, les fonctions</u> $z, e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_m z}$ <u>sont algébriquement indépendantes sur</u> $\mathbb{C}$.

Soit (3) $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_\ell) = \det \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{m-1} \Big|_{z=\omega_i} \right]_{(i,j),m}$ $\quad 1 \leqslant m \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant p_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Soit $\Psi(z) = \Delta(z, \omega_1, \dots, \omega_\ell)$, et soit s un entier tel que $\Psi^{(s)}(\omega_2) \neq 0$. Nous allons montrer que $s \geqslant p_1 p_2$.

En effet, $\Psi^{(s)}(z)$ est somme de déterminants $D_1, \dots, D_{p_1}$, où D_j $(1 \leqslant j \leqslant p_1)$ est obtenu en remplaçant la j ième ligne L_j de $\Psi(z)$ par sa dérivée d'ordre σ_j , avec $\sigma_1 + \dots + \sigma_{p_1} = s$.

Nous écrivons :

- d'une part, que les lignes L_j et L_k de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$ sont distinctes pour $j \neq k$, soit :

$$\sigma_j + j \neq \sigma_k + k \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant j \leqslant p_1 \\ 1 \leqslant k \leqslant p_1 \end{matrix} \quad k \neq j$$

- d'autre part, que la ligne L_j de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$ n'est pas égale à la ligne L_k de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$, pour $1 \leqslant j \leqslant p_1$ et $p_1 + 1 \leqslant k \leqslant p_1 + p_2$, soit :

$$\sigma_k > p_2 - k \qquad 1 \leqslant k \leqslant p_1 \quad ;$$

On a donc : $$\sum_{k=1}^{p_1} (\sigma_k + k) \geqslant p_2 + 1 + \dots + p_2 + p_1 \quad .$$

D'où : $$s = \sum_{k=1}^{p_1} \sigma_k \geqslant p_1 p_2 \quad .$$

On en déduit que $\Psi(z)$ est divisible par le polynôme $\prod_{i=2}^{\ell} (z - \omega_i)^{p_1 p_i}$, qui est de degré $\sum_{i=2}^{\ell} p_1 p_i = p_1(n - p_1)$. Or, le degré de $\Psi(z)$ est au plus $p_1(n - p_1)$.

Donc, il existe une constante $k_{p_1,\ldots,p_\ell}$, ne dépendant pas de $\omega_1,\ldots,\omega_\ell$, telle que :

$$\Delta(\omega_1,\ldots,\omega_\ell) = k_{p_1,\ldots,p_\ell} \times \prod_{i<j} (\omega_i - \omega_j)^{p_i p_j} .$$

Pour calculer la constante $k_{p_1,\ldots,p_\ell}$, on étudie le premier terme dans l'ordre lexicographique des deux membres. On constate alors qu'il existe des entiers $q_1,\ldots,q_\ell$ tels que :

$$k_{p_1,\ldots,p_\ell} = \pm \prod_{j=1}^{\ell} \delta_{q_j, p_j} \qquad \text{où}$$

$$\delta_{q,p} = \det \left| \frac{(q+i)!}{(q+i-j)!} \right| \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq p-1 \\ 0 \leq j \leq p-1 \end{matrix} \qquad ;$$

où i est l'indice de colonne, et j l'indice de ligne. En retranchant la ième colonne de la $(i+1)$ ième, $1 \leq i \leq p-1$, la relation :

$$\frac{(q+i)!}{(q+i-j)!} - \frac{(q+i-1)!}{(q+i-j-1)!} = \frac{(q+i-1)!}{(q+i-j)!} \cdot j$$

montre que l'on a :

$$\delta_{q,p} = (p-1)! \; \delta_{q,p-1} \qquad .$$

Comme $\delta_{q,1} = 1$, on a par récurrence :

$$\delta_{q,p} = \prod_{s=0}^{p-1} s!$$

donc $\delta_{q,p}$ ne dépend pas de q.

D'où :

$$k_{p_1,\ldots,p_\ell} = \pm \prod_{j=1}^{\ell} \prod_{s=0}^{p_j-1} s! \qquad .$$

<u>Remarque</u> : Les méthodes développées dans [14] et [15] permettent d'évaluer Δ ainsi que ses cofacteurs.

§. 3 - LEMME 3 .

Soit F une fonction entière sur $\mathbb{C}$, non identique à zéro, et soit σ le nombre de zéros de F dans le disque $|z| \leq \rho$, comptés avec leur ordre de multiplicité. Pour tout entier $s \geq 0$ et tout réel $R > \rho$, $R > 1$, on a :

$$(5) \qquad |F^{(s)}(0)| \leq s! \; \frac{R}{R-1} \left(\frac{\rho+1}{R-\rho}\right)^{\sigma} \max_{|\xi|=R} |F(\xi)| \; .$$

Démonstration du lemme 3.

Soient $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ les zéros de F , $r_1, \dots, r_\ell$ leur ordre, avec $\sigma = \sum_{i=1}^{\ell} r_i$. La fonction :

$$g(z) = F(z) \times \prod_{i=1}^{\ell} (z-\beta_i)^{-r_i}$$

est entière sur $\mathbb{C}$, donc :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ,$$

d'après la formule de Cauchy. D'autre part :

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z^{s+1}} dz \quad ,$$

pour tout entier $s \geq 0$. D'où :

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2i\pi)^2} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{s+1}} \left[\int_{|\xi|=R} \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{z-\beta_i}{\xi-\beta_i}\right)^{r_i} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] dz \; .$$

Or, pour $|\xi| = R$ et $|z| = 1$, on a :

$$|\xi - z| \geq R-1 \; , \quad |\xi - \beta_i| \geq R - \rho \quad \text{et} \quad |z - \beta_i| \leq \rho + 1 \; .$$

D'où la relation (5).

Ainsi, pour majorer σ , il suffit de minorer $|F^{(s)}(0)|$ en fonction de $\max_{|\xi|=R} |F(\xi)|$.

§. 4 - LEMME DE VAN DER POORTEN.

Le lemme suivant est un cas particulier d'un lemme de Van der Poorten [14], [15] .

LEMME 4. - *Soient* $b_1, \ldots, b_n$ *des nombres complexes,* $g_1, \ldots, g_n$ *des fonctions analytiques dans un domaine* G *du plan complexe, et*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k\, g_k(z) \quad .$$

Soient $z_1, \ldots, z_n$ *des points de* G , $s_1, \ldots, s_n$ *des nombres entiers positifs ou nuls, et* $\Delta_{i,j}$ $(1\leqslant i\leqslant n\ ;\ 1\leqslant j\leqslant n)$ *le cofacteur de* $g_j^{(s_i)}(z_i)$ *dans le déterminant :*

$$\Delta = |g_j^{(s_i)}(z_i)|_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad .$$

Alors on a, pour tout $u \in G$,

$$\max_{1\leqslant\mu\leqslant n} |F^{(s_\mu)}(z_\mu)| \,.\, \sum_{i=1}^{n} \Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(u)\, \Delta_{i,k}\Big| \geqslant |\Delta| \,.\, |F(u)| \quad .$$

Démonstration :

Considérons les n équations linéaires en $b_1, \ldots, b_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\, g_k^{(s_i)}(z_i) = F^{(s_i)}(z_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n \quad .$$

Les formules de Cramer donnent :

$$b_k\, \Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,k}\, F^{(s_i)}(z_i) \qquad 1\leqslant k\leqslant n \quad .$$

D'où :

$$\Delta F(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} \, f_k(u) \right) F^{(s_i)}(z_i) \quad .$$

Le lemme en découle immédiatement.

§. 5 - FORMULE D'INTERPOLATION.

Soient $z_o, \dots, z_n$, t des nombres complexes, distincts ou non. Soit z un nombre complexe, $z \neq t$ et $z \neq z_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

En écrivant l'identité :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_k} + \frac{t-z_k}{z-z_k} \times \frac{1}{z-t}$$

pour $k = 0, \dots, n$, on obtient l'identité :

$$(6) \qquad \frac{1}{z-t} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\prod_{k<\ell} (t-z_k)}{\prod_{h\leqslant\ell} (z-z_h)} + \frac{\prod_{k\leqslant n} (t-z_k)}{(z-t) \prod_{k\leqslant n} (z-z_k)} \quad .$$

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, borné, simplement connexe, contenant $z_o, \dots, z_n$, t , de frontière Γ .

Soit f une fonction entière dans D . En multipliant (6) par $\frac{1}{2i\pi} f(z)$ et en intégrant pour $z \in \Gamma$, on obtient :

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \prod_{k<\ell} (t-z_k) + R_n(t)$$

où :

$$(7) \qquad a_\ell = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{\prod_{h\leqslant\ell} (z-z_h)} \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant n \quad ,$$

et :

$$R_n(t) = \prod_{k\leqslant n} (t-z_k) \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-t) \prod_{h\leqslant n} (z-z_h)} \quad .$$

Remarque : Dans le cas où $z_o, \dots, z_n$ sont deux à deux distincts, on en déduit que le seul polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant les $n+1$ conditions :

$$P(z_k) = f(z_k) \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

est défini par :

$$(8) \qquad P(t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \prod_{k<\ell} (t-z_k)$$

où a_ℓ est défini par (7).

Dans le cas où l'ensemble des points z_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est identique à l'ensemble des points $y_1, \dots, y_1, y_\nu, \dots, y_\nu$, où y_ℓ est répété p_ℓ fois, avec $\sum_{p=1}^{\nu} p_\ell = n+1$, et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$, on en déduit que le polynôme :

$$(8)' \qquad P(t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \prod_{k<\ell} (t-z_k) = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \sum_{r=0}^{p_{\lambda+1}-1} a_{p_1+\dots+p_\lambda+r} \,.$$

$$. \prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} \,.\, (t-y_{\lambda+1})^r \,,$$

où a_ℓ est défini par (4), c'est-à-dire :

$$(7)' \qquad a_{p_i+\dots+p_\lambda+r} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} (t-y_{\lambda+1})^{r+1}}$$

est un polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant les $n+1$ conditions :

$$(9) \qquad P^{(s)}(y_k) = f^{(s)}(y_k) \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant p_k - 1 \\ 1 \leqslant k \leqslant \nu \end{matrix} \,.$$

En effet, on a :

$$\frac{d^s}{dz^s} \prod_{k\leqslant n} (t-z_k) \Big|_{z=z_h} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant p_h - 1 \\ 1 \leqslant h \leqslant \nu \end{matrix} \,.$$

Donc :

$$R_n^{(s)}(y_h) = 0 \quad , \text{ d'où } (7) \,.$$

D'autre part, si deux polynômes P_1 et P_2 vérifient les n+1 conditions (9) et ont un degré $\leqslant n$, leur différence est un polynôme de degré $\leqslant n$ ayant n+1 racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), donc $P_1 = P_2$.

Résumons ces résultats en un lemme :

LEMME 5. - Soient $p_1, \ldots, p_\nu$ des nombres entiers positifs, $n = (\sum_{k=1}^{\nu} p_k) - 1$. Soient $y_1, \ldots, y_\nu$ des nombres complexes deux à deux distincts. Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, borné, simplement connexe, contenant $y_1, \ldots, y_\nu$, de frontière Γ. Soit f une fonction entière dans D. Alors il existe un polynôme et un seul dans $\mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à n, vérifiant les (n+1) conditions :

$$P^{(s)}(y_k) = f^{(s)}(y_k) \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant p_k - 1 \\ 1 \leqslant k \leqslant \nu \end{matrix} \quad . \tag{9}$$

Ce polynôme P est déterminé par les relations :

$$P(t) = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \sum_{r=0}^{p_{\lambda+1}-1} a_{p_1+\ldots+p_\lambda+r} \left(\prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} \right) . (t-y_{\lambda+1})^r \quad , \tag{8'}$$

$$a_{p_1+\ldots+p_\lambda+r} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{\left(\prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} \right) (t-y_{\lambda+1})^{r+1}} \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant \lambda \leqslant \nu - 1 \\ 0 \leqslant r \leqslant p_{\lambda+1} - 1 \end{matrix} \tag{7'}$$

§. 6. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Le cofacteur $\Delta_{(i,j),\ell}$ de $\frac{(\ell-1)!}{(\ell-j)!} \omega_i^{\ell-1}$ dans le déterminant :

$$\Delta = \left[\frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}} z^{j-1} e^{\omega_i z} \Big|_{z=0} \right] = \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{\ell-1} \Big|_{z=\omega_i} \right] \tag{3}$$

vérifie les relations :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \Delta_{(i,j),\ell} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} z^{\ell-1} \right]_{z=w_h} = \Delta \times \delta_{(i,j),(h,k)}$$

où $$\delta_{(i,j),(h,k)} = \begin{cases} = 1 & \text{si } (i,j) = (h,k) \ , \\ = 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Donc, le polynôme :

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{(i,j),k} \, z^{k-1} = Q_{i,j}(z)$$

vérifie les n relations :

$$Q_{i,j}^{(k-1)}(w_h) = \Delta \ \delta_{(i,j),(h,k)} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant h \leqslant \ell \\ 1 \leqslant k \leqslant p_h \end{array} \ .$$

Donc le polynôme :

$$P(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} u^{j-1} e^{\omega_i u} Q_{i,j}(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \, z^{k-1} \ ,$$

où a_k est défini par :

$$a_k = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} \Delta_{(i,j),k} \, u^{j-1} \, e^{\omega_i u} \ ,$$

vérifie les relations :

$$(10) \qquad P^{(k-1)}(w_h) = \Delta \, u^{k-1} \, e^{w_h u}$$

$$= \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (\Delta \, e^{uz}) \right]_{z=w_h} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant h \leqslant \ell \\ 1 \leqslant k \leqslant p_h \end{array} \ .$$

Ecrivons le polynôme P sous la forme :

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k \prod_{h<k} (z - \alpha_h)$$

où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (w_1, \ldots, w_1, \ldots, w_\ell, \ldots, w_\ell)$, w_h étant écrit p_h fois .

Autrement dit, étant donné un entier s avec $1 \leqslant s \leqslant n$, il existe deux entiers λ et r , uniques, $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant p_\lambda$, tels que :

$$s = \sum_{i=1}^{\lambda-1} p_i + r \ .$$

On pose alors :

$$\alpha_s = w_\lambda \ .$$

On a alors, d'après la formule d'interpolation (7)' du lemme 5, et d'après (10) :

$$(11) \qquad C_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\Delta\, e^{u\gamma}}{\prod_{\ell \leqslant k} (\gamma - \alpha_\ell)}\, d\gamma \ ,$$

où Γ est un cercle $|\gamma| = R_1$ contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ($R_1 > \Omega = \sup_{1\leqslant h \leqslant \ell} |w_h|$).

Nous allons établir la relation :

$$(12) \qquad \sum_{h=1}^{n} |a_h| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \prod_{h<k} (1+|\alpha_h|) \ .$$

Dans le cas où a_h , C_k et $-\alpha_h$ sont tous réels positifs, les deux membres sont égaux à $P(1)$. Dans le cas général, soit :

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{n} |C_k| \prod_{h<k} (z+|\alpha_h|) \ .$$

On a :

$$a_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{dz^i} P(z) \right]_{z=0} = \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{n} C_k \left[\frac{d^i}{dz^i} \prod_{h<k} (z-\alpha_h) \right]_{z=0}$$

or :

$$\left| \left[\frac{d^i}{dz^i} \prod_{h<k} (z-\alpha_h) \right]_{z=0} \right| \leqslant \left[\frac{d^i}{dz^i} \prod_{h<k} (z + |\alpha_h|) \right]_{z=0} \ .$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant Q(1) \ .$$

Soit $\Omega = \max_{1\leqslant i \leqslant \ell} |w_i|$, et $R_1 = \Omega + 1$.

On a, d'après (11) et (12), pour $|u| \leqslant R$,

$$|C_k| \leqslant |\Delta| (\Omega+1)\, e^{R(\Omega+1)} \ , \text{ et}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant n\, (\Omega+1)\, e^{R(\Omega+1)} (\Omega+1)^n\, \Delta \ .$$

Donc, en utilisant le lemme 4, pour la fonction f définie par (1) :

$$|\Delta| \max_{0\leqslant s \leqslant n-1} |f^{(s)}(0)| \geqslant |\Delta| \max_{|u|=R} |f(u)| \times [n(\Omega+1)^{n+1} e^{R(\Omega+1)}]^{-1} .$$

Comme $\Delta \neq 0$, on en déduit :

(13) $$\max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |f^{(s)}(0)| \geqslant \max_{|v|=R} |f(v)| \times [n(\Omega+1)^{n+1} e^{R(\Omega+1)}]^{-1} .$$

On utilise la relation (5) avec $F=f$.

Pour $R>\rho$ et $R>1$, on a :

(14) $$\left(\frac{R-\rho}{\rho+1}\right)^{\sigma} \leqslant n!\,(\Omega+1)^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{R(1+\Omega)} .$$

Pour $\Omega=0$, f est un polynôme et $\sigma<n$. Comme $R^n\leqslant n!\,e^R$, la relation (2) est vraie. Pour $\Omega>0$, le nombre σ de zéros, dans le disque $|z|<\rho$, de la fonction $z\to f(z)$, est égal au nombre de zéros, dans le disque $|z|<\rho\Omega$, de la fonction $z\to f(\frac{z}{\Omega})$, d'où :

(2) $$\left(\frac{R-\rho\Omega}{\rho\Omega+1}\right)^{\sigma} \leqslant n!\; 2^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{2R} \quad \text{pour tout } R>\rho\Omega+1 .$$

<u>Remarque</u> : Par une méthode différente, Tijdeman [18] a récemment amélioré cette inégalité en montrant que, pour tous réels $t>0$ et $s>1$, on a :

$$\sigma\leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} s}[(n-1)\operatorname{Log}\frac{st+s+t}{t} + (st+s+2t)\rho\Omega + \frac{1}{s}] .$$

En particulier, on a :

$$\sigma\leqslant 3(n-1) + 4\rho\Omega .$$

D'autre part, si :

$$\varepsilon>0 \quad \text{et} \quad \rho\Omega<n\exp(-\frac{6}{\varepsilon}) ,$$

alors :

$$\sigma\leqslant n(1+\varepsilon) .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - A note on the Padé table, Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser.A 69 (1966) p. 596-601.

[2] COATES (J.). - On the algebraic approximation of functions, I, II, III, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Ser. A 69, 4 (1966), p. 421-461 ; IV, id, A 70 (1967) p. 205-212 .

[3] DANCS (S.) et TURAN (P.). - On the distribution of values of a class of entire functions, I, II, Publ. Math. Debrecen 11 (1964), p. 257-272.

[4] DICKSON (D. G.). - Zeros of exponential sums, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), p. 84-89.

[5] FEL'DMAN (N. I.). - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers, I, Math. U. S. S. R. Sbornik, 5 (1968) p. 291-307 ; II, id, 6 (1968), p. 393-406.

[6] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers, Dover, New-York (1960).

[7] GEL'FOND (A. O.). - Calcul des différences finies. Dunod, Paris (1963).

[8] GEL'FOND (A. O.) et LINNIK (Yu. V.). - Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres. Gauthier-Villars, Paris 1965.

[9] JAGER (H.). - A multidimensional generalization of the Padé table, I à VI, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A. 67 (1964), p. 193-249.

[10] LANGER (S. R. E.). - On the zeros of exponential sums and integrals, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), p. 213-239.

[11] MAHLER (K.). - Zur approximation der exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II, J. Reine Angew. Math., 166 (1932), p. 118-150.

[12] MAHLER (K.). - On a class of entire functions. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 18 (1967), p. 83-96.

[13] PONTRJAGIN (L. S.). - On the zeros of some elementary transcendental functions, Izr. Akad. Nauk. S. S. S. R. Ser. Math. 6 (1942), p. 115-134.

[14] POORTEN (A. J. Van der). - Generalisation of Turan's main theorems on lower bounds for sums of powers, Bull. Austral. Math. Soc. 2 (1970), p. 15-37.

[15] POORTEN (A. J. Van der). - A generalisation of Turan's main theorems to binomials and logarithms. Bull. Austral. math. Soc. 2 (1970), p. 183-195.

[16] SIEGEL (C. L.). - Transcendental numbers. Annals of Math. Studies n° 16 (1949).

[17] SPIRA (R.). - A lemma in transcendental number theory. Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969), p. 457-464.

[18] TIJDEMAN (R.). - On the number of zeros of general exponential polynomials. Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A (1971), p. 1-7.

[19] TURAN (P.). - Eine neue methode in der Analysis und deren Anwendungen, Akademiai Kiado, Budapest (1953) (Trad. Angl. Interscience tracts series).

[20] TURAN (P.). - On the distribution of zeros of general exponential polynomials; Publ. Math. Debrecen 7 (1960), p. 130-136.

[21] WITTISCH (H.). - Bemerkung zur Wertverteilung von exponentialsummen, Arch. Math. 4 (1953), p. 202-209.

-:-:-:-

U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE