

MICHEL WALDSCHMIDT

**Majoration du nombre de zéros d'une somme polynomiale  
d'exponentielles  $p$ -adiques**

*Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1971), exp. n° 3, p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=STNB\\_1971\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A3_0)

© Université Bordeaux 1, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MAJORATION DU NOMBRE DE ZEROS D'UNE SOMME  
POLYNOMIALE D'EXPONENTIELLES  $p$ -ADIQUES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-

Dans [8], nous avons étudié le nombre de zéros complexes d'une fonction  $f$  du type suivant :

$$z \rightarrow f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1} e^{\omega_i z} ;$$

dans un disque  $|z - z_0| \leq \rho$ , le nombre de zéros de  $f$  ne dépend que de  $\rho$ ,  $\sum_{i=1}^{\ell} p_i$  et  $\max_{1 \leq i \leq \ell} |\omega_i|$ . Nous allons ici étudier l'équivalent  $p$ -adique de ce

théorème, en vue d'applications à des problèmes d'indépendance algébrique de nombres  $p$ -adiques ; c'est d'ailleurs dans ce sens que Adams [1] a déjà obtenu un résultat partiel.

Remarquons d'abord que, pour que les exponentielles convergent, il faut limiter le rayon  $\rho$  du disque considéré autour de l'origine en fonction

de  $\max_{1 \leq i \leq \ell} |\omega_i|_p$ .

Nous adopterons les notations suivantes :

$\Omega$  désignera un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle  $p$  ; quitte à remplacer  $\Omega$  par le complété d'une de ses clôtures algébriques, nous pourrions supposer le corps  $\Omega$  algébriquement clos. Un exemple de tel corps est fourni par le complété  $\mathbb{C}_p$  d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ .

Nous noterons  $|\cdot|_p$  la valeur absolue de  $\Omega$ , normalisée par :  $|p|_p = \frac{1}{p}$ . L'image de  $\Omega^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  par l'application  $x \rightarrow |x|_p$  sera noté  $G$  ;  $\mathfrak{A}$  sera l'anneau de valuation de  $\Omega$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal.

Soit  $D$  un disque de  $\Omega$ , de centre  $\alpha$ , et  $f$  une fonction définie sur  $D$  à valeurs dans  $\Omega$ . On dira que  $f$  est analytique sur  $D$  [2] s'il existe une série entière en  $x-\alpha$ , convergeant dans  $D$ , dont la somme coïncide avec  $f$  dans  $D$ .

Enfin on définit la fonction exponentielle de la manière suivante [1, 2] :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

qui converge si et seulement si  $|z|_p < \frac{1}{\frac{1}{p-1}}$ .

Pour  $a_1, a_2 \in \Omega, |a_i|_p < \frac{1}{p^{p-1}}$ , on a :

$$|e^{a_i} - 1|_p = |a_i|_p \quad \text{et} \quad e^{a_1} \cdot e^{a_2} = e^{a_1 + a_2}.$$

PROPOSITION . - Soient  $p_1, \dots, p_\ell$  des nombres entiers positifs,  
 $n = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$  ; soient  $\omega_1, \dots, \omega_\ell$  des éléments de  $\Omega$ , deux à deux distincts,  
tels que  $\max_{1 \leq i \leq \ell} |\omega_i|_p < 1$ . Enfin, soient  $b_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq \ell$  ;  $1 \leq j \leq p_i$ )  $n$  éléments de

$\Omega$  non tous nuls.

Alors la fonction :

$$(1) \quad z \rightarrow f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{P_i} b_{i,j} z^{j-1} e^{\omega_i z}$$

n'est pas identiquement nulle et le nombre de zéros de f dans le disque  
 $|z|_p < p^{\frac{2}{p-1}}$  est inférieur à 2n .

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 1 . - Soit f une fonction analytique dans un disque  $|z|_p < R_1$  de  $\Omega$  . Soient r et R deux éléments de G ,  $0 < r < R < R_1$  , et  $\sigma$  le nombre de zéros de f dans le disque  $|z|_p \leq r$  . Pour tout entier  $s \geq 0$  , on a :

$$(2) \quad \sup_{|x|_p < r} |f^{(s)}(x)|_p \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^s \cdot \sup_{|z|_p = R} |f(z)|_p .$$

Démonstration du lemme 1.

Soit  $x \in \Omega$  ,  $|x|_p < r$  . Soit  $g(z) = f(z+x)$  . D'après les inégalités de Cauchy ([2] Prop. 17), on a :

$$|g^{(s)}(0)|_p \leq \left(\frac{1}{r}\right)^s \cdot \sup_{|z|_p = r} |g(z)|_p .$$

D'où :

$$|f^{(s)}(x)|_p \leq \left(\frac{1}{r}\right)^s \cdot \sup_{|z|_p = r} |f(z)|_p .$$

Or, d'après un théorème de Mahler [5, 7] on a :

$$\sup_{|z|_p = r} |f(z)|_p \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \cdot \sup_{|z|_p = R} |f(z)|_p .$$

D'où la relation (2) .

LEMME 2 . - Soit f une fonction analytique dans un disque  $|z|_p < R$  de  $\Omega$  ,

avec  $R > 1$ . Soit  $P \in \Omega[z]$  un polynôme tel que le nombre de zéros de la fonction :

$$z \rightarrow f(z) - P(z)$$

dans le disque  $|z|_p < 1$  soit supérieur au degré de  $P$ . Alors :

$$(3) \quad \sup_{|z|_p=1} |P(z)|_p \leq \sup_{|z|_p=1} |f(z)|_p .$$

Pour démontrer le lemme 2, nous utiliserons des propriétés des bases orthonormales d'un espace de Banach  $E$  sur  $\Omega$  [6]. Soit  $E_0$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $|x| \leq 1$ . Il est clair que, si une famille  $(e_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $E$  est une base orthonormale de  $E$ , alors les  $e_i$  appartiennent à  $E_0$  et leurs images dans  $\bar{E} = \frac{E_0}{\mathfrak{M} E_0}$  forment une base (algébrique) du  $\frac{A}{\mathfrak{M}}$  espace vectoriel  $\bar{E}$ . La réciproque est vraie quand la valuation est discrète [6] et quand, pour tout  $x \in E$ ,  $|x|$  appartient à l'adhérence  $\bar{G}$  de  $G$ . Ici, la valuation n'est pas discrète, et on a le :

LEMME 3. - Soient  $\pi$  un élément non nul de  $\mathfrak{M}$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E_0$ , dont les images dans  $\frac{E_0}{\pi E_0}$  forment une base du  $\frac{A}{\pi A}$  module  $\frac{E_0}{\pi E_0}$ . Alors  $(e_i)_{i \in I}$  est une base orthonormale de  $E$ .

Démonstration du lemme 3.

Soit  $x \in E_0$ , et  $\bar{x}$  son image dans  $\frac{E_0}{\pi E_0}$ ; la décomposition de  $\bar{x}$  sur la base  $(e_i)_{i \in I}$  montre qu'il existe une famille  $(x_i, l_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ , tous nuls, sauf un nombre fini, tels que :

$$x - \sum_{i \in I} x_{i, l} e_i \in \pi E_0 .$$

En itérant cette opération, on obtient :

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i$$

avec  $x_i \in A$  et  $x_i$  tend vers zéro suivant le filtre des complémentaires des

parties finies de  $I$ . De plus, cette décomposition est unique, et, pour  $|x| = 1$ , on a :

$$|x| = \sup_{i \in I} |x_i| .$$

Comme la valuation de  $\Omega$  n'est pas discrète, on en déduit par homothétie le même résultat pour tout  $x \in E$ .

### Démonstration du lemme 2 .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions analytiques dans le disque  $|z|_p \leq 1$ . Muni de la norme suivante [3] : pour  $f(z) = \sum_{i \geq 1} a_i z^{i-1}$ , soit  $|f| = \sup_{i \geq 1} |a_i|_p = \sup_{|z|_p=1} |f(z)|_p$ ,  $E$  est un espace de Banach sur  $\Omega$ , et  $(1, z, \dots, z^n, \dots)$  est une base orthonormale de  $E$  [6].

Si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$  est une suite d'éléments de  $\Omega$ , et  $k \in G$  tel que  $|\alpha_i| \leq k < 1$  pour tout  $i \geq 1$ , alors  $(1, e_1, \dots, e_n, \dots)$  avec  $e_n = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$  forme une base orthonormale de  $E$  d'après le lemme 3.

Utilisons ce résultat en choisissant pour  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  les zéros de  $f-P$  comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque  $|z| < 1$ , et  $\alpha_m = 0$  pour  $m > n$ . On décompose  $f$  sur la base  $(e_0, \dots, e_m, \dots)$  :

$$f(z) = P_1(z) + \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) g(z) \quad \text{et} \quad |P_1| \leq |f| .$$

La fonction  $f-P$  admet les zéros  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et le degré de  $P_1$  est inférieur à  $n$ . D'où  $P_1 = P$  et :

$$(3) \quad \sup_{|z|_p=1} |P(z)|_p \leq \sup_{|z|_p=1} |f(z)|_p .$$

### Démonstration de la Proposition.

La fonction  $f$  définie par (1) est analytique dans le disque :

$$|z|_p < \frac{1}{p^{p-1} \cdot \max_{1 \leq h \leq \ell} |w_h|_p}$$

1) Soit  $u \in \Omega$ , avec  $|u|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ , soit  $\Delta$  le déterminant :

$$(4) \quad \Delta = \det \left[ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h-1} e^{\omega_k z})_{z=0} \right]_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 1 \leq k \leq \ell, 1 \leq h \leq p_k}},$$

et  $[\Delta_{s, (k, h)}]$  la matrice des cofacteurs. Ainsi :

$$f^{(s-1)}(0) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} b_{k, h} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h-1} e^{\omega_k z})_{z=0},$$

et les formules de Cramer donnent :

$$\Delta b_{k, h} = \sum_{s=1}^n \Delta_{s, (k, h)} f^{(s-1)}(0).$$

Le déterminant  $\Delta$  est non nul ; en effet, [8] :

$$\Delta = \left[ \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{p_i} (s-1)! \right] \prod_{i < j} (\omega_i - \omega_j)^{p_i p_j}.$$

D'où :

$$(5) \quad |f(u)|_p \leq \max_{1 \leq s \leq n} \left| f^{(s-1)}(0) \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} \frac{\Delta_{s, (k, h)}}{\Delta} u^{h-1} e^{\omega_k u} \right|_p$$

2) Soit  $P \in \Omega[z]$  le polynôme :

$$(6) \quad P(z) = \sum_{s=1}^n a_s z^{s-1}, \text{ où}$$

$$(7) \quad a_s = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} \frac{\Delta_{s, (k, h)}}{\Delta} u^{h-1} e^{\omega_k u}.$$

Nous allons établir les n relations :

$$(8) \quad P^{(h-1)}(\omega_k) = \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (e^{\omega_k z})_{z=\omega_k} \quad \begin{matrix} 1 \leq k \leq \ell \\ 1 \leq h \leq p_k \end{matrix}.$$

En effet, on a :

$$\sum_{s=1}^n \frac{\Delta_{s, (k, h)}}{\Delta} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h_1-1} e^{\omega_{k_1} z})_{z=0} = \delta(k, h), (k_1, h_1)$$

où  $\delta_{(k,h)(k_1,h_1)}$  vaut 1 si  $k=k_1$  et  $h=h_1$ , et 0 sinon.

La relation :

$$\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h_1-1} e^{\omega_{k_1} z})_{z=0} = \frac{d^{h_1-1}}{dz^{h_1-1}} (z^{s-1})_{z=\omega_{k_1}}$$

montre que l'on a :

$$\begin{aligned} P^{(h_1-1)}(\omega_{k_1}) &= \sum_{k=1}^l \sum_{h=1}^{p_k} u^{h-1} e^{\omega_k u} \delta_{(k,h)(k_1,h_1)} \\ &= u^{h_1-1} e^{\omega_{k_1} u} \\ &= \frac{d^{h_1-1}}{dz^{h_1-1}} (e^{uz})_{z=\omega_{k_1}} . \end{aligned}$$

3) D'après (3), (6) et (8), on a :

$$\max_{1 \leq s \leq n} |a_s|_p \leq \sup_{|z|_p=1} |e^{uz}| = 1, \text{ car } |u|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} .$$

Grâce à (7), la relation (5) s'écrit alors :

$$\sup_{|u|_p=R} |f(u)|_p \leq \max_{1 \leq s \leq n} |f^{(s-1)}(0)|_p$$

pour tout  $R < p^{-\frac{1}{p-1}}$ ,  $R \in G$ .

On utilise alors le lemme 1. Pour  $0 < r < R < p^{-\frac{1}{p-1}}$ , le nombre  $\sigma$  de zéros de  $f$  dans  $|z|_p \leq r$  vérifie la relation :

$$\left(\frac{R}{r}\right)^\sigma \leq \left(\frac{1}{r}\right)^n .$$

Soient  $\beta_1, \dots, \beta_\sigma$  les zéros de  $f$  dans le disque  $|z|_p < p^{-\frac{2}{p-1}}$ , et soit  $r \in G$  tel que :

$$\max_{1 \leq i \leq \sigma} |\beta_i|_p < r < p^{-\frac{2}{p-1}} .$$



Enfin, soit :  $R \in G$  avec  $r < R^2 < p^{-\frac{2}{p-1}}$ .

On a alors :

$$R^\sigma < R^{2(\sigma-n)},$$

d'où, comme  $R < 1$ ,  $\sigma < 2n$ .

### APPLICATION :

La proposition que nous venons de démontrer permet d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique de nombres p-adiques :

THEOREME . - Soient  $x_1, \dots, x_n$  (resp.  $y_1, \dots, y_m$ ) des éléments de  $\Omega$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

1. - Si  $mn > 2(m+n)$ , alors deux des nombres :

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m)$$

sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

2. - Si  $mn > 2m+n$ , deux des nombres :

$$x_i, \exp(x_i y_j) \quad (1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m)$$

sont algébriquement indépendants.

3. - Si  $mn > m+n$ , deux des nombres :

$$x_i, y_j, \exp(x_i y_j) \quad (1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m)$$

sont algébriquement indépendants.

## REFERENCES

- [1] ADAMS W. W. - Transcendental numbers in the  $p$ -adic domain. Amer. J. Math. 87, 1966, 279-308.
- [2] AMICE Y. - Analyse  $p$ -adique. Sémin. Delange-Pisot, 1959-60, n° 4, (78 p.).
- [3] AMICE Y. - Interpolation  $p$ -adique. Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, 117-180.
- [4] ESCASSUT A. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse de 3e cycle, 9 mai 1970 (129 p.), Bordeaux, (polycopié).
- [5] MAHLER K. - Uber transzendente  $p$ -adische Zahlen, Compositio Math. 2, 1935, 259-275.
- [6] SERRE J. P. - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach  $p$ -adiques. I. H. E. S. n° 12, 1961, 69-85.
- [7] SERRE J. P. - Dépendance d'exponentielles  $p$ -adiques. Sémin. Delange-Pisot-Poitou, 1966, n° 15, (14 p.).
- [8] WALDSCHMIDT M. - Répartition des valeurs d'une somme de fonctions exponentielles. Sémin. Théorie des Nombres, (additif) 1970-71, exposé n° 11 bis, Bordeaux, (19 p.).

-:-:-:-