MICHEL WALDSCHMIDT

Majoration du nombre de zéros d'une somme polynomiale d'exponentielles p-adiques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1971), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A3_0>

MAJORATION DU NOMBRE DE ZEROS D'UNE SOMME POLYNOMIALE D'EXPONENTIELLES p-ADIQUES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

Dans [8], nous avons étudié le nombre de zéros complexes d'une fonction f du type suivant :

$$z \to f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} \, z^{j-1} \, e^{\omega_i z} \quad ;$$

dans un disque $|z-z_o| \leqslant \rho$, le nombre de zéros de f ne dépend que de ρ, $\sum_{i=1}^{\ell} p_i$ et $\max_{1\leqslant i\leqslant \ell} |\omega_i|$. Nous allons ici étudier l'équivalent p-adique de ce théorème, en vue d'applications à des problèmes d'indépendance algébrique de nombres p-adiques ; c'est d'ailleurs dans ce sens que Adams [1] a déjà obtenu un résultat partiel.

Remarquons d'abord que, pour que les exponentielles convergent, il faut limiter le rayon ρ du disque considéré autour de l'origine en fonction de $\max_{1\leqslant i\leqslant \ell} |\omega_i|_p$.

Nous adopterons les notations suivantes :

Ω désignera un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p ; quitte à remplacer Ω par le complété d'une de ses clôtures algébriques, nous pourrons supposer le corps Ω algébriquement clos. Un exemple de tel corps est fourni par le complété $\mathbb{C}_p$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

Nous noterons $|\,.\,|_p$ la valeur absolue de Ω , normalisée par : $|p|_p = \frac{1}{p}$. L'image de Ω^* dans $\mathbb{R}_+^*$ par l'application $x \to |x|_p$ sera noté G ; A sera l'anneau de valuation de Ω et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal.

Soit D un disque de Ω , de centre α , et f une fonction définie sur D à valeurs dans Ω . On dira que f est analytique sur D [2] s'il existe une série entière en $x-\alpha$, convergeant dans D , dont la somme coïncide avec f dans D .

Enfin on définit la fonction exponentielle de la manière suivante [1, 2] :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

qui converge si et seulement si $|z|_p < \dfrac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}}$.

Pour $a_1, a_2 \in \Omega$, $|a_i|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$, on a :

$$|e^{a_i} - 1|_p = |a_i|_p \quad \text{et} \quad e^{a_1} . e^{a_2} = e^{a_1 + a_2} .$$

PROPOSITION . - <u>Soient</u> $p_1, \ldots, p_\ell$ <u>des nombres entiers positifs</u> , $n = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$; <u>soient</u> $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ <u>des éléments de</u> Ω , <u>deux à deux distincts, tels que</u> $\max_{1\leqslant i\leqslant \ell} |\omega_i| < 1$. <u>Enfin, soient</u> $b_{i,j}$ $(1\leqslant i\leqslant \ell \; ; \; 1\leqslant j\leqslant p_i)$ n <u>éléments de</u> Ω <u>non tous nuls</u>.

<u>Alors la fonction</u> :

$$(1) \qquad z \to f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1} e^{\omega_i z}$$

n'est pas identiquement nulle et le nombre de zéros de f dans le disque $|z|_p < p^{-\frac{2}{p-1}}$ est inférieur à $2n$.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 1 . - Soit f une fonction analytique dans un disque $|z|_p < R_1$ de Ω . Soient r et R deux éléments de G , $0 < r < R < R_1$, et σ le nombre de zéros de f dans le disque $|z|_p \leqslant r$. Pour tout entier $s \geqslant 0$, on a :

$$(2) \qquad \sup_{|x|_p < r} |f^{(s)}(x)|_p \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} . \left(\frac{1}{r}\right)^{s} . \sup_{|z|_p = R} |f(z)|_p \ .$$

Démonstration du lemme 1.

Soit $x \in \Omega$, $|x|_p < r$. Soit $g(z) = f(z+x)$. D'après les inégalités de Cauchy ([2] Prop. 17), on a :

$$|g^{(s)}(0)|_p \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{s} . \sup_{|z|_p = r} |g(z)|_p \ .$$

D'où :

$$|f^{(s)}(x)|_p \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{s} . \sup_{|z|_p = r} |f(z)| \ .$$

Or, d'après un théorème de Mahler [5, 7] on a :

$$\sup_{|z|_p = r} |f(z)| \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} . \sup_{|z|_p = R} |f(z)|_p \ .$$

D'où la relation (2) .

LEMME 2 . - Soit f une fonction analytique dans un disque $|z|_p < R$ de Ω , avec $R>1$. Soit $P\in\Omega[z]$ un polynôme tel que le nombre de zéros de la fonction :

$$z \to f(z) - P(z)$$

dans le disque $|z|_p<1$ soit supérieur au degré de P. Alors :

$$(3) \qquad \sup_{|z|_p=1} |P(z)|_p \leq \sup_{|z|_p=1} |f(z)|_p .$$

Pour démontrer le lemme 2, nous utiliserons des propriétés des bases orthonormales d'un espace de Banach E sur Ω [6]. Soit E_o l'ensemble des $x\in E$ tels que $|x|\leq 1$. Il est clair que, si une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une base orthonormale de E, alors les e_i appartiennent à E_o et leurs images dans $\bar{E} = \frac{E_o}{\mathfrak{M} E_o}$ forment une base (algébrique) du $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ espace vectoriel $\bar{E}$. La réciproque est vraie quand la valuation est discrète [6] et quand, pour tout $x\in E$, $|x|$ appartient à l'adhérence $\bar{G}$ de G. Ici, la valuation n'est pas discrète, et on a le :

LEMME 3. - *Soient π un élément non nul de $\mathfrak{M}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E_o, dont les images dans $\frac{E_o}{\pi E_o}$ forment une base du $\frac{A}{\pi A}$ module $\frac{E_o}{\pi E_o}$. Alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E.*

Démonstration du lemme 3.

Soit $x\in E_o$, et $\bar{x}$ son image dans $\frac{E_o}{\pi E_o}$; la décomposition de $\bar{x}$ sur la base $(e_i)_{i\in I}$ montre qu'il existe une famille $(x_{i,1})_{i\in I}$ d'éléments de A, tous nuls, sauf un nombre fini, tels que :

$$x - \sum_{i\in I} x_{i,1}\, e_i \in \pi E_o .$$

En itérant cette opération, on obtient :

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i$$

avec $x_i\in A$ et x_i tend vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I . De plus, cette décomposition est unique, et, pour $|x| = 1$, on a :

$$|x| = \sup_{i \in I} |x_i| \ .$$

Comme la valuation de Ω n'est pas discrète, on en déduit par homothétie le même résultat pour tout $x \in E$.

Démonstration du lemme 2 .

Soit E l'espace vectoriel des fonctions analytiques dans le disque $|z|_p \leqslant 1$. Muni de la norme suivante [3] : pour $f(z) = \sum_{i \geqslant 1} a_i z^{i-1}$, soit $|f| = \sup_{i \geqslant 1} |a_i|_p = \sup_{|z|_p = 1} |f(z)|_p$, E est un espace de Banach sur Ω , et $(1, z, \dots, z^n, \dots)$ est une base orthonormale de E [6] .

Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ est une suite d'éléments de Ω , et $k \in G$ tel que $|\alpha_i| \leqslant k < 1$ pour tout $i \geqslant 1$, alors $(1, e_1, \dots, e_n, \dots)$ avec $e_n = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$ forme une base orthonormale de E d'après le lemme 3.

Utilisons ce résultat en choisissant pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les zéros de $f-P$ comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque $|z| < 1$, et $\alpha_m = 0$ pour $m > n$. On décompose f sur la base $(e_o, \dots, e_m, \dots)$:

$$f(z) = P_1(z) + \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)\, g(z) \quad \text{et} \quad |P_1| \leqslant |f| \ .$$

La fonction $f-P$ admet les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et le degré de P_1 est inférieur à n . D'où $P_1 = P$ et :

$$\sup_{|z|_p = 1} |P(z)|_p \leqslant \sup_{|z|_p = 1} |f(z)|_p \ . \tag{3}$$

Démonstration de la Proposition.

La fonction f définie par (1) est analytique dans le disque :

$$|z|_p < \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}} . \max_{1 \leqslant h \leqslant \ell} |\omega_h|_p}$$

1) Soit $u \in \Omega$, avec $|u|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$, soit Δ le déterminant :

(4) $$\Delta = \det \left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h-1} e^{\omega_k z})_{z=0} \right]_{\substack{1 \leqslant s \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant \ell,\ 1 \leqslant h \leqslant p_k}} ,$$

et $[\Delta_{s,(k,h)}]$ la matrice des cofacteurs. Ainsi :

$$f^{(s-1)}(0) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} b_{k,h} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h-1} e^{\omega_k z})_{z=0} ,$$

et les formules de Cramer donnent :

$$\Delta\, b_{k,h} = \sum_{s=1}^{n} \Delta_{s,(k,h)} f^{(s-1)}(0) .$$

Le déterminant Δ est non nul ; en effet, [8] :

$$\Delta = \left[\prod_{i=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{p_i} (s-1)! \right] \prod_{i<j} (\omega_i - \omega_j)^{p_i p_j} .$$

D'où :

(5) $$|f(u)|_p \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \left| f^{(s-1)}(0) \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} \frac{\Delta_{s,(k,h)}}{\Delta} u^{h-1} e^{\omega_k u} \right|_p$$

2) <u>Soit</u> $P \in \Omega[z]$ <u>le polynôme</u> :

(6) $$P(z) = \sum_{s=1}^{n} a_s z^{s-1} , \text{ \underline{où}}$$

(7) $$a_s = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{p_k} \frac{\Delta_{s,(k,h)}}{\Delta} u^{h-1} e^{\omega_k u} .$$

<u>Nous allons établir les</u> n <u>relations</u> :

(8) $$P^{(h-1)}(\omega_k) = \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (e^{uz})_{z=\omega_k} \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant k \leqslant \ell \\ 1 \leqslant h \leqslant p_k \end{matrix} .$$

En effet, on a :

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\Delta_{s,(k,h)}}{\Delta} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{h_1-1} e^{\omega_{k_1} z})_{z=0} = \delta_{(k,h),(k_1,h_1)}$$

où $\delta_{(k,h)(k_1,h_1)}$ vaut 1 si $k=k_1$ et $h=h_1$, et 0 sinon.

La relation :

$$\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left(z^{h_1-1}e^{\omega_{k_1}z}\right)_{z=0}=\frac{d^{h_1-1}}{dz^{h_1-1}}\left(z^{s-1}\right)_{z=\omega_{k_1}}$$

montre que l'on a :

$$\begin{aligned}P^{(h_1-1)}(\omega_{k_1}) &= \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{h=1}^{p_k} u^{h-1}e^{\omega_k u}\,\delta_{(k,h)(k_1,h_1)}\\ &= u^{h_1-1}e^{\omega_{k_1}u}\\ &= \frac{d^{h_1-1}}{dz^{h_1-1}}\left(e^{uz}\right)_{z=\omega_{k_1}}\end{aligned}$$

3) D'après (3), (6) et (8), on a :

$$\max_{1\leqslant s\leqslant n}|a_s|_p\leqslant \sup_{|z|_p=1}|e^{uz}|=1\,,\ \text{car}\ |u|_p<p^{-\frac{1}{p-1}}\,.$$

Grâce à (7), la relation (5) s'écrit alors :

$$\sup_{|u|_p=R}|f(u)|_p\leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant n}|f^{(s-1)}(0)|_p$$

pour tout $R<p^{-\frac{1}{p-1}}$, $R\in G$.

On utilise alors le lemme 1. Pour $0<r<R<p^{-\frac{1}{p-1}}$, le nombre σ de zéros de f dans $|z|_p\leqslant r$ vérifie la relation :

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}\leqslant\left(\frac{1}{r}\right)^{n}\,.$$

Soient $\beta_1,\dots,\beta_\sigma$ les zéros de f dans le disque $|z|_p<p^{-\frac{2}{p-1}}$, et soit $r\in G$ tel que :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant\sigma}|\beta_i|_p<r<p^{-\frac{2}{p-1}}\,.$$

Enfin, soit : $R \in G$ avec $r < R^2 < p^{-\frac{2}{p-1}}$.

On a alors :

$$R^{\sigma} < R^{2(\sigma - n)} ,$$

d'où, comme $R < 1$, $\sigma < 2n$.

APPLICATION :

La proposition que nous venons de démontrer permet d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique de nombres p-adiques :

THEOREME . - Soient $x_1, \ldots, x_n$ (resp. $y_1, \ldots, y_m$) des éléments de Ω linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

1. - Si $mn > 2(m+n)$, alors deux des nombres :

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

2. - Si $mn > 2m+n$, deux des nombres :

$$x_i \ , \ \exp(x_i y_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

sont algébriquement indépendants.

3. - Si $mn > m+n$, deux des nombres :

$$x_i \ , \ y_j \ , \ \exp(x_i y_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

sont algébriquement indépendants.

-:-:-:-

REFERENCES

[1] ADAMS W. W. - Transcendental numbers in the p-adic domain. Amer. J. Math. 87, 1966, 279-308.

[2] AMICE Y. - Analyse p-adique. Sém. Delange-Pisot, 1959-60, n° 4, (78 p.).

[3] AMICE Y. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, 117-180.

[4] ESCASSUT A. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse de 3e cycle, 9 mai 1970 (129 p.), Bordeaux, (polycopié).

[5] MAHLER K. - Uber transzendente p-adische Zahlen, Compositio Math. 2, 1935, 259-275.

[6] SERRE J. P. - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. I. H. E. S. n° 12, 1961, 69-85.

[7] SERRE J. P. - Dépendance d'exponentielles p-adiques. Sém. Delange-Pisot-Poitou, 1966, n° 15, (14 p.).

[8] WALDSCHMIDT M. - Répartition des valeurs d'une somme de fonctions exponentielles. Sém. Théorie des Nombres, (additif) 1970-71, exposé n° 11 bis, Bordeaux, (19 p.).

-:-:-:-

U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE