EVE HELSMOORTEL

Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1971), exp. nº 2, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A2_0>

COMPORTEMENT LOCAL DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT REGULIER D'UN CORPS LOCAL

par

Eve HELSMOORTEL

-:-:-:-

Sur un compact régulier M ([1]) contenu dans la boule unité A d'un corps local K, on définit les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une suite u très bien répartie dans M et bien ordonnée ; puis, à toute fonction continue f de M dans A, on associe sa série d'interpolation sur la base normale (Q_n) de $\mathcal{C}(M,A)$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n Q_n(x)$$

et on peut alors, selon l'ordre de croissance des $v(a_n)$, caractériser les fonctions Lipschitziennes et en étudier la dérivabilité.

NOTATIONS

K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de la valuation, et M un compact régulier contenu dans A :

$$M = \varprojlim M_k \quad , \quad \text{où} \quad M_k = M/\pi^k A \quad ,$$

on note $N_k = \text{Card}\, M_k = q_1 q_2 \cdots q_k$.

La suite des entiers q_i étant ainsi définie, tout entier naturel n s'exprime de manière unique sous la forme :

$$n = n_o + n_1 N_1 + \ldots + n_{h-1} N_{h-1} \quad , \quad 0 \leq n_i < q_{i+1} \quad \text{et} \quad n_{h-1} \neq 0 \; .$$

A partir de la suite $\tilde{q} = (q_i)$, on construit l'ensemble $\mathbb{Z}_{\tilde{q}} = \varprojlim \mathbb{Z}/N_k \mathbb{Z}$ sur lequel est défini la valuation v_q : pour un élément z de $\mathbb{Z}_{\tilde{q}}$:

$$z = z_o + z_1 N_1 + \ldots + z_k N_k + \ldots$$

on a $v_q(z) = m$ lorsque $z_i = 0$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et $z_m \neq 0$.

Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite très bien répartie dans M (TBR cf. [1]), on dira qu'elle est bien ordonnée (TBR BO) lorsque :

$$v(u_i - u_j) = v_q\,(i-j)\;\; v(\pi) \; .$$

On considère alors les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une telle suite u TBR BO :

$$Q_n(x) = \frac{(x-u_o)(x-u_1)\ldots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_o)(u_n-u_1)\ldots(u_n-u_{n-1})} = \frac{P_n(x)}{P_n(u_n)}$$

et on associe à une fonction f continue de M dans A sa série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \, Q_n(x) \; .$$

1. - FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

On avait démontré (cf. [3] et [4]) le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. - <u>S'il existe</u> C <u>tel que</u> $v(a_n) \geq (C+h)\, v(\pi)$ <u>pour</u> $N_{h-1} \leq n < N_h$, <u>alors</u> :

$$v(f(x) - f(y)) \geq (1+C)\; v(\pi) + v(x-y)$$

<u>pour tout couple</u> (x, y) <u>de points de</u> M.

En généralisant à $\mathcal{C}(M,A)$ une démonstration de Y. Amice et J. Fresnel [2], on obtient la proposition :

PROPOSITION 1.2. - S'il existe un entier $m > 0$ tel que :

$$v(f(x)-f(y)) \geq v(x-y) - m\, v(\pi)\ , \quad \forall x\ , \forall y \in M\ ,$$

alors :

$$\forall\, h \geq 0\ , \forall\, n \geq N_{m+h} \quad v(a_n) \geq h\, v(\pi)\ .$$

Démonstration : Soit $E_o = \mathcal{C}(M,A)$, $\overline{E} = E_o/\pi E_o$; à tout f appartenant à E_o on fait correspondre $\overline{f}$ appartenant à $\overline{E}$: pour $x \in M$, $\overline{f}(x) = \overline{f(x)} \in A/\pi A$. On note $\overline{E}_h$ le sous-espace vectoriel des fonctions de $\overline{E}$ constantes sur les boules d'ordre h .

Ici, si $v(x-y) \geq (m+1)\, v(\pi)$, $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$, donc $\overline{f}$ appartient à $\overline{E}_{m+1}$. Or $(\overline{Q}_n)_{0 \leq n < N_{m+1}}$ est une base de $\overline{E}_{m+1}$, donc il existe des constantes a_i^0 appartenant à A et telles que :

$$f(x) = \sum_{0 \leq i < N_{m+1}} a_i^0\, Q_i(x) + \pi\, f_1(x)\ ,$$

où f_1 appartient à $\mathcal{C}(M,A)$.

On avait démontré (cf. [3] et [4]) que :

$$\text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h : \quad v(Q_n(x)-Q_n(y)) \geq v(x-y)+(1-h)\, v(\pi)\ .$$

On en déduit alors que $\overline{f_1}$ appartient à $\overline{E}_{m+2}$, et donc :

$$f_1(x) = \sum_{0 \leq i < N_{m+2}} a_i^1\, Q_i(x) + \pi f_2(x)\ , \quad f_2 \in \mathcal{C}(M,A)\ .$$

On démontre ainsi, par récurrence sur h , que :

$$\forall\, h \geq 0 \qquad f(x) = \sum_{0 \leq i < N_{m+1}} a_i^0\, Q_i(x) + \pi \sum_{0 \leq i < N_{m+2}} a_i^1\, Q_i(x) + \dots$$

$$+ \pi^h . \sum_{0 \leq i < N_{m+1+h}} a_i^h\, Q_i(x) + \pi^{h+1}\, f_{h+1}(x)$$

où f_{h+1} appartient à $\mathcal{C}(M,A)$.

$$f_{h+1}(x) = \sum_{n\geq 0} b_n \, Q_n(x)$$

et, si $n \geq N_{m+h}$: $a_n = \pi^h \, . \, a_n^h + \pi^{h+1} \, b_n$,

donc $v(a_n) \geq h \, v(\pi)$; et la proposition 1. 2. est démontrée.

Si, pour un entier $n \geq 1$, on note $h(n)$ l'entier tel que :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)}$$

on vérifie alors que, si l'hypothèse de 1. 2. est réalisée :

$$v(a_n) - h(n) \, v(\pi) \geq -m \, v(\pi) \qquad \forall n \geq 1 \ ,$$

et on en déduit le théorème suivant :

THEOREME 1. 3. - <u>Pour que</u> f <u>soit Lipschitzienne dans</u> M , <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> C <u>tel que</u> :

$$\forall n \geq 1 \ , \quad v(a_n) - h(n) \, v(\pi) \geq C \ ,$$

<u>où</u> $h(n)$ <u>est tel que</u> :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)} \ .$$

2. - DERIVABILITE DE f EN UN POINT u_i DE LA SUITE u

L'application $\varphi_i : x \to \dfrac{f(x)-f(u_i)}{x - u_i}$ est définie et continue dans $M-\{u_i\}$.
On remarque que :

<u>Pour que</u> $f'(u_i)$ <u>existe il faut et il suffit que l'application</u> φ_i <u>soit prolongeable continuement à</u> M .

Considérons la suite $u^{i+1} = (u_n^{i+1})_{n\geq 0}$ où $u_n^{i+1} = u_{i+1+n}$. La suite u étant TBR BO il en est de même de la suite u^{i+1} . A cette suite u^{i+1} on associe les polynômes :

$$P_n^{i+1}(x) = (x-u_o^{i+1})\dots(x-u_{n-1}^{i+1})$$

et

$$Q_n^{i+1}(x) = \frac{P_n^{i+1}(x)}{P_n^{i+1}(u_n^{i+1})}$$

les polynômes Q_n^{i+1} constituent une base normale de $\mathcal{C}(M,K)$, et on remarque que :

$$\text{pour } n \geq i+1 \ : \ Q_n(x) = \frac{P_i(x) - (x-u_i)}{(u_n-u_o)\dots(u_n-u_i)} \cdot Q_{n-i-1}^{i+1}(x) .$$

Pour $x \neq u_i$ on obtient :

$$\varphi_i(x) = \frac{f(x)-f(u_i)}{x-u_i} = \sum_{n=1}^{i} a_n \cdot \frac{Q_n(x)-Q_n(x_i)}{x-u_i} + \sum_{n\geq i+1} a_n \cdot \frac{Q_n(x)}{x-u_i} .$$

Soit :

$$\varphi_i(x) = R_i(x) + P_i(x) . \sum_{n\geq i+1} \frac{a_n}{(u_n-u_o)\dots(u_n-u_i)} Q_{n-i-1}^{i+1}(x)$$

en notant $R_i(x)$ le polynôme de degré au plus égal à $i-1$:

$$R_i(x) = \sum_{n=1}^{i} a_n \cdot \frac{Q_n(x) - Q_n(u_i)}{x-u_i}$$

$$R_i(u_i) = \sum_{n=1}^{i} a_n \, Q'_n(u_i) .$$

Pour x n'appartenant pas à $\{u_o, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i\}$, on définit la fonction ψ_i par :

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x) - R_i(x)}{P_i(x)}$$

et on a vu que :

$$\psi_i(x) = \sum_{n\geq i+1} \frac{a_n}{(u_n-u_o)\dots(u_n-u_i)} Q_{n-i-1}^{i+1}(x)$$

pour $x \notin \{u_o, \dots, u_i\}$.

Cette fonction ψ^i est définie en tous les points de la suite u^{i+1}, et ses coefficients d'interpolation sur cette suite sont :

$$k \geq 0 : \qquad \alpha_k^i = \frac{a_{k+i+1}}{(u_{k+i+1} - i_o)\dots(u_{k+i+1} - u_i)}$$

puisque $\qquad \psi_i(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^i \, Q_k^i(x) .$

<u>Si</u> $\alpha_k^i \to 0$ <u>lorsque</u> $k \to +\infty$, alors (cf [1]) ψ_i est prolongeable continûment à M en une fonction $\tilde{\psi}_i$:

$$\tilde{\psi}_i(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^i Q_k^i(x) \quad , \quad x \in M$$

ceci est réalisé lorsque :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o)\dots(u_n - u_i)} = 0 .$$

Or : $\varphi_i(x) = R_i(x) + P_i(x)\,\psi_i(x)$ si $x \notin \{u_o, \dots, u_i\}$, φ_i est donc prolongeable continûment à M , <u>et</u> $f'(u_i)$ <u>existe</u> :

$$f'(u_i) = R_i(u_i) + P_i(u_i)\,\tilde{\psi}_i(u_i)$$

$$P_i(u_i).\tilde{\psi}_i(u_i) = \sum_{n \geq i+1} \alpha_{n-i-1}^i \, P_i(u_i) . \, Q_{n-i-1}^{(i+1)}(u_i)$$

mais :

$$\alpha_{n-i-1}^i . \, P_i(x) . \, Q_{n-i-1}^{(i+1)}(x) = a_n . \frac{Q_n(x)}{x - u_i} ,$$

donc : $\qquad \alpha_{n-i-1}^i \, P_i(u_i) \, Q_{n-i-1}^{(i+1)}(u_i) = a_n \, . \, Q'_n(u_i)$

et : $\qquad f'(u_i) = \sum_{n \geq 1} a_n \, . \, Q'_n(u_i) .$

On peut remarquer que : si $\frac{a_n}{(u_n - u_o)\dots(u_n - u_i)}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour

$$\frac{a_n}{(u_n - u_o)\dots(u_n - u_j)} \quad , \quad \text{si } 0 \leq j \leq i$$

et donc les $f'(u_j)$ existent aussi.

PROPOSITION 2.1. - Si pour un entier $i \geq 0$ fixé, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o) \ldots (u_n - u_i)} = 0$ alors $f'(u_o)$, $f'(u_1) \ldots$ et $f'(u_i)$ existent et de plus

$$f'(u_j) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot Q'_n(u_j) \qquad 0 \leq j \leq i \ .$$

Inversement : si $f'(u_j)$ existe pour $0 \leq k \leq i$: $f'(u_i)$ existe $\Leftrightarrow$ φ_i prolongeable continûment à M ; $f'(u_j)$ existe, $0 \leq j < i$, $\Leftrightarrow$ φ_i dérivable au point u_j.

. Donc : $\lim_{x \to u_i} \varphi_i(x)$ existe, comme $P_i(u_i)$ est non nul, on en déduit d'après la définition de ψ_i que $\lim_{x \to u_i} \psi_i(x)$ existe.

$$\cdot \quad \psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x) - R_i(x)}{P_i(x)} = \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(u_j)}{(x-u_o) \ldots (x-u_j) \ldots (x-u_{i-1})} - \frac{R_i(x) - R_i(u_j)}{(x-u_o) \ldots (x-u_j) \ldots (x-u_{i-1})}$$

car $\varphi_i(u_j) = R_i(u_j)$ pour $0 \leq j < i$.

$\lim_{x \to u_j} \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(u_j)}{x - u_j}$ et $\lim_{x \to u_j} \frac{R_i(x) - R_i(u_j)}{x - u_j}$ existent, donc $\lim_{x \to u_j} \psi_i(x)$ existe pour $0 \leq j < i$.

Par conséquent ψ_i est prolongeable continûment à M, ce qui implique (cf [1]) que ses coefficients d'interpolation α_k^i sur la suite u^{i+1} tendent vers zéro lorsque k tend vers l'infini, et ceci est équivalent à :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o) \ldots (u_n - u_i)} = 0 \ .$$

Conclusion :

THEOREME 2.2. - L'entier naturel i étant fixé, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o) \ldots (u_n - u_i)} = 0$$

et

(b) $f'(u_o)$, $f'(u_1) \ldots$ et $f'(u_i)$ existent.

Dans ces conditions :

$$f'(u_j) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot Q'_n(u_j) \qquad 0 \leq j \leq i \ .$$

Etudions la condition (a) :

$$v\left(\frac{a_n}{(u_n-u_o)\dots(u_n-u_i)}\right) = v(a_n)+v(\pi).\{v_q((n-i-1)!)+v_q(i!)-v_q(n!)\}$$
$$- v_q(i!)\,v(\pi) .$$

D'après un lemme précédemment démontré ([3] et [4]) on sait que :

$$v_q((n-i-1)!)+v_q(i!) - v_q(n!) \geq 1-h(n) .$$

Par conséquent :

PROPOSITION 2.3. - Si $v(a_n)-h(n)\,v(\pi)$ tend vers l'infini avec n, f est dérivable en tous les points de la suite u.

Remarques

1) Si f est dérivable en tous les points de la suite u, les coefficients d'interpolation a'_r de f' sur cette suite sont définis :

$$a'_r = P_r(u_r) . \sum_{k=r}^{r} \frac{f'(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)} .$$

D'après ce qui précède, puisque $f'(u_k)$ existe pour tout k :

$$f'(u_k) = \sum_{n\geq 1} a_n\, Q'_n(u_k)$$

et

$$a'_r = \sum_{n\geq 1} a_n \beta^n_r$$

avec

$$\beta^n_r = P_r(u_r) \sum_{k=0}^{r} \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)} ,$$

β^n_r est aussi le $r+1^e$ coefficient d'interpolation sur la suite u du polynôme Q'_n de degré $n-1$, donc $\beta^n_r = 0$ si $r>n-1$ et ainsi :

$$a'_r = \sum_{n>r} a_n P_r(u_r) \sum_{k=0}^{r} \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

$$v.\left(\frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)}\right) = v(\pi)\, v_q\left(\frac{r!}{k!(r-k)!}\right) \geq 0$$

$$v(Q'_n(u_k)) = v(\pi)\,\{v_q(k!)+v_q((n-k-1)!)-v_q(n!)\} \geq (1-h(n))\,v(\pi)$$

donc :

$$v(\beta_r^n) \geq (1-h(n)\ v(\pi)$$

et

$$v(a'_r) \geq \operatorname*{Inf}_{n>r} (v(a_n) + (1-h(n))\ v(\pi)) \ . \qquad 2.4$$

2) <u>Etude de</u> $Q'_n(x)$

Si $i<n$,

$$Q'_n(u_i) = \frac{(u_i-u_o)\ldots(u_i-u_{i-1})(u_i-u_{i+1})\ldots(u_i-u_{n-1})}{(u_n-u_o)\ldots(u_n-u_{n-1})}$$

$$v(Q'_n(u_i)) = v(\pi).\ \{v_q(i!)+v_q((n-i-1)!)-v_q(n!)\} \geq (1-h(n))\ v(\pi)$$

et l'égalité est réalisée si et seulement si " i est bon pour n " ([3] et [4]).

Si $x \notin \{u_o, \ldots, u_{i-1}\}$,

$$Q'_n(x) = Q_n(x)\ .\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x-u_i} \ .$$

On avait défini $N'(x,n) = \sup_{i<n} \dfrac{v(x-u_i)}{v(\pi)}$ ([3] et [4]) , alors :

$$v\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x-u_i}\Big) \geq -N'\ v(\pi) \ .$$

D'autre part on avait vu ([3] et [4]) que :

$$v(Q_n(x)) \geq \{N' + (1-h(n))\}\ v(\pi)$$

on en déduit donc que :

$$v(Q'_n(x)) \geq (1-h(n))\ v(\pi) \ , \quad x \notin \{u_o, \ldots, u_{i-1}\} \ ,$$

et par conséquent :

$$2.5. \qquad \operatorname*{Inf}_{x\in M} \{v(Q'_n(x))\} = (1-h(n))\ v(\pi) = \operatorname*{Min}_{0\leq r\leq n-1} v(\beta_r^n) \ .$$

3) Si $v(x-y) \geq \{h(n)-1)\}\ v(\pi)$, d'après [3] et [4] :

$$v\Big(\frac{Q_n(x) - Q_n(y)}{x - y}\Big) \geq (1-h(n))\ v(\pi) \ ;$$

si $v(x-y) < \{h(n)-1\} v(\pi)$,

$$v(Q_n(x)-Q_n(y)) \geq 0 > v(x-y) + (1-h(n))\, v(\pi)$$

donc :

$$2.\,6. \qquad \forall x\ \forall y \in M \qquad v\left(\frac{Q_n(x)-Q_n(y)}{x-y}\right) \geq (1-h(n))\, v(\pi)$$

l'égalité pouvant être réalisée ([3] et [4]), c'est-à-dire que :

$$\operatorname*{Inf}_{(x,y)\in M^2} \left(v\left(\frac{Q_n(x)-Q_n(y)}{x-y}\right)\right) = (1-h(n))\, v(\pi) .$$

4) <u>On peut aussi étudier</u> $Q_n^{(k)}(x)$:

si $x \notin \{u_o, \dots, u_{n-1}\}$,

$$Q_n^{(k)}(x) = Q_n(x) \, . \, \Sigma_k \quad \text{où} \quad \Sigma_k = \sum_{\substack{\text{pour } i_1 \dots i_k \\ \text{tous différents } \in \{0,\dots,n-1\}}} \frac{1}{(x-u_{i_1})\dots(x-u_{i_k})}$$

$$v(\Sigma_k) \geq -k\, N'\, v(\pi)$$

$$v(Q_n(x)) \geq (N'+1-h(n))\, v(\pi) .$$

On avait posé $\rho = \inf\{ j,\ v(x-u_j) = N'\, v(\pi) \}$ ([3] et [4]) si $N' = h(n)-1$,

$$v(Q_n^{(k)}(x) \geq k(1-h(n))\, v(\pi) \quad ;$$

si $N' \geq h(n)$, alors :

$$v(x-u_\rho) = N'\, v(\pi)$$

et $\quad \forall i \neq \rho ,\ 0 \leq i < n \qquad v(x-u_i) \leq (h-1)\, v(\pi)$

et : $\qquad v((x-u_\rho)(x-u_{i_1})\dots(x-u_{i_{k-1}})) \leq \{ N'+(k-1)(h-1) \}\, v(\pi)$

$i_j \neq \rho$: $\qquad v((x-u_{i_1})\dots(x-u_{i_k})) \leq k\,(h-1)\, v(\pi) .$

D'où :

$$v(\Sigma_k) \geq \{-N' + (k-1)(1-h(n))\} v(\pi)$$

et
$$v(Q_n^{(k)}(x)) \geq k(1-h(n)) v(\pi) .$$

Cette inégalité est conservée en $x = u_i$. Donc :

2. 7. $$\operatorname*{Inf}_{x \in M} v(Q_n^{(k)}(x)) \geq k(1-h(n)). v(\pi) .$$

On déduit de ces remarques que :

2. 8. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $v(a_n) - h(n) v(\pi) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$;

(ii) $a_n Q'_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, uniformément par rapport à x appartenant à M ; c'est-à-dire que la série $\sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(x)$ est uniformément convergente sur M ;

(iii) la famille $(a_n Q'_n(u_i))_{\substack{n, i \\ i<n}}$ est sommable ;

(iv) la famille $(a_n \beta_r^n Q_r(x))_{r<n}$ est uniformément sommable sur M .

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) d'après 2. 5.

Comme $v(Q'_n(u_i)) = (1-h(n)) v(\pi)$ lorsque " i est bon pour n " , (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) car : $\operatorname*{Inf}_{\substack{r<n \\ x \in M}} v(a_n \beta_r^n Q_r(x)) = v(a_n) + (1-h(n)) v(\pi)$

en raison de 2. 5. et du fait que $\operatorname*{Inf}_{x \in M} Q_r(x) = 0$ ([3] et [4]).

3. - DERIVABILITE DE f EN UN POINT x_o DE M , $x_o \notin u$

L'application $\Phi_{x_o} : z \to \dfrac{f(z) - f(x_o)}{z - x_o}$ est définie et continue dans $M - \{x_o\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f'(x_o)$ existe est que l'application Φ_{x_o} soit prolongeable continûment à M .

Cette application Φ_{x_o} est définie en tous les points de la suite u ; on peut donc construire les coefficients d'interpolation $a_n(x_o)$ de $\Phi(x_o)$ sur la suite u :

$$a_n(x_o) = P_n(u_n) . \sum_{k=0}^{n} \frac{f(u_k) - f(x_o)}{(u_k - x_o) P'_{n+1}(u_k)} .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_{x_o} soit prolongeable continûment à M est que $\lim_{n\to\infty} a_n(x_o) = 0$ ([1]) ; et c'est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $f'(x_o)$ existe.

$$a_n(x_o) = \sum_{i\geq 1} a_i . P_n(u_n) . \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_o)}{(u_k - x_o) . P'_{n+1}(u_k)}$$

$a_n^i(x_o) = P_n(u_n) \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_o)}{(u_k - x_o) P'_{n+1}(u_k)}$ est le $n+1^e$ coefficient d'interpolation sur la suite u du polynôme $\frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_o)}{u_k - x_o}$ de degré i-1 , donc $a_n^i(x_o) = 0$ si $n \geq i$, et par suite :

$$a_n(x_o) = \sum_{i > n} a_i \, a_n^i(x_o)$$

mais d'après 2. 6.

$$v(a_n^i(x_o)) \geq (1 - h(i)) \, v(\pi) \quad ,$$

donc :

$$v(a_n(x_o)) \geq \text{Inf} \, \{ v(a_i) + (1 - h(i)) \, v(\pi) \} .$$

<u>Conclusion</u> :

3. 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable au point x_o est que $\lim_{n\to\infty} a_n(x_o) = 0$.

Une condition suffisante est que $v(a_i) - h(i) \, v(\pi)$ tende vers l'infini avec i .

En comparant avec 2. 3. on en déduit que :

3. 2. Si $v(a_n) - h(n) \, v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , ou si l'une des conditions 2. 8. est réalisée, f est dérivable dans M .

4. - FONCTIONS UNIFORMEMENT DERIVABLES DANS M

DEFINITION. - f uniformément dérivable dans M : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$ tel que $\forall x \in M \ \forall z \in M$ tels que $|z-x| < \delta(\varepsilon)$, on ait :

$$\left| \frac{f(z)-f(x)}{z-x} - f'(x) \right| < \varepsilon .$$

Si f *est uniformément dérivable dans* M , *alors* f' *est continue dans* M .

En effet :

$$|z-x| < \delta(x) \ , \ z, x \in M \Rightarrow |f'(z) - f'(x)| < \varepsilon .$$

Soit alors $f \in \mathcal{C}(M, A)$. L'application φ :

$$(z,x) \to \varphi(z,x) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

est définie et continue dans $M \times M - \Delta$, si $\Delta = \{(x,x) \ , \ x \in M\}$.

La propriété : f est dérivable au point x est équivalente à : la limite de $\varphi(z,x)$ lorsque z tend vers x existe.

PROPOSITION 4.1. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit uniformément dérivable dans* M *est que l'application* φ

$$x \neq z \ , \quad (z,x) \to \varphi(z,x) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

soit prolongeable continûment à $M \times M$.

- Si f est uniformément dérivable dans M , considérons le prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ à $M \times M$ défini par :

$$\tilde{\varphi}(z,x) = \varphi(z,x) \qquad z \neq x$$

$$\tilde{\varphi}(x,x) = f'(x)$$

$\tilde{\varphi}$ est continue dans $M \times M - \Delta$. En un point (x_o, x_o) de Δ :

$$\tilde{\varphi}(z,x) - \tilde{\varphi}(x_o, x_o) = \tilde{\varphi}(z,x) - f'(x) + f'(x) - f'(x_o)$$

si $z = x$ on obtient $f'(x) - f'(x_o)$.

Si $|x-x_o| < \delta(\varepsilon)$ et si $|z-x_o| < \delta(\varepsilon)$, alors $|\tilde{\varphi}(z,x) - \tilde{\varphi}(x_o, x_o)| < \varepsilon$.

$\tilde{\varphi}$ est donc continue dans $M \times M$.

- Si φ est prolongeable continûment à $M \times M$; alors $\tilde{\varphi}(x,x) = f'(x)$ f' est alors définie et continue dans M :

$$\tilde{\varphi}(z,x) - \tilde{\varphi}(x,x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - f'(x)$$

$\tilde{\varphi}$ est uniformément continue sur $M \times M$ et donc f est uniformément dérivable dans M .

Recherche de conditions pour que f soit uniformément dérivable

La suite $(u_n , u_r)_{\substack{n \geq 0 \\ r \geq 0}}$ est TBR dans $M \times M$ et les polynômes $Q_n(x) . Q_r(z)$ constituent une base normale de $\mathcal{C}(M \times M, K)$ ([1]) ; c'est-à-dire que :

si $F \in \mathcal{C}(M \times M, K)$, $F(z,x) = \sum_{n,r} \lambda_{n,r} Q_n(x) Q_r(z)$

où : $$\lambda_{n,r} = P_n(u_n). P_r(u_r) . \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{F(u_k, u_m)}{P'_{r+1}(u_k) P'_{n+1}(u_m)} .$$

L'application φ est en particulier définie aux points (u_i , u_j) pour $i \neq j$. Elle est prolongeable continûment aux points (u_i, u_i) , $i \geq 0$, si et seulement si f est dérivable en tous les points u_i , c'est-à-dire si et seulement si :

$$\text{pour chaque } i \geq 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o) \ldots (u_n - u_i)} = 0 .$$

Supposons qu'il en soit ainsi ; φ est alors définie en tous les points (u_k , u_m) et on peut considérer ses coefficients d'interpolation $\lambda_{n,r}$.

$$\lambda_{n,r} = \sum_{\substack{0 \le k \le r \\ 0 \le m \le n}} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)} \cdot \frac{f(u_k) - f(u_m)}{u_k - u_m}$$

$$= \sum_{j \ge 1} a_j \Big(\sum_{\substack{0 \le k \le r \\ 0 \le m \le n}} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)} \cdot \frac{Q_j(u_k) - Q_j(u_m)}{u_k - u_m} \Big)$$

$$= \sum_{j \ge 1} a_j \, \lambda^j_{n,r} \, .$$

$\lambda^j_{n,r}$ est le coefficient d'interpolation de rang (n, r) relativement à la suite (u_n, u_r) pour le polynôme :

$$(z, x) \to \frac{Q_j(z) - Q_j(x)}{z - x}$$

avec $\qquad (x, x) \to Q'_j(x)$.

On en déduit d'abord que $\lambda^j_{n,r} = 0$ si $j \le n+r$.

Si $j > n+r$, pour $k \ne m$, $0 \le k \le r$ $\quad Q_j(u_k) = 0$ car $j > k$

$0 \le m \le n$ $\quad Q_j(u_n) = 0$ car $j > n$,

donc, pour $j > n+r$:

$$\lambda^j_{n,r} = \sum_{0 \le m \le \inf(r,n)} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \, \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_m)} \, Q'_j(u_m)$$

et ainsi :

$$\lambda_{n,r} = \sum_{j > n+r} a_j \, \lambda^j_{n,r} \, .$$

Pour que φ soit prolongeable continûment à $M \times M$, il faut et il suffit ([1]) que : $\lambda_{n,r} \to 0$ quand $\sup(n, r) \to +\infty$.

Conclusion :

4.2. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément dérivable dans M est que :

(1) pour chaque $i \geq 0$ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_o) \dots (u_n - u_i)} = 0$

et

(2) $\lambda_{n,r} \to 0$ quand $\sup(n, r) \to +\infty$.

$$\lambda_{n,r} = \sum_{j > n+r} a_j \Big(\sum_{0 \leq m \leq \inf(r,n)} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_m)} Q'_j(u_m) \Big) .$$

$$v(\lambda^j_{n,r}) \geq \operatorname*{Inf}_{m \leq \inf(n,r)} v(Q'_j(u_n)) \geq \{1 - h(j)\} \, v(\pi) .$$

Si l'une des conditions 2. 8. est réalisée, f est uniformément dérivable dans M. Dans ce cas étudions la dérivée $f'(x)$; on a vu que les coefficients d'interpolation a'_r de f' sur la suite u sont :

$$a'_r = \sum_{n > r} a_n \beta^n_r \quad , \quad \beta^n_r = P_r(u_r) \sum_{k=0}^{r} \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

avec $Q'_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta^n_r Q_r(x)$, et :

$$f'(x) = \sum_{r \geq 0} a'_r Q_r(x) = \sum_{r \geq 0} \Big(\sum_{n > r} a_n \beta^n_r \Big) . Q_r(x) .$$

Les conditions 2. 8. étant réalisées la famille $(a_n \beta^n_r Q_r(x))_{n,r}$ est uniformément sommable et donc :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(x) .$$

THEOREME 4. 3. - Soit $f \in \mathcal{C}(M, A)$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ sa série d'interpolation sur une suite TBR BO dans M, si pour $n \geq 1$ on note $h(n)$ l'entier tel que :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)} .$$

Si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

2. 8. (i) $v(a_n) - h(n) \, v(\pi) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$

(ii) $a_n Q'_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, uniformément par rapport à $x \in M$

(iii) <u>la famille</u> $(a_n Q'_n(u_i))_{0\leq i<n}$ <u>est sommable</u>

(iv) <u>la famille</u> $(a_n \beta_r^n Q_r(x))_{r<n}$ <u>est uniformément sommable sur</u> M ,

$$\beta_r^n = P_r(u_r) \sum_{k=0}^{r} \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

alors f est uniformément dérivable dans M , et :

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n Q'_n(x) = \sum_{r\geq 0} a'_r Q_r(x)$$

$$a'_r = \sum_{n>r} a_n \beta_r^n = \sum_{n>r} a_n . \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}\right) .$$

5. - DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

$$v(a'_r) \geq \operatorname*{Inf}_{n>r} \{v(a_n) - h(n)\, v(\pi)\} .$$

si $v(a_n) - m\,h(n)\,v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , pour m entier ≥ 2 , alors $v(a'_r) - (m-1)\,h(r)\,v(\pi)$ tend vers l'infini avec r et f' est uniformément dérivable dans M .

Par récurrence sur m on obtient le résultat suivant :

5. 1. Si $v(a_n) - m\,h(n)\,v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , alors f est m fois dérivable, et $f, f', \dots, f^{(m-1)}$ sont uniformément dérivables dans M .

6. - CAS PARTICULIER : SI M EST TEL QUE $q_i = q \ \forall i \geq 1$

Alors pour un entier positif n : $h(n) - 1 = [\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} q}]$; posons :

$$D = - \frac{\operatorname{Log} |\pi|}{\operatorname{Log} q}$$

$$|x| = |\pi|^{v(x)/v(\pi)}$$

$$v(a_n) - h(n).\, v(\pi) \geq c.\, v(\pi) \Leftrightarrow v(a_n) - \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} q}\, v(\pi) \geq c' v(\pi)$$

$$\Leftrightarrow |a_n| .\, n^D \leq K' .$$

On en déduit l'expression suivante des résultats précédents :

$$n^D |a_n| \leq K' \Leftrightarrow f \text{ Lipschitzienne dans } M$$

$$n^D |a_n| \to 0 \Rightarrow f \text{ uniformément dérivable}$$

$$n^{mD} |a_n| \to 0 \Rightarrow f \text{ m fois uniformément dérivable.}$$

Exemples :

1) Si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ de degré S , et si on normalise la valeur absolue par :

$$|\pi| = (\frac{1}{p})^{1/e} \qquad e \text{ indice de ramification}$$

$$q = p^f \;,\; D = -\frac{\operatorname{Log}|\pi|}{\operatorname{Log} q} = \frac{1}{e\,f} = \frac{1}{S} \;.$$

2) Si $K = \mathbb{Q}_p$ et si la valuation est normalisée par $\pi = p$ $|\pi| = \frac{1}{p}$, alors pour $M = \mathbb{Z}_p$, $q = p$, $D = 1$.

Lorsqu'on prend comme suite u la suite des entiers naturels : $u_n = n$ on retrouve les résultats de K. Mahler ([8]) :

$$a'_r = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a_{n+r} \;.$$

D'autre part d'après [5] et J. Hily ([7]) :

$$\frac{f(x+y+1) - f(x)}{y+1} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ r \geq 0}} \frac{a_{n+1+r}}{n+1} Q_r(x) . Q_n(y) \;;$$

une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément dérivable est que l'application :

$$(x, y) \to \frac{f(x+y+1) - f(x)}{y-1}$$

soit continûment prolongeable à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, et pour cela il faut et il suffit que :

$$\frac{a_{n+r}}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \sup(n, r) \to +\infty .$$

Si $v(a_n) - h(n) \to +\infty$ ceci est réalisé.

Si $\frac{a_{n+r}}{n} \to 0$ quand $\sup(n, r) \to +\infty$, considérons :

$$n(h) = \inf\{n\ ,\ p^{h-1} \leq n < p^h\ ,\ v(a_{n(h)}) = \inf_{p^{h-1} \leq n < p^h} v(a_n)\},$$

alors :

$$\frac{a_{n(h)}}{p^{h-1}} \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to \infty\ ,$$

$$v(a_{n(h)}) - h \to +\infty \quad \text{avec} \quad h\ ,$$

et par conséquent $v(a_n) - h(n) \to +\infty$ avec n ; ce qui est équivalent à :

$$n\,|a_n| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\ .$$

En récapitulant les résultats obtenus pour $\mathbb{Z}_p$:

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$, $f(x) = \Sigma\ a_n \binom{x}{n}$,

$n|a_n| \leq K \Leftrightarrow$ f Lipschitzienne dans $\mathbb{Z}_p$,

$n\,|a_n| \to 0$ quand $n + \infty \Leftrightarrow$ f uniformément dérivable dans $\mathbb{Z}_p$,

$m \geq 2$, $n^m\,|a_n| \to 0$ quand $n \to +\infty \Rightarrow$ f n fois uniformément dérivable dans $\mathbb{Z}_p$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE. - Bull. Soc. Math. Fr., 92, 1964, p. 117-180. (Thèse Math, Paris, 1963).

[2] Y. AMICE et J. FRESNEL. - Fonctions zêta p-adique des corps de nombres abéliens et formule des résidus pour le nombre de classes d'idéaux (Acta Arithmetica 20, n° 4).

[3] E. HELSMOORTEL. - Module de continuité de polynômes d'interpolation. Application à l'étude du comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C.R.A.S., 268, série A, 1969, p. 1168-1171.

[4] E. HELSMOORTEL. - Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1968/69, n° 10.

[5] E. HELSMOORTEL. - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C.R.A.S. 271, série A, 1970, p. 546.

[6] E. HELSMOORTEL. - Module de continuité des polynômes binomiaux dans $\mathbb{Z}_p$, application aux fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$. Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, exposé n° 5, 1968-69.

[7] J. HILY. - Comptes Rendus Académie des Sciences, 256, 1963, p. 2985.

[8] K. MAHLER. - J. Reine Angew. Math. 199, 1958, p. 23-34.

-:-:-:-

U.E.R. de Mathématiques
et d'Informaituqe
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE