

PIERRE DAMEY

**Extensions quaternioniennes d'un corps de caractéristique
différente de 2**

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 3, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971___A3_0

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXTENSIONS QUATERNIONIENNES D'UN CORPS
DE CARACTERISTIQUE DIFFERENTE DE 2

par

Pierre DAMEY

-:-:-:-

§. I. - DEFINITION DES GROUPES O_q ET D_q

Si $q = 2^{n-1}$ est une puissance de 2, on définit les groupes diédraux D_q et quaternioniens généralisés O_q par 2 générateurs et les relations :

$$\begin{aligned} D_q &: \tau^2 = 1, \sigma^q = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \\ O_q &: \tau^2 = \sigma^{q/2}, \sigma^q = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \end{aligned}$$

§. II. - EXTENSIONS QUATERNIONIENNES

Soit $k = \kappa(\sqrt{m})$ une extension quadratique d'un corps κ de caractéristique différente de 2. Peut-on trouver une extension N cyclique de degré $q = 2^{n-1}$ sur k , galoisienne sur κ , à groupe de Galois isomorphe à l'un des 2 groupes O_q ou D_q ?

On dira que l'on a plongé k dans une extension quaternionienne (ou diédrale).

PROPRIETE. - Si N (resp. N') est une extension quaternionnienne (resp. diédrale) de κ , cyclique sur k , de degré 2^n (resp. $2^{n'}$) sur κ avec $n < n'$, alors quel que soit m tel que $n \leq m \leq n'$, le composé $N(N')$ contient une extension quaternionnienne de degré 2^m , cyclique sur k .

Pour la démontrer, il suffit de considérer le groupe $\text{Gal}(N(N')/\kappa)$.

§. III. - EXISTENCE ET CONSTRUCTION DANS LE CAS OU LE CORPS κ CONTIENT LES RACINES q -ième DE L'UNITE

Une étude simple conduit au théorème suivant :

THEOREME. - Soit $k = \kappa(\sqrt{m})$ une extension quadratique de κ , le corps $N = k(\sqrt[q]{\alpha})$ est une extension diédrale (resp. quaternionnienne) sur κ , si et seulement si $N_{k|\kappa}(\alpha) = a^q$ (resp. $N_{k|\kappa}(\alpha) = m^{q/2} a^q$) où $a \in \kappa^*$ et $\alpha \notin k^2$.

L'utilisation du théorème 90 montre que l'on a alors

$$\alpha = a^{q/2} \frac{\mu}{\mu^\tau} \quad (\text{resp. } \alpha = m^{q/4} a^{q/2} \frac{\mu}{\mu^\tau})$$

où $\mu \in k$ et τ désigne le κ -automorphisme de k autre que l'identité.

On en déduit le théorème d'existence :

Le corps $k = \kappa(\sqrt{m})$ se plonge dans une extension quaternionnienne (resp. diédrale) si et seulement si il existe $\mu \in k$ de norme non carré dans k .

Exemple : $\kappa = \mathbb{C}(t)$ (où $\kappa = E(t)$ avec E algébriquement clos).

On peut montrer que :

PROPRIETE. - $\forall m \in \mathbb{C}(t) - (\mathbb{C}(t))^2$, $N(k^*)/\kappa^{*2}$ est un groupe infini.

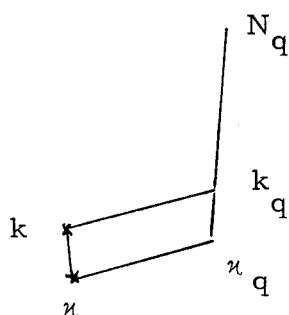
Ce résultat implique que toute extension k quadratique de κ se plonge

dans une infinité d'extensions quaternioniennes linéairement disjointe sur k .

§. IV. - IDEE DE LA METHODE DANS LE CAS GENERAL

Notation : si L désigne un corps, L_q désigne le corps obtenu par adjonction à L des racines q -ièmes de l'unité.

On utilise le diagramme suivant :



On cherche une extension N_q cyclique sur k_q quaternionienne sur nu_q , contenant une extension quaternionienne sur nu et cyclique sur k .

Exemple : Dans le cas $k \times nu_q = nu$, on cherche $\alpha \in k_q$ tel que l'extension $N_q = k_q(\sqrt[q]{\alpha})$ soit galoisienne sur nu avec $\text{Gal}(N_q/nu)$ isomorphe au produit direct $\text{Gal}(nu_q/nu)$ par O_q .

§. V. - CAS PARTICULIER $nu = \mathbb{Q}_p$

a) $p \equiv 1 \pmod{4}$

\mathbb{Q}_p ne se plonge pas dans une extension quaternionienne de degré 8 sur \mathbb{Q}_p . En effet, pour toute extension quadratique k de \mathbb{Q}_p on a $N(k) \subset k^2$. Il en résulte qu'il n'y a pas d'extension quaternionienne ni diédrale sur \mathbb{Q}_p .

b) $p \equiv -1 \pmod{4}$

On montre que nécessairement $k = \mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ et de plus :

$\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ ne se plonge dans une extension quaternionienne ou diédrale de degré $2q$ sur \mathbb{Q}_p si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{q}$.

c) $p = 2$

On a le résultat suivant :

Si $k \neq \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, k se plonge dans des extensions diédrales (resp. quaternioniennes) de degré 8 et 16 sur \mathbb{Q}_2 .

Si $k = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, k se plonge dans des extensions quaternioniennes de degré 16, mais pas de degré 8, sur \mathbb{Q}_2 .

Remarque : En utilisant la localisation (i. e. en complétant par rapport à une valeur absolue), on en déduit des résultats pour le cas $x = \mathbb{Q}$:

Le corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ne se plonge pas dans une extension quaternionienne de degré 8 sur \mathbb{Q} si m est négatif ou si $m \equiv -1 \pmod{8}$.

Pour le voir il suffit de compléter soit par rapport à la valeur absolue usuelle, soit par rapport à la valuation 2-adique.

-:-:-

REFERENCES

P. DAMEY et J. J. PAYAN. - J. Reine angew. Math. Bd 244, 1970,
S. 37-54.

P. DAMEY. - C. R. A. S., t. 269, p. 503-506.

-:-:-

Pierre DAMEY
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33 - TALENCE