SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN FRESNEL

Valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 25, p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A25_0>

VALEURS DES FONCTIONS ZETA AUX ENTIERS NEGATIFS

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-

§. 0. - INTRODUCTION

Si ζ est la fonction zêta de Riemann on sait que pour tout entier k positif

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}$$

où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli. Rappelons que ces nombres (qui sont rationnels) sont définis par la relation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{avec } B_o = 1$$

on a en particulier $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$ et $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$ ...

Si K est un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{X}(K)$ l'ensemble des caractères primitifs du corps K , soit $\chi \in \mathfrak{X}(K)$ et $L(.\,,\chi)$ la fonction L de Dirichlet associée au caractère χ définie par

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}$$

on sait alors que la fonction zêta du corps K se factorise sous la forme

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}(K)} L(s,\chi) .$$

D'autre part on a pour tout entier m positif

$$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m}$$

où $B^m(\chi)$ est le m-ième nombre de Bernoulli relatif au caractère primitif χ . Ceux-ci sont définis par la relation de récurrence [3], [5], [14]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B^i(\chi) f(\chi)^{n+1-i} = (n+1) \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a) a^n$$

où $f(\chi)$ est le conducteur du caractère χ et où $B^o(\chi) = 0$ si χ n'est pas le caractère trivial $B^o(\varepsilon) = 1$ sinon.

Ces nombres sont algébriques et appartiennent au corps $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(1), \chi(2), \dots, \chi(f))$. On déduit tout d'abord que

$$\zeta_K(1-m) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}(K)} \left(-\frac{B^m(\chi)}{m}\right)$$

est un nombre algébrique, il est même assez aisé de voir que ce nombre est rationnel (en mettant en évidence des normes d'éléments).

En 1924 [9] Hecke avait conjecturé que pour tout corps de nombres totalement réel K le nombre $\zeta_K(1-2k)$ est rationnel (si K n'est pas totalement réel on a $\zeta_K(1-k) = 0$ quel que soit l'entier $k > 0$). Cette conjecture a été démontrée en 1927 par Siegel [19]. En 1962, Klingen [10] en a donné une démonstration en utilisant la théorie des formes modulaires de Hilbert. Contrairement au cas abélien, en général [2], [20], pour un corps de nombres totalement réel quelconque on n'a pas de formules qui donnent explicitement (par des relations de récurrence par exemple) les valeurs de la fonction zêta sur les entiers négatifs.

Une bonne connaissance des nombres rationnels $\zeta_K(1-2k)$ (divisibilité du dénominateur, congruences entre ces nombres) permettrait de résoudre les conjectures exposées au paragraphe I. Au paragraphe II, on démontre que $\zeta_K(1-2n, \mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est une classe d'idéaux modulo les idéaux principaux est un nombre rationnel en exprimant selon la méthode de Klingen $\zeta_K(1-2n, \chi)$ comme le terme constant du développement en série de Fourier d'une forme modulaire de Hilbert (à plusieurs variables). Le reste de la démonstration repose sur un article de Siegel [21] qui étudie les formes modulaires à une variable à coefficients de Fourier rationnels. Ensuite nous explicitons au paragraphe III les nombres rationnels $\zeta_K(1-2n)$ lorsque K est un corps de nombres abélien et l'on démontre pour ces corps les conjectures du paragraphe I.

§. I. - CONJECTURES SUR LES VALEURS DE LA FONCTION ZETA D'UN CORPS DE NOMBRES AUX ENTIERS NEGATIFS

Le théorème de Clausen-Staudt détermine le dénominateur de $\frac{B_n}{n}$ où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli ordinaire. Soit n un entier pair, ℓ un nombre premier et ω_ℓ la valuation ℓ-adique, alors :

si $(\ell-1) \nmid n$, on a : $\omega_\ell(\frac{B_n}{n}) \geq 0$

si $(\ell-1) \mid n$, on a : $\omega_\ell(\frac{B_n}{n}) = \omega_\ell(\ell n)$.

Le petit théorème de Fermat implique aussitôt que pour tout nombre premier $p \neq \ell$ on a

$$\omega_\ell(\frac{1}{2}(p^n-1)\frac{B_n}{n}) \geq 0 \ .$$

Ce qui peut aussi se lire : pour tout nombre premier $\ell \neq p$, on a

$$\omega_\ell(\frac{1}{2}(p^n-1)\frac{B_n}{n}) \geq 0 \ ,$$

soit donc

$$\frac{1}{2}(p^n-1)\frac{B_n}{n} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \ ,$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(p^n-1)\,\zeta(1-n) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \ .$$

On conjecture un résultat analogue pour un corps de nombres totalement réel.

CONJECTURE 1. (Serre [18]) - Soit K un corps de nombres totalement réel, ζ_K sa fonction zêta et $N_{K|\mathbb{Q}}$ la norme absolue de K. Alors pour tout idéal premier de K, $\mathfrak{p}|p$ et pour tout entier pair $n \geq 2$, on a :

$$(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n - 1)\, \zeta_K(1-n)\, 2^{-d^oK} \in \mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{p}] .$$

Autrement dit, soit ℓ un nombre premier et $\ell^{\mu(\ell)}$ la plus grande puissance de ℓ divisant tous les entiers $(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n - 1)$ pour tout $\mathfrak{p} \nmid \ell$; alors $\prod_\ell \ell^{\mu(\ell)}\, \zeta_K(1-n)\, 2^{-d^oK} \in \mathbb{Z}$. On peut calculer explicitement les $\mu(\ell)$ en fonction des degrés de certaines extensions cyclotomiques de K.

Soit ℓ un nombre premier $\ell \neq 2$ (resp. $\ell = 2$), on note $\nu(\ell)$ le plus grand entier $i \geq 1$ (resp. $i \geq 2$) tel que $K(\sqrt[\ell]{1}) = K(\sqrt[\ell^i]{1})$ (resp. $K(\sqrt[4]{1}) = K(\sqrt[2^i]{1})$). Si $K(\ell) = K \cap (\bigcup_{u=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^u]{1})$ on a $K(\ell) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)}]{1})$ et $K(\ell) \not\subset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)-1}]{1})$. Soit $\ell \neq 2$, $\delta = [K(\sqrt[\ell]{1}) : K]$, ζ une racine primitive $\ell^{\nu(\ell)}$ de l'unité, ρ un entier racine primitive δ-ième de l'unité modulo $\ell^{\nu(\ell)}$. Soit $\mathfrak{p} \nmid \ell$ un idéal premier de K et $q = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$. Soit $\zeta \to \zeta^{\rho^i}$ où $i|\delta$ l'automorphisme de Frobénius $\left[\frac{K(\sqrt[\ell]{1})|K}{\mathfrak{p}}\right]$. On a donc $\zeta^q = \zeta^{\rho^i}$ ou encore $\frac{\delta}{i}$ = ordre de q modulo $\ell^{\nu(\ell)}$. Donc $\ell^{\nu(\ell)} | q^{\delta} - 1$. D'après le théorème de Tchebotareff il existe une infinité de $\mathfrak{p}$ tels que $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$ est d'ordre δ modulo $\ell^{\nu(\ell)}$. De plus il existe une infinité de $\mathfrak{p}$ tels que $\ell^{\nu(\ell)} \| N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{\delta} - 1$. Sinon $\ell^{\nu(\ell)+1} | N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{\delta} - 1$ sauf pour un nombre fini de $\mathfrak{p}$ et l'on aurait $\ell^{\nu(\ell)+1} | (N_{K(\sqrt[\ell]{1})|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n} - 1)$ sauf pour un nombre fini de premiers de $K(\sqrt[\ell]{1})$ et par suite l'extension cyclique de degré ℓ, $K(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)+1}]{1})$ sur $K(\sqrt[\ell]{1})$ aurait un indice d'inertie égal à 1 sauf pour un nombre fini de premiers ce qui est impossible en vertu du théorème de Tchebotareff.

Si $\ell = 2$, on a $q \equiv \pm 1 \mod 2^{\nu(2)}$, il est alors aisé de voir qu'il existe une infinité de premiers tels que $2^{\nu(2)} \| q - 1$.

Soit $n \geq 2$ un entier pair, ℓ un nombre premier, alors :

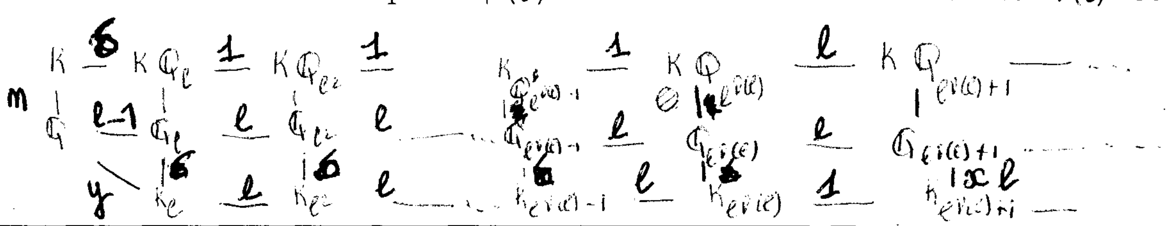
$$(0) \quad \begin{cases} \text{si } \delta \nmid n & \min_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \omega_\ell (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n - 1) = 0 \\ \text{si } \delta | n & \min_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \omega_\ell (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n - 1) = \nu(\ell) + \omega_\ell(n) . \end{cases}$$

Par conséquent $\mu(\ell)$ est déterminé en fonction de $\nu(\ell)$ et de δ.

$Q_{\ell^i} = Q(\sqrt[\ell^i]{1})$

$\delta y = (\ell - 1)$

$y\ \ell^{\nu(\ell)-1} | n$



$K_{\ell^i} = Q_{\ell^i} \cap K$

La conjecture 1 est satisfaite lorsque le corps K est abélien (théorème 4 du paragraphe II). De plus pour $n = 2$ elle est satisfaite pour tout corps de nombres totalement réel [7], [8], [18] .

La conjecture 1 permettrait alors d'obtenir le résultat suivant :

COROLLAIRE DE LA CONJECTURE 1. - Soit K un corps de nombres totalement réel tel que pour tout nombre premier $\ell \neq 2$ et pour tout entier $\mu \geq 1$, on ait $K \cap \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^\mu]{1}) = \mathbb{Q}$. Alors pour tout entier pair $n \geq 2$, on a

$$\frac{\text{dénominateur de } \zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)}{\text{dénominateur de } \zeta_K(1-n)} \in 2^{d^o K - \nu(2)+1} \mathbb{Z} .$$

La conjecture 1 ne donne pas de renseignements sur le numérateur de $\zeta_K(1-n)$ (de tels renseignements seraient bien difficiles à obtenir sachant que l'on ne connaît même pas le numérateur de $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)$), mais on est tenté de supposer que le numérateur de $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)$ divise celui de $\zeta_K(1-n)$, plus précisément on conjecture :

CONJECTURE 2. - Soit K un corps de nombres totalement réel tel que pour tout nombre premier $\ell \neq 2$ et pour tout entier $\mu \geq 1$, on ait $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell^\mu]{1}) \cap K = \mathbb{Q}$. Alors pour tout entier pair $n \geq 2$ on a

$$\frac{\zeta_K(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)} \in 2^{d^o K - \nu(2)+1} \mathbb{Z} .$$

Cette conjecture est satisfaite lorsque K est abélien sur $\mathbb{Q}$, c'est le théorème 4 du paragraphe II. Elle est aussi satisfaite pour tout corps K lorsque $n = 2$ [7], [8], [18]. Elle a été vérifiée numériquement pour certains corps cubiques ([4]).

Ces deux conjectures permettent de majorer le dénominateur de $\zeta_K(1-n)$ et d'en comparer le numérateur avec celui de $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)$. On conjecture [6], [18] dans un autre ordre d'idée que les valeurs $\zeta_K(1-n)$ vérifient certaines congruences (analogues à celles de Kummer vérifiées par les B_n/n) ou en d'autres termes qu'il existe des fonctions zêta p-adiques pour un corps de nombres abélien totalement réel.

CONJECTURE 3. - Soit K un corps de nombres totalement réel. Alors la fonction

$$(1-n) \mapsto \prod_{\mathfrak{p}|p} (1-N(\mathfrak{p})^{n-1}) \zeta_K(1-n)$$

définie pour $n > 0$ et $n \equiv 0 \mod (p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. $n \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$) est prolongeable à $\mathbb{Z}_p$ en une fonction méromorphe ayant un seul pôle, celui-ci étant simple et en 1.

Il revient au même de conjecturer que la fonction

$$(1) \qquad (1-n) \mapsto \frac{\prod_{\mathfrak{p}|p} (1-N(\mathfrak{p})^{n-1}) \zeta_K(1-n)}{(1-p^{n-1}) \zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)}$$

est prolongeable à $\mathbb{Z}_p$ en une fonction holomorphe. En effet, si $Z_p(\cdot\,,\mathbb{Q})$ désigne la fonction zêta p-adique du corps $\mathbb{Q}$ on a

$$Z_p(1-n\,,\mathbb{Q}) = (1-p^{n-1}) \zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)$$

pour $n > 0$, $n \equiv 0 \mod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $n \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$). D'autre part sachant que

$$\omega_p((1-p^{n-1}) \zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)) = -1 - \omega_p(n)$$

pour les mêmes valeurs de n (ω_p désignant la valuation p-adique), on en conclut que $Z_p(\cdot\,,\mathbb{Q})^{-1}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{Z}_p$ (avec un seul zéro).

Cette conjecture est satisfaite pour les corps de nombres abéliens réels [1], [5], [12]. Des calculs numériques pour des corps cubiques [4] ont donné le commencement du développement en série d'interpolation de (1) avec une convergence très satisfaisante des coefficients. Si l'on note $S^{(p)}$ la fonction (1) on cherche à la développer sous la forme

$$\text{si } p \neq 2 \quad S^{(p)}(1-(p-1)(u+1)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^p \binom{u}{i}$$

$$\text{si } p = 2 \quad S^{(2)}(1-2(u+1)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \binom{u}{i},$$

on constate que $a_i^p \equiv 0 \mod p^i$ si $p \neq 2$ (resp. $a_i^2 \equiv 0 \mod 2^{3i}$ si $p = 2$).

§. II. - LES VALEURS DE LA FONCTION ZETA D'UN CORPS DE NOMBRES AUX ENTIERS NEGATIFS SONT RATIONNELLES

1) Relation fonctionnelle

Soit K un corps totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$, on pose

$$F_K(s) = A^s \Gamma(\tfrac{s}{2})^n \zeta_K(s) \quad \text{où} \quad A = d^{1/2} \pi^{-n/2}$$

et où d est le discriminant de K. La fonction F_K satisfait la relation fonctionnelle suivante [13] :

$$F_K(s) = F_K(1-s) ,$$

c'est-à-dire :

$$\zeta_K(2k) = A^{1-4k} \left(\frac{\Gamma(\frac{1-2k}{2})}{\Gamma(\frac{2k}{2})}\right)^n \zeta_K(1-2k)$$

où k est entier positif. De plus on a

$$\frac{\Gamma(\frac{1-2k}{2})}{\Gamma(\frac{2k}{2})} = \frac{(-2)^k \sqrt{\pi}}{(1.\,3.\dots(2k-1)).\,(k-1)\,!} = \frac{(-1)^k\, 2^{2k-1} \sqrt{\pi}}{(2k-1)\,!}$$

ainsi :

$$\zeta_K(2k) = d^{\frac{1}{2}} \pi^{2nk} d^{-2k} \left(\frac{(-1)^k\, 2^{2k-1}}{(2k-1)\,!}\right)^n \zeta_K(1-2k)$$

Par exemple si n = 1, K = $\mathbb{Q}$ et $\zeta_{\mathbb{Q}}$ est la fonction ζ de Riemann, on a :

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}$$

$$\zeta(2k) = -\pi^{2k} \frac{(-1)^k\, 2^{2k-1}}{(2k)\,!} B_{2k} .$$

Pour un corps de nombres K totalement réel on a, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\zeta_K(2k) = d^{\frac{1}{2}} \pi^{2nk}\, r \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{Q}$$

soit encore

$$\zeta_K(1-2k) \in \mathbb{Q} .$$

On va donner une démonstration du théorème plus précis suivant.

X THEOREME 1 ([10], [19], [21]). - Soit K un corps de nombres totalement réel, ζ_K la fonction zêta de ce corps. Alors pour tout entier k positif ≥ 2 le nombre $\zeta_K(1-2k)$ est rationnel.

Si $\mathcal{K}$ est une classe modulo les idéaux principaux d'idéaux entiers et si $\zeta_K(\ .\ ,\mathcal{K})$ est la fonction zêta de cette classe, alors pour tout entier k positif le nombre $\zeta_K(1-2k,\mathcal{K})$ est rationnel.

La démonstration se fait en exprimant $\zeta_K(1-n,\mathcal{K})$ comme le terme constant d'une forme modulaire. En effet, la série d'Eisenstein[15]

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \\ (n,m)\neq 0}} (mz+n)^{-2k}$$

se développe en série de Fourier sous la forme

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\,q^n \qquad q = e^{2i\pi z},$$

avec $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

sachant que
$$\zeta(2k) = \frac{\pi^{2k}(-1)^k\,2^{2k-2}}{(2k-1)!}\,\zeta(1-2k)$$

on a donc :

$$G_k(z) = \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\left(\frac{\zeta(1-2k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n\right)$$

Ainsi $\zeta(1-2k)$ s'exprime comme le terme constant d'une forme modulaire de poids 2k dont les coefficients supérieurs $(\sigma_{2k-1}(n)\ \ n\geq 1)$ du développement de Fourier sont rationnels. On reprend cette idée pour la fonction $\zeta_K(\ .\ ,\mathcal{K})$ en exprimant $\zeta_K(2k,\mathcal{K})$ comme le terme constant du développement en série de Fourier d'une série d'Eisenstein à n variables. En passant par la diagonale de P^n, (P est le demi-plan de Poincaré) on considère cette série d'Eisenstein comme fonction d'une variable, c'est une forme modulaire de poids 2kn (où $n = [k:\mathbb{Q}]$) dont le développement en série de Fourier a toujours pour terme constant $\zeta_K(2k,\mathcal{K})$. D'autre part on montre que les autres coefficients du développement sont produit de $\pi^{2kn}\,d^{\frac{1}{2}}$ par un nombre rationnel. On utilise ensuite le fait qu'une forme modulaire de poids >0 dont tous les coefficients supérieurs (c'est-à-dire non constant) du développement en série de Fourier sont rationnels a un terme constant rationnel.

2) Série d'Eisenstein à plusieurs variables

Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$. Notons par $K = K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(n)}$ ses conjugués et si $\alpha \in K$ on note par $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ les conjugués respectifs de α. Soit P le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire positive. On notera $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)})$ un élément de P^n. Soit $\Gamma(K)$ le groupe des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ à coefficients dans l'anneau O_K des entiers de K, et dont le déterminant est une unité totalement positive. Alors $\Gamma(K)$ opère sur P^n de la façon suivante. Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma(K)$, si $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}, \gamma^{(\nu)}, \delta^{(\nu)}$ désignent les $\nu^{\text{ièmes}}$ conjugués de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et si $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}) \in P^n$, on pose

$$\tau^{(\nu)*} = \frac{\alpha^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + \beta^{(\nu)}}{\gamma^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}}$$

$\tau^{(\nu)*} \in P$ et si $\tau^* = (\tau^{(1)*}, \dots, \tau^{(n)*})$, on pose alors

$$\tau^* = M\langle\tau\rangle .$$

Le groupe $\Gamma(K)$ opérant sur P^n s'appelle le groupe modulaire de Hilbert [23].

Si $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) \in \mathbb{C}^n$, on convient d'appeler norme de u et trace de u les expressions

$$N(u) = \prod_{i=1}^{n} u^{(i)} \qquad T(u) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}$$

si $\alpha \in K$, $N(\alpha)$ et $T(\alpha)$ désignent la norme et la trace de α. D'autre part si $\mathfrak{A}$ est un idéal fractionnaire de K, $N(\mathfrak{A})$ désigne la norme absolue de $\mathfrak{A}$.

Soient (c, d) et (c', d') deux couples d'éléments de O_K. On dira qu'ils sont associés s'il existe une unité totalement positive j telle que

$$c' = jc \qquad \text{et} \qquad d' = jd .$$

Soit $\mathcal{K}$ une classe d'idéaux entiers modulo les idéaux principaux soit $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, k un entier positif, soit $\tau \in P^n$, on associe à la classe $\mathcal{K}$ la <u>série d'Eisenstein</u> suivante :

$$G_{2k}(\tau, \mathcal{K}) = \sum_{(c,d)\in\mathfrak{A}^2} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau + d)^{2k}}$$

où $\sum_{(c,d)\in\mathfrak{A}^2}$ signifie sommation étendue à tous les couples (c, d) non nuls et non associés deux à deux avec $c \in \mathfrak{A}$ et $d \in \mathfrak{A}$.

Cette série converge uniformément sur tout compact de P^n si $k \geq 2$. En effet, si $\operatorname{im}(\tau^{(i)}) \geq b > 0$ il existe une constante $h > 0$ telle que

$$|x\,\tau^{(i)} + y|^2 \geq h(x^2 + y^2) \qquad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

on a alors

$$\frac{1}{N(c\tau + d)^{2k}} \leq \frac{1}{h^{nk}} \; \frac{1}{N(c^2 + d^2)^k}$$

on est ainsi ramené à étudier la série

$$\sum\nolimits'_{(c,d)\in\mathfrak{A}^2} N(c^2 + d^2)^{-k} .$$

On considère le corps $K_1 = K(i)$, on a

$$N(c^2 + d^2) = N_{K_1|\mathbb{Q}}(c + i\,d)$$

ainsi

$$\sum\nolimits'_{(c,d)\in\mathfrak{A}^2} N(c^2 + d^2)^{-k} \leq e\,\zeta_{K_1}(k) ,$$

où e est l'indice du groupe des unités totalement positives de K dans le groupe des unités de K_1 et ζ_{K_1} est la fonction zêta du corps K_1. Ainsi la série d'Eisenstein converge uniformément pour $k > 1$.

<u>Le groupe modulaire de Hilbert agit sur les séries d'Eisenstein</u> $G_{2k}(\tau, \mathcal{K})$ de la façon suivante : soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma(K)$, alors pour $\tau \in P^n$, on a

$$G_{2k}(M\langle\tau\rangle, \mathcal{K}) = N(\gamma\tau + \delta)^{2k}\, G_{2k}(\tau, \mathcal{K}) .$$

Calculons <u>le développement en série de Fourier des séries d'Eisenstein</u> [11]. On a :

$$G_{2k}(\tau, \mathcal{K}) = \sum\nolimits'_{(c,d)\in\mathfrak{A}^2} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau + d)^{2k}} = \sum\nolimits'_{(d)\subset\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(d)^{2k}} + \sum\nolimits'_{(c)\subset\mathfrak{A}} \; \sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau + d)^{2k}}$$

où $\sum'_{(c)\subset\mathfrak{A}}$ (resp. $\sum'_{(d)\subset\mathfrak{A}}$) signifie sommation étendue à toutes les classes d'éléments de $\mathfrak{A}$ modulo les unités totalements positives moins la classe de O. Or

$$\sum'_{(d)\subset\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(d)^{2k}} = \varepsilon\, \zeta_K(2k, \mathcal{K}^{-1}) \ ,$$

où ε est l'indice du groupe des unités totalement positives dans le groupe des unités.

Calculons l'expression

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau_0+d)^{2k}} \ .$$

Soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ une base de $\mathfrak{A}$ sur $\mathbb{Z}$, alors $d = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ avec $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$c^{(p)}\tau^{(p)} = u_1\omega_1^{(p)} + u_2\omega_2^{(p)} + \dots + u_n\omega_n^{(p)} \ , \quad 1 \le p \le n \ .$$

On pose alors

$$f(u+m) = N(c\tau+d)^{-2k}$$

et

$$\varphi(u) = \sum_{d\in\mathfrak{A}} N(c\tau+d)^{-2k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(u+m) \ .$$

On peut alors développer φ en série de Fourier sous la forme

$$\varphi(u) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} A(m)\, e^{-2i\pi(m.u)}$$

avec

$$A(m) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(m.u)} f(u)\, du$$

où $m.u$ désigne le produit scalaire ou encore la trace de $(m^{(1)}u^{(1)}, m^{(2)}u^{(2)}, \dots, m^{(n)}u^{(n)})$

$$A(m) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(m.u)} \frac{1}{N(c\tau)^{2k}} \frac{|N(c)|}{d_{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}}\, d\tau$$

où $d_{\mathfrak{A}}$ est le discriminant de l'idéal $\mathfrak{A}$

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{1}{N(c\tau_0+d)^{2k}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-2i\pi(m.u_0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(m.u)} \frac{1}{N(c\tau)^{2k}} \frac{|N(c)|}{d_{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}}\, d\tau$$

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{1}{N(c\tau_0+d)^{2k}} = \frac{|N(c)|}{N(c)^{2k}} \frac{1}{d_{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(m.(u-u_0))} \frac{1}{N(\tau)^{2k}}\, d\tau \ .$$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \cdots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{alors}$$

$$c\tau = Mu \ .$$

Soit M' la matrice définie comme M en remplaçant $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ par sa base duale $(\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n)$ par rapport à la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto T(xy)$. On a

$$M^t M' = I \ .$$

Posons $\qquad \tau - \tau_o = t$

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{1}{N(c\tau_o+d)^{2k}} = \frac{|N(c)|}{N(c)^{2k}} \frac{1}{d_{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\, {}^t(M^1 m).(c\tau)} \frac{1}{N(\tau_o+t)} dt$$

soit

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{1}{N(c\tau_o+d)^{2k}} = \frac{|N(c)|}{N(c)^{2k}} \frac{1}{d_{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu\in\mathfrak{A}'} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\mu.c\tau} \frac{1}{N(\tau_o+t)} dt$$

or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi c^{(p)} t^{(p)} \mu^{(p)}}}{(\tau_o^{(p)} + t^{(p)})^{2k}} dt^{(p)} = \begin{cases} 0 & c^{(p)}\mu^{(p)} > 0 \\ -(2\pi i)^{2k} \dfrac{(c^{(p)}\mu^{(p)})^{2k-1}}{(2k-1)!} e^{-2\pi i c^{(p)}\mu^{(p)}} & \\ & \text{si } c^{(p)}\mu^{(p)} < 0 \ . \end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau_o+d)^{2k}} = \frac{\operatorname{sgn} N(c)\, N(\mathfrak{A})^{2k-1} (-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}} ((2k-2)!)^n} \sum_{\substack{\mu\in\mathfrak{A}' \\ c\mu\geq 0}} N(\mu)^{2k-1} e^{2i\pi T(c\mu\tau_o)}$$

où d_K est le discriminant de K et $\mathfrak{A}'$ l'idéal complémentaire de $\mathfrak{A}$.
Il en résulte que

$$\sum_{(c)\subset\mathfrak{A}}' \sum_{d\in\mathfrak{A}} \frac{N(\mathfrak{A})^{2k}}{N(c\tau_o+d)^{2k}} = \frac{N(\mathfrak{A})^{2k-1}(-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}} ((2k-1)!)^n} \sum_{(c)\subset\mathfrak{A}}' \sum_{\substack{\mu\in\mathfrak{A}' \\ c\mu\geq 0}} \operatorname{sgn} N(c)\, N(\mu)^{2k-1} e^{2i\pi T(c\mu T_o)} .$$

Comme $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}\delta)^{-1}$ où δ est la différente du corps K, $c\mu \in \delta^{-1}$. D'autre part pour tout $\omega \in \delta^{-1}$ l'ensemble des $(c) \subset \mathfrak{A}$ et $\mu \in \mathfrak{A}'$ tels que $c\mu = \omega$ est fini. En effet, l'ensemble des idéaux principaux $(c) = (\frac{\omega}{\mu})$ tels que $(c) \subset \mathfrak{A}$ est fini, par suite l'ensemble des c modulo les unités totalement positives est fini. Ainsi en posant $\omega = c\mu$, on a

$$G_{2k}(\tau,\mathcal{K}) = \varepsilon \zeta_K(2k,\mathcal{K}^{-1}) + \frac{N(\mathfrak{A})^{2k-1}(-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}}((2k-1)!)^n} \sum_{\substack{\omega \in \delta^{-1} \\ \omega \gg 0}} \Big(\sum_{\substack{(c) \supset \mathfrak{A} \\ \frac{\omega}{c} \in \mathfrak{A}'}}' \operatorname{sgn} N(c)\, N(\tfrac{\omega}{c})^{2k-1} \Big) \times e^{2i\pi T(\omega\tau)} ,$$

entier/d_K

ainsi la série d'Eisenstein $G_{2k}(\tau,\mathcal{K})$ admet un développement en série de Fourier sous la forme

$$G_{2k}(\tau,\mathcal{K}) = \varepsilon \zeta_K(2k,\mathcal{K}^{-1}) + \frac{(-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{\omega \in \delta^{-1} \\ \omega \gg 0}} a_\omega e^{2i\pi T(\omega\tau)} \qquad \text{avec} \quad a_\omega \in \mathbb{Q} .$$

majoration [illegible]

3) Formes modulaires à une variable

A partir des séries d'Eisenstein $G_{2k}(\tau,\mathcal{K})$ on définit des formes modulaires à une variable. On pose

$$g_{2k}(t,\mathcal{K}) = G_{2k}(\tau,\mathcal{K}) \qquad \tau = (t,t,\dots,t) .$$

Alors $g_{2k}(\,.\,,\mathcal{K})$ est une forme modulaire à une variable. En effet, si $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et si $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$, on a

$$N(c\tau+d)^{2k} = (ct+d)^{2kn} ,$$

ainsi

$$g_{2k}\Big(\frac{at+b}{ct+d},\mathcal{K}\Big) = (ct+d)^{2kn}\, g_{2k}(t,\mathcal{K}) ,$$

d'autre part

$$g_{2k}(t,\mathcal{K}) = \varepsilon \zeta_K(2k,\mathcal{K}^{-1}) + \frac{(-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}}} \times \sum_{\substack{\omega \in \delta^{-1} \\ \omega \gg 0}} a_\omega\, e^{2i\pi t\, T(\omega)}$$

avec $a_\omega \in \mathbb{Q}$.

De plus si n est un entier positif, l'ensemble des $\omega \in \delta^{-1}$ tels que $\omega \gg 0$ et $T(\omega) = n$ est fini et

$$g_{2k}(t,\chi) = \varepsilon\, \zeta_K(2k,\chi^{-1}) + \frac{(-2i\pi)^{2kn}}{d_K^{\frac{1}{2}}} \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{2i\pi nt}$$

avec $b_n \in \mathbb{Q}$. Ainsi donc

$$d_K^{\frac{1}{2}}(-2i\pi)^{-2kn}\, g_{2k}(t,\chi)$$

$k = 1$

$\varepsilon\, \zeta_k(-1)\, d_k^{-1}\, 2^{-n}$

est une forme modulaire dont les coefficients supérieurs sont rationnels ($n \geq 1$). On déduit alors du théorème suivant de Siegel que cette forme a aussi son premier coefficient rationnel. Et par suite le théorème 1 est montré.

THEOREME 2. [21] - <u>Soit</u> $M_k(\mathbb{C})$ <u>l'espace des formes modulaires de poids</u> $2k$ <u>à coefficients de Fourier dans</u> $\mathbb{C}$ <u>et soit</u> d <u>la dimension de</u> $M_k(\mathbb{C})$ <u>sur</u> $\mathbb{C}$. <u>Alors il existe des nombres</u> $c_1, c_2, \dots, c_d$ <u>rationnels tels que pour tout</u> $f \in M_k(\mathbb{C})$ <u>avec</u>

$$f(z) = a_o + a_1 q + \dots + a_n q^n + \dots , \qquad q = e^{2i\pi z}$$

<u>on ait :</u>

$$a_o = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_d a_d .$$

[illegible] $\varepsilon\, \zeta_k(-1) > 2^{[illegible]}$ [illegible]

donc on va montrer que $a_0 \geq \varepsilon\, \zeta_k\, 2^{-n}$ [illegible]

On déduit immédiatement de ce théorème que si les a_i $i \geq 1$ sont rationnels alors a_o est rationnel.

§. III. - <u>LES VALEURS DE LA FONCTION ZETA D'UN CORPS DE NOMBRES ABELIEN AUX ENTIERS NEGATIFS</u>

On a déjà vu dans l'introduction que si $\mathfrak{X}(K)$ est l'ensemble des caractères du corps abélien K que

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}(K)} L(s,\chi)$$

où $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$.

Puisque pour tout entier $k \geq 1$

$$L(1-k, \chi) = -\frac{B^k(\chi)}{k} ,$$

nous sommes amenés à évaluer le dénominateur des expressions $\frac{B^n(\chi)}{n}$ où $B^n(\chi)$ est le n-ième nombre de Bernoulli relatif au caractère χ . L'essentiel de ces résultats se trouvent dans [3], [5] , nous avons ici effectué le produit $\prod_{\chi} \frac{B^n(\chi)}{n}$ et affiné la puissance de 2 divisant $\frac{B^n(\chi)}{n}$. La démonstration utilisée est directe et assez élémentaire. Elle repose sur le fait que

$$(2) \qquad \frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n$$

où $f' = \text{ppcm}\ (f(\chi), p)$ est un équivalent $\mathfrak{p}$-adique (où $\mathfrak{p}|p$) de $\frac{B^n(\chi)}{n}$ (proposition 2, 2') . Ensuite aux propositions 3, 3' , 4, 5, 5', 6, 6' , nous calculons la valuation $\mathfrak{p}$-adique de l'expression (2) et nous concluons au théorème 3. Ensuite au théorème 4 nous démontrons pour un corps de nombres abélien les conjectures 1 et 2 du paragraphe I .

Soit χ un caractère primitif de conducteur $f(\chi) = f$, alors les nombres de Bernoulli $B^n(\chi)$ relatifs au caractère χ satisfont, quel que soit l'entier $v \geq 1$, la relation de récurrence

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B^i(\chi)(fv)^{n+1-i} = (n+1) \sum_{a=1}^{fv} \chi(a)\, a^n .$$

Si $\chi \neq \varepsilon$ on a $B^o(\chi) = 0$ et si $\chi = \varepsilon$ on a $B^o(\varepsilon) = 1$. De plus si $\chi \neq \varepsilon$, $B^n(\chi) = 0$ lorsque n est de parité différente de celle de χ et $B^n(\varepsilon) = 0$ lorsque $n \geq 3$ est impair.

PROPOSITION 1. - Soit p un nombre premier, χ un caractère primitif de conducteur $f(\chi)$, $f' = \text{ppcm}\ (f(\chi), p)$, alors pour tout idéal $\mathfrak{p}|p$ de $\mathbb{Q}(\chi)$ on a :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\,(f'\, B^n(\chi)) \geq 0 .$$

Preuve.- D'après la relation (3) on a

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} f'^{\,i} B^{n+1-i}(\chi) = (n+1) \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n$$

soit

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \frac{f'^{\,i}}{i} B^{n+1-i}(\chi) = \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n$$

il en résulte alors que $\omega_p(\frac{f'^{\,i}}{i}) > 0$ pour $i \geq 2$, ainsi la proposition est démontrée.

PROPOSITION 2. - Soit $p \neq 2$ un nombre premier, χ un caractère primitif, $f' = \text{ppcm}\,(f(\chi), p)$, alors pour tout entier $n \geq 1$ de même parité que χ, pour tout idéal $\mathfrak{p} | p$ de $\mathbb{Q}(\chi)$ on a :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{B^n(\chi)}{n} - \frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n\Big) \geq 0 .$$

Preuve.- Divisons les deux membres de la relation (5) par nf', nous avons

$$(6) \qquad \frac{B^n(\chi)}{n} + \sum_{i=3}^{n+1} \frac{f'^{\,i-2}}{(i-1)i} \binom{n-1}{i-2} f' B^{n+1-i}(\chi) = \frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n,$$

si $n \neq 2$ ou si $\chi \neq \varepsilon$ puisque dans ce cas $B^{n-1}(\chi) = 0$. Il est alors aisé de voir que si $p \neq 2$, $\omega_p(\frac{f'^{\,i-2}}{(i-1)i}) \geq 0$ pour $i \geq 3$. La proposition 1 permet alors de conclure :

PROPOSITION 2'. - Soit χ un caractère primitif $f' = \text{ppcm}\,(f(\chi), 4)$, alors pour tout entier $n \geq 1$ de même parité que χ, si $\chi \neq \varepsilon$ (resp. pour tout entier $n \geq 4$ et pair si $\chi = \varepsilon$), pour tout idéal $\mathfrak{p} | 2$ de $\mathbb{Q}(\chi)$, on a :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{B^n(\chi)}{n} - \frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n\Big) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2) .$$

Preuve. - La relation (6) est toujours satisfaite et l'on a $\omega_2(\frac{f'^{i-2}}{(i-1)i}) \geq \omega_2(2)$ pour $i \geq 3$. La proposition 1 permet alors de conclure.

PROPOSITION 3. - Soit $p \neq 2$ un nombre premier, χ un caractère primitif, $f' = \text{ppcm}\,(f(\chi), p)$. Si f' est divisible par deux nombres premiers distincts on a, pour tout entier $n \geq 1$ de même parité que χ et pour tout idéal $\mathfrak{p} | p$ de $\mathbb{Q}(\chi)$

$$\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n) \geq 0 .$$

Preuve. - On a $f' = p^r f_1$ où $r \geq 1$ et $(f_1, p) = 1$. Donc :

$$\frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n = \frac{1}{nf'} \sum_{t=0}^{f_1-1} \sum_{u=1}^{p^r} \chi(u+tp^r)(u+tp^r)^n .$$

Comme $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf'}(u+tp^r)^n - \frac{1}{nf'} u^n) \geq 0$, on est ramené à calculer la valuation $\mathfrak{p}$-adique de

$\frac{1}{nf'} \sum_{t=0}^{f_1-1} \sum_{u=1}^{p^r} \chi(u+tp^r) = \frac{1}{nf'} \sum_{u=1}^{p^r} u^n \left(\sum_{t=0}^{f_1-1} \chi(u+tp^r)\right)$. Or l'expression $\sum_{t=0}^{f_1-1} \chi(u+tp^r)$ est nulle parce que χ est primitif et que $f_1 / f(\chi)$ avec $(f_1 , p^r) = 1$. La proposition 3 est démontrée.

PROPOSITION 3'. - Soit χ un caractère primitif et $f' = \text{ppcm}(f(\chi), 4)$. Si f' est divisible par deux nombres premiers distincts, on a pour tout entier $n \geq 1$, de même parité que χ et pour tout idéal $\mathfrak{p} | 2$ de $\mathbb{Q}(\chi)$

$$\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf'} \sum_{a=1}^{f'} \chi(a)\, a^n) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2) .$$

Preuve. - Elle est identique à celle de la proposition 3 à la seule différence près que

$$\omega_2(\frac{1}{nf'}(u+tp^r)^n - \frac{1}{nf'} u^n) \geq \omega_2(2) .$$

PROPOSITION 4. - *Soit* p *un nombre premier,* χ *un caractère primitif de conducteur* p^a , *alors l'idéal de* $\mathbb{Q}(\chi)$

$$(p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p \nmid g}}^{p^a} (\chi(g)\, g^n - 1)$$

est un idéal premier de $\mathbb{Q}(\chi)$ (*éventuellement* (1)).

Preuve. - Soit g_1 un entier générateur modulo p^a du groupe $(\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^*$. Alors

$$(p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p \nmid g}}^{p^a} (\chi(g)\, g^n - 1) = (p) + (\chi(g_1)\, g_1^n - 1) \ .$$

Or $\chi(g_1) = \zeta\, \xi$ où ordre de $\zeta = p^{a-1}$ et ordre ξ divise $p-1$.

Soit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ les idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\chi)$ au-dessus de p et $\sigma_2, \dots, \sigma_r$ des automorphismes tels que $\sigma_i(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_i$ $2 \leq i \leq r$. Alors

$$\xi \not\equiv \sigma_i(\xi) \mod \mathfrak{p}_1 \quad 2 \leq i \leq r \ .$$

Si $\chi(g_1)\, g_1^n - 1 \equiv 0 \mod \mathfrak{p}_1$, alors $\xi\, g_1^n \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_1$ ceci entraîne $\xi g_1^n \not\equiv 1 \mod \mathfrak{p}_i$ $2 \leq i \leq r$. En effet, si l'on avait $\xi\, g_1^n \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_i , 2 \leq i \leq r$. Il existe $2 \leq j \leq r$ tel que $\sigma_j(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1$, ainsi on a :

$$\xi \equiv \sigma_j(\xi) \mod \mathfrak{p}_1 \ ,$$

ce qui est impossible. Par suite l'idéal

$$(p) + \sum_{\substack{g=1 \\ (g,p)=1}}^{p^a} (\chi(g)\, g^n - 1)$$

est (1) ou un idéal premier de $\mathbb{Q}(\chi)$ au-dessus de p .

PROPOSITION 5. - *Soit* $p \neq 2$, *un nombre premier,* χ *un caractère de conducteur* p^u *avec* $u \geq 2$. *Si* $\mathfrak{p} \mid p$ *et si*

$$\mathfrak{p} \neq (p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p \nmid g}}^{p^u} (\chi(g)\, g^n - 1) \ ,$$

alors pour tout entier $n \geq 1$ *de même par~~tie~~rité que* χ *on a :*

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np^u}\sum_{a=1}^{p^u}\chi(a)\,a^n\right) \geq 0 .$$

<u>Si</u> $\mathfrak{p} = (p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p\nmid g}}^{p^u} (\chi(g)\,g^n - 1)$, <u>pour tout entier</u> $n \geq 1$ <u>de même parité que</u> χ <u>on a</u> :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np^u}\sum_{a=1}^{p^u}\chi(a)\,a^n\right) = \omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{1-\chi(1+p)}\right) = -\frac{\omega_{\mathfrak{p}}(p)}{p^{u-2}(p-1)} .$$

Preuve.- Soit g_1 un entier générateur modulo p^u de $(\mathbb{Z}/p^u\mathbb{Z})^*$ si $g_1^s \equiv a$ mod p^u , on a :

$$\omega_p\left(\frac{1}{np^u}\,g_1^{sn} - \frac{1}{np^u}\,a^n\right) \geq 0 . \tag{7}$$

D'autre part

$$\frac{1}{np^u}\sum_{s=0}^{p^{u-1}(p-1)} \chi(g_1)^s\, g_1^{sn} = \frac{1}{np^n}\,\frac{1-g_1^{np^{u-1}(p-1)}}{1-\chi(g_1)\,g_1^n} .$$

On peut choisir g_1 tel que $\omega_p(g_1^{p^{u-1}(p-1)} - 1) = \omega_p(p^u)$, ainsi

$$\omega_p\left(\frac{1-g_1^{n\,p^{u-1}(p-1)}}{np^u}\right) = 0 .$$

Par suite il est clair que $\mathfrak{p} \neq (p) + (\chi(g_1)\,g_1^n - 1)$ implique avec (7)

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np^u}\sum_{a=1}^{p^u}\chi(a)\,a^n\right) \geq 0$$

et que $\mathfrak{p} = (p) + (\chi(g_1)\,g_1^n - 1)$ implique avec (7)

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np^u}\sum_{a=1}^{n}\chi(a)\,a^n\right) = \omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{1-\chi(1+p)}\right) = -\frac{\omega_{\mathfrak{p}}(p)}{p^{u-2}(p-1)} .$$

PROPOSITION 5'. - Soit χ un caractère primitif de conducteur $f(\chi) = 2^u$ avec $u \geq 3$. Soit $\mathfrak{p}$ l'unique idéal de $\mathbb{Q}(\chi)$ divisant 2, alors pour tout entier $n \geq 2$ de même parité que χ, on a :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{n\,2^u}\sum_{a=1}^{2^u}\chi(a)\,a^n\right) = 1 - \omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{1-\chi(5)}\right) = \omega_{\mathfrak{p}}(2)\left(1-\frac{1}{2^{u-3}}\right).$$

Preuve. -

$$\frac{1}{n\,2^u}\sum_{a=1}^{2^u}\chi(a)a^n = \frac{1}{n\,2^u}\sum_{t=0}^{2^{u-2}-1}\chi(1+4t)\,(1+4t)^n + \chi(-1-4t)\,(2^u-1-4t)^n$$

comme

$$\omega_2\left(\frac{1}{n\,2^u}(2^u-a)^n - \frac{1}{n\,2^u}((-a)^n + 2^u n(-a)^{n-1})\right) \geq \omega_2(2)\ ,$$

il s'ensuit que

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{n\,2^u}\sum_{a=1}^{2^u}\chi(a)\,a^n - \frac{1}{n\,2^u}\sum_{t=0}^{2^{u-2}-1}\chi(1+4t)\,\{2(1+4t)^n - 2^u n(1+4t)^{n-1}\}\right) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2)\ ,$$

d'autre part

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{n\,2^u}\sum_{t=0}^{2^{u-2}-1}\chi(1+4t)\,\{2(1+4t)^n - 2^u n(1+4t)^{n-1}\} - \frac{1}{n\,2^u}\sum_{s=0}^{2^{u-2}-1}\chi(5^s)\{2.5^{sn} - 2^u n 5^{s(n-1)}\}\right) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2)$$

on a ensuite

$$\frac{1}{n\,2^u}\sum_{s=0}^{2^{u-2}-1}\chi(5^s)\,\{2.\,5^{sn} - 2^u n\,5^{s(n-1)}\} = \frac{1}{n\,2^u}\times\frac{1-5^{2^{u-2}n}}{1-\chi(5)5^n} - \frac{1-5^{2^{u-2}(n-1)}}{1-\chi(5)5^{n-1}}$$

sachant que $\omega_2\left(\frac{1-5^{2^{u-2}n}}{n\,2^u}\right) = \omega_2(2)$, la proposition 5' est démontrée.

PROPOSITION 6. - Soit $p \neq 2$ un nombre premier, χ un caractère de conducteur p^u avec $u \leq 1$. Si $\mathfrak{p} | p$ est un idéal de $\mathbb{Q}(\chi)$ tel que

$$\mathfrak{p} \neq (p) + \sum_{g=1}^{p-1}(\chi(g)\,g^n - 1)\ ,$$

<u>pour tout entier</u> n <u>de même parité que</u> χ , <u>on a</u> :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \chi(a)\, a^n\right) \geq 0 .$$

<u>Si</u>

$$\mathfrak{p} = (p) + \sum_{a=1}^{p-1} (\chi(g)\, g^n - 1) ,$$

<u>pour tout entier</u> n <u>de même parité que</u> χ , <u>on a</u> :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \chi(a)\, a^n\right) = -\omega_{\mathfrak{p}}(pn) .$$

Preuve. - Soit g_1 un entier générateur modulo p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on est ramené à évaluer comme pour la proposition 5

$$\frac{1}{np} \sum_{s=1}^{p-1} \chi(g_1^s)\, g_1^{sn} = \frac{1}{np} \frac{1-g_1^{(p-1)n}}{1-\chi(g_1)\, g_1^n} ,$$

on peut choisir g_1 de façon que

$$\omega_p\left(\frac{1-g_1^{(p-1)n}}{np}\right) = 0 .$$

Si $\mathfrak{p} \neq (p) + (\chi(g_1)\, g_1^n - 1)$, alors

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \chi(a)\, a^n\right) \geq 0 .$$

Si $\mathfrak{p} = (p) + (\chi(g_1)\, g_1^n - 1)$, on a

$$\chi(g_1) g_1^n \equiv 1 \mod \mathfrak{p}$$

et par suite
$$\sum_{s=1}^{p-1} \chi_1(g_1^s)\, g_1^{sn} \equiv (p-1) \mod \mathfrak{p}$$

et
$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \chi(a)\, a^n\right) = -\omega_{\mathfrak{p}}(p^n) .$$

PROPOSITION 6'. - <u>Si</u> $n \geq 4$ <u>est un entier pair</u>, <u>on a</u> :

$$\omega_2\left(\frac{1}{4^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n)\right) = -(1 + \omega_2(n)) .$$

Si n est impair et si χ est le caractère de conducteur 4, on a :

$$\omega_2\left(\frac{1}{4^n}(\chi(1)1^n+\chi(2)2^n+\chi(3)3^n+\chi(4)4^n)\right) = -(1+\omega_2(n)) .$$

THEOREME 3. - Les nombres de Bernoulli $B^n(\chi)$ considérés seront ceux pour lesquels n est de même partié rité que χ.

1) Soit χ un caractère tel que $f(\chi)$ soit divisible par deux nombres premiers distincts, alors $\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique et 2 divise $\frac{B^n(\chi)}{n}$.

2) Soit $p \neq 2$ un nombre premier et χ un caractère de conducteur $f(\chi) = p^u$ avec $u \geq 2$. Si

$$(1) = (p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p \nmid g}}^{p^u} (\chi(g)g^n - 1) ,$$

alors $\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique et 2 divise $\frac{B^n(\chi)}{n}$.

Si $\mathfrak{p} = (p) + \sum_{\substack{g=1 \\ p \nmid g}}^{p^u} (\chi(g)g^n - 1) \neq (1)$, alors :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) = \omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{\chi(1+p)-1}\right) = -\frac{\omega_{\mathfrak{p}}(p)}{p^{u-2}(p-1)}$$

et pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, on a

$$\omega_{\mathfrak{q}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq 0$$

et pour tout idéal premier $\mathfrak{q} | 2$, on a :

$$\omega_{\mathfrak{q}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq \omega_{\mathfrak{q}}(2) .$$

On peut aussi dire que $(\chi(1+p)-1)\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique divisible par 2 et pas divisible par $(\chi(1+p)-1)$.

3) Soit χ un caractère de conducteur $f(\chi) = 2^u$ avec $u \geq 3$ et soit l'idéal premier

$$\mathfrak{p} = (2) + \sum_{\substack{g=1 \\ 2 \nmid g}}^{2^u} (\chi(g)g^n - 1) \neq 1 ,$$

c'est-à-dire l'unique idéal premier de $\mathbb{Q}(\chi)$ au-dessus de 2 , alors

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) = \omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{2}{\chi(5)-1}\right) = \omega_{\mathfrak{p}}(2)\left(1-\frac{1}{2^{u-3}}\right)$$

et pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, on a :

$$\omega_{\mathfrak{q}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq 0 .$$

On peut aussi dire que $(1-\chi(5))\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique divisible par 2 et pas divisible par $2(1-\chi(5))$.

4) Soit $p \neq 2$ un nombre premier et χ un caractère de conducteur p . Si

$$(1) = (p) + \sum_{g=1}^{p-1} (\chi(g)\, g^n - 1) ,$$

alors $\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique divisible par 2 . Si

$$\mathfrak{p} = (p) + \sum_{g=1}^{p-1} (\chi(g)\, g^n - 1) \text{ [redacted] } ,$$

on a :

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) = -\omega_{\mathfrak{p}}(pn) .$$

Pour tout $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, on a :

$$\omega_{\mathfrak{q}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq 0$$

et pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \mid 2$, on a :

$$\omega_{\mathfrak{q}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq \omega_{\mathfrak{q}}(2) .$$

5) Soit χ un caractère de conducteur $f(\chi) = 4$, alors

$$\omega_2\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) = -\omega_2(2n)$$

et pour tout $p \neq 2$, on a :

$$\omega_p\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq 0 .$$

6) Si $\chi = \varepsilon$ le caractère trivial, on a (théorème de Clausen-Staudt) :

$\underline{\text{si}}$ $(p-1)|n$, $\omega_p(\frac{B_n}{n}) = -\omega_p(pn)$

$\underline{\text{si}}$ $(p-1)\nmid n$, $\omega_p(\frac{B_n}{n}) \geq 0$.

Preuve.- D'après les propositions 2 et 2' on a les résultats suivants :

Soit $\mathfrak{p}\nmid 2$ un idéal premier de $\mathbb{Q}(\chi)$.

Si $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^n) < 0$, alors

$$\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^n) = \omega_{\mathfrak{p}}(\frac{B^n(\chi)}{n}) \quad ;$$

si $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^n) \geq 0$, alors $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{B^n(\chi)}{n}) \geq 0$.

Soit $\mathfrak{p}|2$ un idéal premier de $\mathbb{Q}(\chi)$.

Si $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\,a^n) < \omega_{\mathfrak{p}}(2)$, alors

$$\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^n) = \omega_{\mathfrak{p}}(\frac{B^n(\chi)}{n}) \quad ,$$

si $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{nf}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^n) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2)$, alors $\omega_{\mathfrak{p}}(\frac{B^n(\chi)}{n}) \geq \omega_{\mathfrak{p}}(2)$.

La partie 1) se démontre en utilisant les propositions 3 et 3' ; la partie 2) en utilisant les propositions 5, 3 et 3' ; la partie 3) à l'aide des propositions 5' et 3 ; la partie 4) avec les propositions 3, 3' et 6 ; la partie 5) avec les propositions 3 et 6' et la partie 6) avec les propositions 6 et 6' .

PROPOSITION 7. - Soit K un corps de nombres abélien, ℓ un nombre premier, $K_{(\ell)} = K \cap \{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^n]{1})\}$. Alors on a

$$\omega_{\ell}(\zeta_K(1-n)\,2^{-d^\circ K}) \geq \omega_{\ell}(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\,2^{-d^\circ K(\ell)}) \; .$$

Preuve.- En effet :

$$\zeta_K(1-n) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}(K)} \left(-\frac{B^n(\chi)}{n}\right)$$

$$\zeta_{K(\ell)}(1-n) = \prod_{\substack{\chi \in \mathfrak{X}(K) \\ \text{et } f(\chi) = \ell^a \\ a \geq 0}} \left(-\frac{B^n(\chi)}{n}\right)$$

Si $f(\chi) \neq \ell^a$ alors $\omega_\ell\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) \geq \omega_\ell(2)$.

Par suite, la proposition 7 en découle immédiatement.

PROPOSITION 8. - Soit $\ell \neq 2$ un nombre premier, K un corps abélien, $K(\ell)$ défini comme à la proposition 7, soit $\nu(\ell)$ tel que $K(\ell) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)}]{1})$, et $K(\ell) \not\subset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)-1}]{1})$, soit $\delta = [\mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{\nu(\ell)}]{1}) : K(\ell)] = [K(\sqrt[\ell]{1}) : K]$. Alors on a

$$\text{si } \delta \nmid n \qquad \omega_\ell(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-d^oK(\ell)}) \geq 0$$

$$\text{si } \delta | n \qquad \omega_\ell(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-d^oK(\ell)}) \geq -\omega_\ell(\ell^{\nu(\ell)} n)$$

$$\text{si } \delta = \ell - 1 \quad \omega_\ell(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-d^oK(\ell)}) = -\omega_\ell(\ell^{\nu(\ell)} n) .$$

Preuve.- On a $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^{u-1}]{1}, \sqrt[\frac{\ell-1}{\delta}]{1})$ où $u = \nu(\ell)$, il existe r idéaux premiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ au-dessus de ℓ dans $\mathbb{Q}(\chi)$ avec $r = \varphi(\frac{\ell-1}{\delta})$. Soit ψ un générateur du groupe des caractères de $K(\ell)$ et γ un entier générateur modulo ℓ^u de $(\mathbb{Z}/\ell^u\mathbb{Z})^*$. On a $\psi(\gamma) = \zeta\xi$ où ζ est une racine primitive ℓ^u de 1 et ξ est une racine primitive $\frac{\ell-1}{\delta}$ -ième de 1 , il est clair que

$$\psi(\gamma) \equiv \xi \mod \lambda_j \qquad 1 \leq j \leq r ;$$

il existe η_j , $(\eta_j , \frac{\ell-1}{\delta}) = 1$ tel que

$$\gamma^{\delta\eta_j} \equiv \xi \mod \lambda_j , \quad \text{par suite}$$

$$\psi^i(\gamma)\, \gamma^n \equiv \gamma^{i\delta\eta_j + n} \mod \lambda_j$$

ceci implique $i\delta\eta_j + n \equiv 0$ modulo $(\ell-1)$, donc que $\delta | n$.

Il est clair que si $\delta \nmid n$

$$(1) = (\ell) + \sum_{\substack{g=1 \\ (g,\ell)=1}}^{\ell^u} (\chi(g)\, g^n - 1)$$

quel que soit $\chi \in \mathfrak{X}(K)$ et $\chi \neq \varepsilon$, $\frac{B^n(\chi)}{n}$ est un entier algébrique divisible par 2, donc

$$\frac{\zeta_{K(\ell)}(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)} \times 2^{-(d^o K(\ell)-1)}$$ est entier, d'autre part :

$$\omega_\ell\,(\zeta_{K(\ell)}\, 2^{-d^o K(\ell)}) \geq 0 \ .$$

<u>Si</u> $\delta | n$, il existe $1 \leq i_j \leq \frac{\ell-1}{\delta}$ tel que $i_j \eta_j + n/\delta \equiv 0 \mod \frac{\ell-1}{\delta}$. Par suite l'ensemble des $\chi \in \mathfrak{X}(K)$ tels que

$$\lambda_j = (\ell) + \sum_{\substack{g=1 \\ (g,\ell)=1}}^{\ell^u} (\chi(g)\, g^n - 1)$$

sont les ψ^i avec $i = i_j + t\,\frac{\ell-1}{\delta}$ tels que $0 \leq t \leq \ell^{u-1}-1$.

Pour $k \leq u-2$, il y a $\ell^{u-2-k}(\ell-1)$ caractères χ de conducteur ℓ^{u-k} tels que

$$(8) \qquad \lambda_j = (\ell) + \sum_{\substack{g=1 \\ (g,\ell)=1}}^{\ell^u} (\chi(g)\, g^n - 1) \ .$$

<u>Si</u> $\delta \neq \ell-1$ il y a un caractère χ de conducteur ℓ ou 1 possédant la propriété (8) .

<u>Si</u> $\delta = \ell-1$ il n'y a pas de caractère de conducteur ℓ possédant la propriété (8) et le caractère trivial possède la propriété (8) .

On a :

$$\omega_{\lambda_j}(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-(d^o K(\ell)-1)}) \geq -\omega_{\lambda_j}(\ell^u n).$$

Ainsi :

$$\omega_\ell(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-(d^o K(\ell)-1)}) \geq -\omega_\ell\,(\ell^u n) \ .$$

Si $\delta = (\ell-1)$, on a $r = 1$

$$\omega_{\lambda_1}(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-(d^oK(\ell)-1)}) = \omega_{\lambda_1}(\ell^u n)$$

et
$$\omega_{\ell}(\zeta_{K(\ell)}(1-n)\, 2^{-(d^oK(\ell)-1)}) = -\omega_{\ell}(\ell^u n)$$

PROPOSITION 8'. - Soit K un corps abélien, $K(2) = K \cap (\bigcup_{i\geq 1} \mathbb{Q}(\sqrt[2^i]{1})$ et $\nu(2)$ le plus grand entier $j\geq 2$ tel que $K = (\sqrt[2^2]{1}) = K(\sqrt[2^j]{1})$. On a $K(2) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[2^{\nu(2)}]{1})$ et $K(2) \not\subset \mathbb{Q}(\sqrt[2^{\nu(2)-1}]{1})$, et

$$\omega_2(\zeta_{K(2)}(1-n)\, 2^{-d^oK(2)}) = -\,\omega_2(2^{\nu(2)}n) \ .$$

Preuve. - $K(2)$ est une extension de degré 2^{u-r} de $\mathbb{Q}$. Dans $K(2)$ il y a un seul idéal premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de 2 . Il y a exactement 2^i caractères $\chi \in \mathfrak{X}(K(2))$ de conducteur 2^{i+3} pour $3 \leq i \leq u-3$, on a

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\frac{B^n(\chi)}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \omega_{\mathfrak{p}}(2)$$

d'où :
$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\prod_{\substack{\chi \\ f(\chi)=2^i}} \frac{B^n(\chi)}{n}\right) = (2^i - 1)\,.\,\omega_{\mathfrak{p}}(2) \ .$$

Il n'y a pas de caractère de conducteur 4 et 2 , et il y a le caractère trivial de conducteur 1 . Par suite

$$\omega_{\mathfrak{p}}\left(\prod_{\chi\in\mathfrak{X}(K(2))} \frac{B^n(\chi)}{n}\right) = \sum_{i=0}^{u-3} (2^i - 1)\, \omega_{\mathfrak{p}}(2) - \omega_2(2n)$$

et la proposition est démontrée, c'est-à-dire que

$$\omega_2(\zeta_{K(2)}(1-n)\, 2^{-d^oK(2)} = -\,\omega_2(2^u n) \ .$$

THEOREME 4. - Soit K un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$, ζ_K sa fonction zêta, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \dagger p$ de K , on a :

$$(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n - 1)\, \zeta_K(1-n)\, 2^{-d^oK} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \ .$$

Si de plus pour tout nombre premier $\ell \neq 2$ et pour tout entier $u \geq 1$, $K \cap \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^u]{1}) = \mathbb{Q}$, alors

$$\frac{\zeta_K(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)} \in 2^{d^\circ K+1-\nu(2)}\mathbb{Z} .$$

Preuve. - La première partie est une conséquence immédiate des propositions 8 et 8' et des relations (0). Pour démontrer la seconde partie il suffit de calculer $\omega_\ell\left(\frac{\zeta_K(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)}\right)$ pour tout nombre premier ℓ.

On sait que $\omega_2(\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)) = -(\omega_2(2n))$. Donc la proposition 8' nous montre que

$$\omega_2\left(\frac{\zeta_K(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)}\right) \geq d^\circ K + 1 - \nu(2) .$$

Si $\ell \neq 2$, on a $K(\ell) = \mathbb{Q}$ et la proposition 7 nous montre que

$$\omega_\ell\left(\frac{\zeta_K(1-n)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)}\right) \geq 0 .$$

Le théorème est donc démontré.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE et J. FRESNEL. - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica 20, n° 4

[2] K. BARNER. - Uber die Werte der Ringklassen. L. Funktionen reell-quadratischen Zahlkörper an natürlichen Argumenstellen. Journal of number theory 1, pp. 28-64, 1969.

[3] L. CARLITZ. - Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. Journal für die reine und ang. Math. 1959, Band 202, Heft 314.

[4] CARTIER. - Calculs numériques non publiés (à ma connaissance).

[5] J. FRESNEL. - Nombres de Bernoulli et fonctions L-p-adiques. Annales de l'Institut Fourier, 17, fasc. 2, 1967, p. 281-333.

[6] J. FRESNEL. - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Bull. Soc. Math. France, mémoire 25, 1971, pp. 83-89.

[7] M. F. GUEHO. - Corps de quaternions et fonctions zêta au point -1. C. R. A. S. Paris, t. 274, (24 janvier 1972).

[8] M. F. GUEHO. - Corps de quaternions sur un corps de nombres. Thèse de 3ème cycle (polycopiée) Université de Bordeaux 1, 1972.

[9] E. HECKE. - Analytische Funktionen und algebraishe Zalhen II Abhandl.math. Seminar Hamburg. Univ. 3,213-236, 1924.

[10] H. KLINGEN. - Uber die Werte der Dedekindshen Zeta funktion. Math. Annalen 145, p. 265-272, 1962.

[11] H. D. KLOOSTERMAN. - Theorie der Eisensteinreihen von mehreren Veranderlichen. Abhandl math. Seminar Hamburg, Univ. 6, 163-188, 1928.

[12] T. KUBOTA et H. W. LEOPOLDT. - Eine p-adishe theorie der Zetawerte ; I Einführung der p-adisher Dirichletschen L. Funktionen. Journal für die reine und ang. Math. t. 214/215, 1964, 328-339.

[13] S. LANG. - Algebraic number theory. Addison-Wesley.

[14] H. W. LEOPOLDT. - Eine verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 22, 1958 131-140.

[15] J. P. SERRE. - Cours d'arithmétique. Collection sup P. U. F. , 1970.

[16] J. P. SERRE. - Valeurs des fonctions ζ aux entiers négatifs. Journées arithmétiques françaises de Marseille, mai 1971.

[17] J. P. SERRE. - Cohomologie des groupes discrets. Sém. Bourbaki 1970-71, n° 399.

[18] J. P. SERRE. - Cohomologie des groupes discrets. Annals of mathematics studies 70, pp. 77-169, 1971.

[19] C. L. SIEGEL. - Uber die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Ann. Math. 38, pp. 212-291, 1937.

[20] C. L. SIEGEL. - Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. Nachr. Akad. Wiss Gottingen, 1968, n° 2, p. 7-38.

[21] C. L. SIEGEL. - Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. Nachr. Akad. Wiss.Gottingen, 1969, n° 10, p. 87-102.

[22] C. L. SIEGEL. - Uber die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, 1970, n° 3, pp. 15-56.

[23] C. L. SIEGEL. - Lectures on advanced analytic number theory. Tata institute of fundamental research. Bombay, 1961.

-:-:-:-

J. FRESNEL
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E