SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

GÉRARD GARANDEL

Invariants dans le complété de la clôture algébrique d'un corps local

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 21, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A21_0>

INVARIANTS DANS LE COMPLETE DE LA CLOTURE ALGEBRIQUE D'UN CORPS LOCAL

par

Gérard GARANDEL

-:-:-:-

Dans [4], J. Tate démontre le théorème qui suit : soit K un corps local (c'est-à-dire un corps valué discrètement, complet à corps des restes k parfait avec $\mathrm{car}(k) = p > 0$), de caractéristique zéro, soit $\tilde{K}$ la clôture algébrique de K et G le groupe de Galois de $\tilde{K}$ sur K . Pour un corps L contenu dans $\tilde{K}$ nous notons $\hat{L}$ le complété de L pour la valuation unique ω obtenue sur L par prolongement de la valeur absolue ω sur K .

G opère alors par continuité sur $\hat{\tilde{K}}$.

THEOREME (J. Tate). <u>Le corps des invariants dans</u> $\hat{\tilde{K}}$ <u>par</u> G <u>est</u> K .

Dans [3], Shankar Sen obtient le résultat suivant : soit K un corps local de caractéristique zéro, soit L une extension galoisienne (finie ou non) de K , notons par G son groupe de Galois.

THEOREME (Shankar Sen). <u>Le corps</u> $\hat{L}^G$ <u>des invariants par</u> G <u>dans</u> $\hat{L}$ <u>est</u> K .

Dans [1], Ax reprend le problème de la façon suivante : soit K un corps valué (c'est-à-dire muni d'une application ω de K dans un groupe totalement ordonné, et vérifiant les axiomes classiques), les notations utilisées serons les mêmes que précédemment. On suppose, de plus que ω se prolonge de façon unique à $\widetilde{K}$; alors G opère sur $\hat{\widetilde{K}}$.

THEOREME (J. Ax). <u>On a</u> $(\hat{\widetilde{K}})^G = (\widehat{\widetilde{K}^G}) = \sqrt{\hat{K}}$ <u>où</u> $\sqrt{K} = K^{p^{-\infty}}$ <u>est le plus petit corps parfait contenant</u> K.

J. Ax se débarasse donc des hypothèses suivantes :

a) ω valuation discrète,

b) K complet, il remplace cette hypothèse par l'hypothèse plus générale de l'unicité de la valuation sur $\widetilde{K}$,

c) $car(K) = 0$,

d) k parfait et $car(k) = p > 0$.

Ce théorème généralise le résultat de Shankar Sen dans le cas d'une extension algébriquement close de K.

Le problème général que l'on peut se poser est donc le suivant : soit K un corps valué telle que la valuation se prolonge de façon unique à $\widetilde{K}$, soit L une extension normale de K contenue dans $\widetilde{K}$, soit G l'ensemble des K-isomorphes de L dans $\widetilde{K}$; quel est le corps $\hat{L}^G$ des invariants de $\hat{L}$ par G ?

La démonstration de J. Ax permet d'énoncer le :

THEOREME FONDAMENTAL. $\hat{L}^G = \hat{L} \cap \sqrt{\hat{K}}$.

Si L contient $\sqrt{K}$, en particulier si L est algébriquement clos, on a $\hat{L} \cap \sqrt{\hat{K}} = \sqrt{\hat{K}}$, on retrouve l'énoncé de J. Ax.

Dans [3], Shankar Sen donne un exemple d'une extension L galoisienne (on algébriquement close) d 'un corps local K de caractéristique p telle que $\hat{L}^G \neq K$. Cela veut dire ici que

$$K \subsetneq \hat{L} \cap \sqrt{\hat{K}} .$$

Enfin, si K est local de caractéristique zéro, on a $\sqrt{K} = K$ d'où $K = \hat{L}^G$.

Les démonstrations de Shankar Sen et de J. Ax sont différentes. Le premier utilise une caractérisation cohomologique de la propriété $\hat{L}^G = K$, le second suit une méthode topologique.

Nous suivrons ici la démonstration de J. Ax pour démontrer le théorème fondamental, nous reviendrons en certains points de la démonstration de Shankar Sen à propos du contrexemple.

I. - <u>DEMONSTRATION DU THEOREME FONDAMENTAL</u>

DEFINITION. Soit $\alpha \in \tilde{K}$, on pose

$$\Delta_K(\alpha) = \min \omega(\sigma(\alpha) - \alpha)$$

$\sigma(\alpha)$ parcourant l'ensemble des conjugués de α sur K.

Si $\alpha \in \sqrt{K}$, on pose

$$\Delta_K(\alpha) = +\infty .$$

On a les résultats suivants :

$$\forall \alpha \in \tilde{K}, \quad \forall a \in \sqrt{K}, \qquad \Delta_K(\alpha) \geq \omega(\alpha - a)$$

en particulier $\qquad \Delta_K(\alpha) \geq \omega(\alpha)$.

Si $\beta \in \tilde{K}$ est tel que

$$\omega(\beta - \alpha) \geq \Delta(\alpha) + A \qquad A \in \omega(\tilde{K}^*) ,$$

alors $\qquad \Delta(\beta) \geq \Delta(\alpha) + A$.

On a les trois théorèmes suivants :

THEOREME 1. <u>Si</u> $car(K) = 0$ <u>et</u> $car(K) = p > 0$, <u>alors</u> $\forall \alpha \in K$, $\exists a \in K$;

$$\omega(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha) - \frac{p}{(p-1)^2}\, \omega(p) .$$

THEOREME 2. <u>Si</u> $car(K) = p > 0$, <u>alors</u> $\forall \alpha \in K$, $\forall \ell$ <u>entier</u> > 1, <u>entier</u> $\exists a \in \sqrt{K}$;

$$\omega(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)(1 - 1/\ell) .$$

THEOREME 3. *Si* $car(k) = 0$, *alors* $\forall \alpha \in K$, $\exists a \in K$;

$$\omega(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha) .$$

Les démonstrations de ces trois théorèmes sont assez différentes.

Pour le théorème 1, J. Ax démontre d'abord un "lemme de Gauss" pour les polynômes.

LEMME. *Si* $car(K) = 0$ *et* $car(k) = p > 0$, *si* $f \in K[X]$ *avec* $d^o f = d = p^\delta d_1 = q d_1$ *et* $(p, d_1) = 1$

A) *si* $q < d_1$ *et si* D *est un disque (circonférencié) contenant toutes les racines de* f , *alors la dérivée* $q^e f^{(q)}$ *de* f *a une racine dans* D .

B) *Si* $d^o f = p^\delta$, *posons* $q = p^{\delta - 1}$. *Soit* D *un disque de rayon* λ *contenant toutes les racines de* f , *alors* $f^{(q)}$ *a une racine dans un disque* D' *contenant* D *et de diamètre* $\lambda - \frac{\omega(p)}{d-q}$.

Ce lemme permet à J. Ax de faire un raisonnement par récurrence sur le degré de α pour démontrer le théorème 1.

Le théorème 2 se démontre en trois étapes :

A/ Si $[\sqrt{K}(\alpha) : \sqrt{K}] = p$, l'élément cherché est $(N_{\sqrt{K}(\alpha)/\sqrt{K}}(\alpha))^{1/p}$.

B/ On suppose que toute extension de $\sqrt{K}$ est de degré une puissance de p, si $\alpha \in \tilde{K}$, soit $\overline{\sqrt{K}(\alpha)}$ la clôture galoisienne de $\sqrt{K}(\alpha)$ dans $\tilde{K}$. Soit $G_\alpha = \mathcal{G}(\overline{\sqrt{K}(\alpha)} : \sqrt{K})$. La théorie des p groupes permet d'affirmer qu'il existe dans G_α une suite de sous-groupes $e = G_o \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G_\alpha$ tels que $ord(G_{i+1}/G_i) = p$, G_i étant distingué dans G_{i+1} .

L'extension $\sqrt{K} \to \overline{\sqrt{K}(\alpha)}$ se décompose alors en une suite d'extensions $\sqrt{K} = K_o \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = \overline{\sqrt{K}(\alpha)}$ avec $[K_{i+1} / K_i] = p$. On raisonne alors par récurrence.

C/ Dans le cas général, soit K_o l'extension de $\sqrt{K}$ composée de toutes les extensions de degré fini premier à p de $\sqrt{K}$. Toute sous-extension de K_o est de degré premier à p , toute extension finie de K est degré une puissance de p et $\sqrt{K_o} = K_o$.

Si $\alpha \in \tilde{K}$, alors $\exists \gamma \in K_o$ tel que $\omega(\alpha-\gamma) \geq (1-1/\ell)\, \Delta_{K_o}(\alpha) \geq (1-1/\ell)\Delta_K(\alpha)$.
Soit $J = \sqrt{K}(\gamma)$, alors

$$\theta = [J : \sqrt{K}]^{-1} \; \mathrm{tr}_{J/\sqrt{K}}(\gamma) \quad \text{vérifie}$$
$$\omega(\theta - \alpha) \geq (1-1/\ell)\, \Delta_K(\alpha) .$$

A l'aide des théorèmes 1, 2, 3, montrons le théorème fondamental.

Soit $\lambda \in \omega(\tilde{K}^*)$, ℓ entier > 1 .

Posons $\omega(K, \ell, \lambda) = \lambda + \dfrac{p}{(p-1)^2}\, \omega(p)$ si $car(K) = 0$ et $car(k) = p > 0$,

$$\omega(K, \ell, \lambda) = \frac{\lambda}{1-1/\ell} \quad \text{si} \quad car(K) = p > 0$$
$$\omega(K, \ell, \lambda) = \lambda \qquad \text{si} \quad car(k) = 0 .$$

Si $c \in \hat{L}$, $\exists \alpha \in L$ tel que $\omega(\alpha - c) \geq \omega(K, \ell, \lambda)$. Supposons de plus c invariant par tout σ de G .

Montrons alors que $\Delta(\alpha) \geq \omega(K, \ell, \lambda)$. En effet, si $\sigma_o \in G$ est tel que

$$\Delta(\alpha) = \omega(\sigma_o(\alpha)-\alpha) ,$$

on a
$$\Delta(\alpha) = \omega(\sigma_o(\alpha)-c+c-\alpha) ,$$
$$\Delta(\alpha) = \omega(\sigma_o(\alpha)-\sigma_o(c)+c-\alpha) \geq \quad \omega(\sigma_o(\alpha-c)),\ \omega(c-\alpha) ,$$
$$\Delta(\alpha) \geq \omega(c-\alpha) \geq \omega(K, \ell, \lambda) .$$

Utilisant alors le théorème 1 ou 2 ou 3, on sait $\exists\, a \in \sqrt{K}$ tel que

$$\omega(\alpha - a) \geq \Delta(\alpha) - \frac{p}{(p-1)^2}\, \omega(p) \geq \omega(K,\ell,\lambda) - \frac{p}{(p-1)^2}\, \omega(p) = \lambda$$

(resp. $\omega(\alpha - a) \geq \Delta(\alpha)(1-1/\ell) \geq \omega(K, \ell, \lambda)(1-1/\ell) = \lambda$)

(resp. $\omega(\alpha - a) \geq \Delta(\alpha) \geq \omega(K, \ell, \lambda) = \lambda$).

On en déduit, alors, dans tous les cas $\omega(c-a) \geq \lambda$.

II. - LE CONTREXEMPLE DE SHANKAR SEN

Soit K un corps local d'uniformisante π et L une extension normale (finie ou non) de K , soit $G = gal(L/K)$. Pour toute extension valuée J de K , A_J désigne l'anneau de valuation de J .

Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_L & \xrightarrow{\pi^n} & A_L & \longrightarrow & \dfrac{A_L}{\pi^n A_L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \pi & & \uparrow 1 & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_L & \xrightarrow{\pi^{n+1}} & A_L & \longrightarrow & \dfrac{A_L}{\pi^{n+1} A_L} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en prenant les groupes de cohomologie de ces G_L modules, on obtient le diagramme commutatif suivant à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & A_K & \xrightarrow{\pi^n} & A_K & \longrightarrow & \left(\dfrac{A_L}{\pi^n A_L}\right)^G & \xrightarrow{\delta} & H_1(G, A_L) & \xrightarrow{\pi^n} & H^1(G, A) & \longrightarrow \\ & \uparrow \pi & & \uparrow 1 & & \uparrow & & \uparrow \pi & & \uparrow 1 & \\ \longrightarrow & A_K & \xrightarrow{\pi^{n+1}} & A_K & \longrightarrow & \left(\dfrac{A_L}{\pi^{n+1} A_L}\right)^G & \xrightarrow{\delta} & H_1(G, A_L) & \xrightarrow{\pi^{n+1}} & H^1(G, A_L) & \longrightarrow \end{array}$$

où $\left(\dfrac{A_L}{\pi^n A_L}\right)^G$ désigne l'ensemble des invariants de A_L modulo π^n.

On en déduit alors immédiatement le diagramme commutatif suivant à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dfrac{A_K}{\pi^n A_K} & \longrightarrow & \left(\dfrac{A_L}{\pi^n A_L}\right)^G & \longrightarrow & H^1(G, A_L)_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \pi & & \\ 0 & \longrightarrow & \dfrac{A_K}{\pi^{n+1} A_K} & \longrightarrow & \left(\dfrac{A_L}{\pi^{n+1} A_L}\right)^G & \longrightarrow & H^1(G, A_L)_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ou $H^1(G, A_L)_n = \{\alpha \in H^1(G, A_L) / \pi^n \alpha = 0\}$, $(H^1(G, A_L)_n, \pi)$ constituent un système projectif. On obtient en passant à la limite projective la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{A}_K \longrightarrow \hat{A}_L^G \longrightarrow \varprojlim H^1(G, A)_n \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\hat{A}_K \simeq \hat{A}_L^G \Leftrightarrow \varprojlim H^1(G, A)_n = 0$.

Il est aisé de montrer que $\varprojlim H^1(G, A)_n = 0 \Leftrightarrow \varprojlim H^1(G, A) = 0$, d'où le lemme :

LEMME. $\hat{A}_K \simeq \hat{A}_L^G \Leftrightarrow \varprojlim H^1(G, A) = 0$.

THEOREME DE SHANKAR SEN. *Si* $K \to L$ *est une extension galoisienne (finie ou non) d'un corps local, alors* $H_1(G, A_L)$ *est annulé par* p .

Ce théorème permet de prouver qu'en caractéristique zéro $\varprojlim H^1(G, A) = 0$.

Structure de $H^1(G, A)$

I. - Soit F un corps local de valuation $\omega : F^* \to Z$, soit π l'uniformisante de F , A_F l'anneau de valuation de F , soit f le corps des restes de F .

Un automorphisme σ de F est dit durement ramifié si $\forall x \in A_F$ $\omega(\sigma - 1)x > 1$. Si caract(F) = 0 , alors A_F est une extension finie de l'anneau de valuation au sous-corps inerte de F qui est invariant par σ, σ est donc d'ordre fini.

Si caract(F) = $p > 0$, alors K est isomorphe à un corps de séries formelles à coefficients dans k . σ peut être d'ordre infini.

On pose $i(\sigma) = \omega(\frac{(\sigma - 1)\pi}{\pi})$, $i(\sigma)$ ne dépend pas de π. Si $\mu \in N^*$, σ^μ est durement ramifié ; on pose $i(\mu) = i(\sigma^\mu)$. Si $u = p^{0(\mu)} s$ avec $(s, p) = 1$, on a $i(\mu) = i(0(\mu))$. Posons $i_n = i(\sigma p^n)$.

On obtient une suite $i_1 < i_2 < \dots < i_n <$ strictement croissante. Shankar Sen démontre le théorème suivant (conjecturé par Grothendieck).

THEOREME 1 (Hasse-Arf). - *Si* σ *est un automorphisme durement ramifié d'un corps local, alors* $\forall n > 0$

$$i_n \equiv i_{n-1} \mod(p^n) .$$

THEOREME 2. *Soient* F *un corps local,* σ *un automorphisme durement ramifié d'ordre* p^n *de* F , G *le groupe engendré par* σ *et soit* K *le corps des invariants dans* F *par* G , A_F *est un* $A_K[G]$ *module et* $H^1(G, A_F)$ *est un* A_K *module dont la structure est la suivante :*

$$H^1(G, A_F) \simeq \bigoplus_{\mu = 1}^{\mu = p^n - 1} \frac{A_K}{\pi^{(\mu)} A_K}$$

où π *est une uniformissante de* K *et* $(\mu) = [\frac{\mu + i(\mu)}{p^n}]$, *où* $[x]$ *désigne la partie entière de* x .

On sait de plus ici que

$$H^1(G, A_F) = \frac{Tr(0)}{(\sigma - 1\!\!1) A_F}$$

où $Tr(0) = \{x \in F \ / \ Tr_{F/K}(x) = 0\}$.

D'après le théorème 90 de Hilbert, on peut écrire

$$H^1(G, A_F) = \frac{A_F \cap (\sigma - 1\!\!1)F}{(\sigma - 1\!\!1) A_F} .$$

Le contrexemple de Shankar Sen

Soit K un corps local de caractéristique p et à corps des restes finis. Soit L une Γ extension de K, c'est-à-dire une extension galoisienne complètement ramifiée dure dont le groupe de Galois G sur K est isomorphe à l'anneau des entiers p adiques Z_p. On a la décomposition classique

$$K \to K_1 \to K_2 \to \ldots \to K_n \to \ldots \to L$$

où les K_i sont des extensions cycliques de K de degré p^n et dont le groupe de Galois G_i est isomorphe à Z/p^iZ.

On a ici $H^1(G, A_L) = \varinjlim H^1(G_i, A_i)$.

Comme $G = \varprojlim Z/p^iZ$, il existe un élément σ de G appelé générateur topologique de G dont la restriction à K_n est un générateur σ_i du groupe cyclique G_i. σ_i est durement ramifié pour $\forall i$.

On définit comme dans le cas d'une extension finie, une suite i_n de la façon suivante, si $n' > n$ $i_{K_{n'}/K}(\sigma_{n'}^{p^n})$ ne dépend pas de n', on posera

$$i_{K_{n'}/K}(\sigma_{n'}^{p^n}) = i_n .$$

On a alors $i_n \equiv i_{n-1} \pmod{p^n}$, et

$$i_n \geq (p(p-1)+1)\, i_{n-1} . \qquad \text{(I)}$$

A l'aide de ces propriétés, on obtient le théorème suivant :

THEOREME 3. Si K est un corps local de caractéristique p, de corps des restes finis, d'uniformisante π, si L est une Γ extension de K, si $G = \mathrm{gal}(L:K)$, alors si $\alpha \in H^1(G, A_L)$ est divisible par π, il est divisible par π^r pour tout r.

D'après ce théorème, pour démontrer que $\varprojlim H^1(G, A_L)$ n'est pas nulle, il suffit alors de démontrer que

$$\pi H^1(G, A_L) \neq 0$$

c'est-à-dire puisque $H^1(G, A_L) = \varinjlim H^1(G_i, A_i)$ il suffit de démontrer que à partit d'un certain i, $\pi H^1(G_i, A_i) \neq 0$.

En vertu du théorème 2, il suffit donc de démontrer que, à partir d'un certain rang, $(\mu) > 1$ ce qui se fait à l'aide de l'inégalité (I).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AX. - Zéros of polynomials over local fields. The Galois action. Journal of algebra 15 p. 417-428 (1970).

[2] M. J. FERTON. - Théorème de Tate sur les invariants. Séminaire de Théorie des Nombres. Institut de Mathématiques Pures. Université Scienfifique et Médicale de Grenoble (13 janvier 1971).

[3] SHANKAR SEN. - On automorphisms of local fields. Annals of Math. t. 90, 1969, p. 33-40.

[4] J. T. TATE. - p-divisible groups. Procedings of a conférence on local fields (Driebergen) NUFFIC, 1966, Springer-Verlag.

-:-:-:-

Gérard GARANDEL
U. E. R. de Mathématiques
et d' Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E