Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux

Hubert Delange

Sur la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques additives

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 17, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A17_0>

SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS ARITHMETIQUES ADDITIVES

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

1. - Le problème que nous allons traiter pour les fonctions réelles additives peut être posé d'une façon générale pour une fonction arithmétique réelle.

Soit donc f une fonction arithmétique réelle.

Pour chaque $\underline{n}$ entier >0, nous définissons une mesure μ_n sur $\mathbb{R}$ par

(1) $$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \delta_{f(m)} ,$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x.

On a évidemment $\mu_n(\mathbb{R}) = 1$.

1. 1. - On peut se demander si la suite $\{\mu_n\}$ converge étroitement vers une mesure limite μ (satisfaisant donc à $\mu(\mathbb{R}) = 1$). S'il en est ainsi, on dira que <u>la fonction</u> f <u>possède une distribution limite.</u>

Si $\sigma_n(u) = \mu_n(]-\infty, u])$, on sait que la convergence étroite de la suite $\{\mu_n\}$ est équivalente à la propriété suivante :

Il existe une fonction réelle σ croissante sur $\mathbb{R}$, satisfaisant à

$$\lim_{u\to -\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \sigma(u) = 1 ,$$

telle que, pour tout $\underline{u}$ tel que σ soit continue en u, $\sigma_n(u)$ tend vers $\sigma(u)$.

Si l'on pose

$$\nu_n(u) = \text{nombre des } m \leq n \text{ tels que } f(m) \leq u ,$$

on voit que l'on a

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{n}\,\nu_n(u) \quad .$$

On peut interpréter $\sigma_n(u)$ comme étant la probabilité pour que $f(m) \leq u$ lorsque l'on choisit au hasard $\underline{m}$ parmi les entiers de 1 à $\underline{n}$, chacun de ces entiers ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être choisi. Autrement dit, σ_n est la fonction de distribution d'une variable aléatoire X_n définie de la façon suivante :

L'ensemble des évènements élémentaires est l'ensemble E_n des entiers de 1 à n ; on le probabilise en prenant comme probabilité d'un sous-ensemble A le quotient par $\underline{n}$ du nombre des éléments de A ; X_n est la fonction obtenue en restreignant f à E_n.

Dire que la fonction f possède une distribution limite signifie que la suite des variables aléatoires X_n possède une loi de probabilité limite.

D'après un théorème bien connu, pour qu'il existe une loi limite, il faut et il suffit que la suite des fonctions caractéristiques des X_n converge vers une fonction continue.

On sait que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est la fonction de la variable réelle t égale à l'espérance mathématique de $\exp(itX)$.

La fonction caractéristique de la variable aléatoire X_n considérée ici est donc égale à

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp(itf(m)) .$$

On voit ainsi que, pour que la fonction f possède une distribution limite, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp(itf(m)) .$$

converge vers une fonction continue de t quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$.

1. 2. - Nous allons nous intéresser ici au cas où la fonction f ne possède pas de distribution limite, c'est-à-dire où la suite des mesures $\{\mu_n\}$ définies plus haut ne converge pas étroitement vers une mesure limite.

L'idée est alors de chercher s'il est possible d'obtenir une suite étroitement convergente en faisant subir à chaque mesure μ_n une translation convenable.

Autrement dit, nous cherchons si l'on peut trouver une suite $\{\alpha_n\}$ de nombres réels telle que la suite des mesures μ_n définies, non plus par la formule (1) mais par

$$(2) \qquad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \delta_{f(m)-\alpha_n} ,$$

soit étroitement convergente.

Ceci s'interprète encore comme l'existence d'une loi de probabilité limite pour une suite de variables aléatoires. L'ensemble des évènements élémentaires est toujours l'ensemble des entiers de 1 à $\underline{n}$, que l'on probabilise comme plus haut ; la valeur de X_n pour l'entier $\underline{m}$ est maintenant $f(m) - \alpha_n$.

La fonction de distribution de X_n est maintenant

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{n} \nu_n(u+\alpha_n) \quad (= \mu_n(]-\infty, u])).$$

Lorsque la suite des variables aléatoires X_n considérées ici possède une loi de probabilité limite -ce qui équivaut à dire que la suite des mesures μ_n définies par (2) est étroitement convergente- nous disons que

$f(m) - \alpha_n$ <u>possède une distribution limite.</u>

Remarquons que, si l'on a $\alpha_n = 0$ pour tout $\underline{n}$, on retombe sur le cas considéré plus haut, où la fonction f possède une distribution limite.

La fonction caractéristique de X_n est ici égale à

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\{it(f(m)-\alpha_n)\} = e^{-it\alpha_n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp(itf(m)).$$

Donc, pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit que

$$e^{-it\alpha_n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp(it\,f(m))$$

converge vers une fonction continue de t lorsque $\underline{n}$ tend vers $+\infty$.

Nous introduisons, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction arithmétique F_t définie par

$$F_t(n) = \exp(it\,f(n)).$$

On voit alors que la condition précédente peut s'exprimer de la façon suivante :

<u>Pour que</u> $f(m) - \alpha_n$ <u>possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe une fonction complexe</u> Φ <u>continue sur</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que, pour chaque</u> $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \Phi(t)\, e^{it\alpha_n} + o(1) \quad \underline{\text{quand}}\ n \to +\infty.$$

Remarquons que, s'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il en existe une infinité et elles s'obtiennent toutes à partir de l'une d'entre elles par l'addition d'une suite convergente quelconque.

Celà tient à ce que, si une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires possède une loi de probabilité limite, il en est de même de la suite $\{X_n - \lambda_n\}$, où $\{\lambda_n\}$ est une suite de constantes réelles, si, et seulement si, la suite $\{\lambda_n\}$ est convergente.

En effet, remplacer la suite $\{\alpha_n\}$ par $\{\alpha_n + \lambda_n\}$ revient à remplacer la variable aléatoire X_n considérée plus haut par $X_n - \lambda_n$.

2. - A partir de maintenant, la fonction arithmétique réelle f est supposée additive.

Comme une fonction additive est déterminée par ses valeurs pour les puissances des nombres premiers, il est naturel de chercher des conditions portant sur les valeurs de f pour les puissances des nombres premiers. En fait, comme on va le voir, seules les valeurs de f pour les nombres premiers eux-mêmes interviennent dans les problèmes qui nous occupent, mais non celles pour leurs puissances d'exposants > 1 .

Le problème de l'existence d'une distribution limite pour la fonction f a été complètement résolu par Erdös et Wintner[1]. La solution est la suivante :

Définissons f^* sur l'ensemble des nombres premiers par :

$$f^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } |f(p)| \leq 1 , \\ 1 & \text{si } |f(p)| > 1 . \end{cases}$$

Alors, pour que la fonction f possède une distribution limite, il faut et il suffit que les deux séries

$$\Sigma \frac{f^*(p)}{p} \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{f^*(p)^2}{p}$$

soient convergentes.

Erdös a montré ensuite [2] que, si l'on suppose seulement que la deuxième de ces séries est convergente, c'est-à-dire que si l'on a

$$(3) \qquad \Sigma \frac{f^*(p)^2}{p} < +\infty ,$$

on peut affirmer que $f(m) - \alpha_n$ a une distribution limite à condition que l'on ait pour n infini

$$\alpha_n = \sum_{p \leq n} \frac{f^*(p)}{p} + C^{te} + o(1) .$$

Remarquons que la suite $\{\alpha_n\}$ satisfait alors à la condition :

$$(4) \qquad \sup_{n \le n' \le n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| = o(1) \qquad (n \to +\infty).$$

Il suffit évidemment de le montrer en supposant

$$\alpha_n = \sum_{p \le n} \frac{f^*(p)}{p} .$$

Dans ce cas, lorsque $n > 1$, on a pour $n < n' \le n^2$

$$|\alpha_{n'} - \alpha_n| = \Big| \sum_{n < p \le n'} \frac{f^*(p)}{p} \Big| \le \sum_{n < p \le n^2} \frac{|f^*(p)|}{p} ,$$

de sorte que

$$\sup_{n \le n' \le n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| \le \sum_{n < p \le n^2} \frac{|f^*(p)|}{p} .$$

Mais le second membre de cette dernière inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy, son carré est au plus égal à

$$\Big(\sum_{n < p \le n^2} \frac{1}{p} \Big) \Big(\sum_{n < p \le n^2} \frac{f^*(p)^2}{p} \Big) .$$

D'après une évaluation bien connue de $\sum_{p \le x} \frac{1}{p}$, la première somme tend vers log 2 quand n tend vers $+\infty$. La seconde tend vers zéro d'après l'hypothèse que l'on a (3).

Il résulte du théorème 4 de notre article "On a class of multiplicative arithmetical functions"[(3)] que, si $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, la suite $\{\alpha_n\}$ satisfaisant à la condition (4), ou même à la condition plus large

$$\sup_{n \le n' \le n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| = O(1) ,$$

on a nécessairement (3).

Nous appellerons "condition d'Erdös" la condition (3).

Il est à noter que, si l'on n'impose aucune restriction à la suite $\{\alpha_n\}$, il est possible que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite sans que la condition d'Erdös soit satisfaite.

On en a un exemple simple en prenant $f(n) = \log n$. On voit immédiatement que $f(m) - \log n$ possède alors une distribution limite car on a

$$\nu_n(u+\log n) = \begin{cases} [n\,e^u] & \text{si } u<0\,, \\ n & \text{si } u \geq 0\,, \end{cases}$$

de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}\,\nu_n(u+\log n)$ tend vers e^u pour $u < 0$ et 1 pour $u \geq 0$.

Cependant on a $f^*(p) = 1$ pour $p > 3$, et par suite

$$\Sigma\,\frac{f^*(p)^2}{p} = +\infty\,.$$

3. - On peut obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

On a le théorème suivant :

<u>Pour qu'il existe une suite</u> $\{\alpha_n\}$ <u>telle que</u> $f(m) - \alpha_n$ <u>possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel</u> a <u>tel que la fonction</u> g (<u>évidemment additive</u>) <u>définie par</u>

$$g(n) = f(n) - a \log n$$

<u>satisfasse à la condition d'Erdös.</u>

<u>Lorsque ceci a lieu,</u> $f(m) - \alpha_n$ <u>possède une distribution limite si, et seulement si, on a pour</u> n <u>infini</u>

$$\alpha_n = \sum_{p\leq n} \frac{g^*(p)}{p} + a \log n + C^{te} + o(1)\,,$$

<u>où</u> $g^*(p)$ <u>est défini à partir de</u> g <u>comme</u> $f^*(p)$ <u>à partir de</u> f.

3. 1. - Remarquons d'abord que, pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il est nécessaire que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ tende vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

En effet, supposons que $f(m)-\alpha_n$ possède une distribution limite, et soit $\varepsilon > 0$.

On va voir que l'on aboutit à une contradiction en supposant que l'on ait $|\alpha_{n+1}-\alpha_n| > \varepsilon$ pour une infinité de $\underline{n}$.

On sait qu'il existe une fonction réelle σ croissante sur $\mathbb{R}$, satisfaisant à

$$\lim_{u\to-\infty} \sigma(u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{u\to+\infty} \sigma(u) = 1 \ ,$$

telle que, pour tout $\underline{u}$ tel que σ soit continue en u , $\sigma_n(u) = \frac{1}{n}\,\nu_n(u+\alpha_n)$ tend vers $\sigma(u)$.

Soient u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 \leq u_1+\varepsilon$ et tels que σ soit continue en u_1 et en u_2 .

Si l'on a $\alpha_{n+1}-\alpha_n > \varepsilon$, on a $u_1+\alpha_{n+1} > u_2+\alpha_n$ et par suite

$$\nu_{n+1}(u_1+\alpha_{n+1}) \geq \nu_{n+1}(u_2+\alpha_n) \geq \nu_n(u_2+\alpha_n) \ ,$$

d'où

$$\sigma_{n+1}(u_1) \geq \frac{n}{n+1}\,\sigma_n(u_2) \ .$$

Si ceci avait lieu pour une infinité de $\underline{n}$, on en déduirait par passage à la limite que $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2)$, et par suite $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$.

Si l'on a $\alpha_{n+1}-\alpha_n < -\varepsilon$, on a $u_1+\alpha_n > u_2+\alpha_{n+1}$ et par suite

$$\nu_{n+1}(u_2+\alpha_{n+1}) \leq \nu_{n+1}(u_1+\alpha_n) \leq \nu_n(u_1+\alpha_n) + 1 \ ,$$

d'où

$$\sigma_{n+1}(u_2) \leq \frac{n}{n+1}\,\sigma_n(u_1) + \frac{1}{n+1} \ .$$

Si ceci avait lieu pour une infinité de $\underline{n}$, on en déduirait encore par passage à la limite que $\sigma(u_2) \leq \sigma(u_1)$, et par suite $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$.

On voit donc que l'hypothèse que l'on ait $|\alpha_{n+1}-\alpha_n| > \varepsilon$ pour une infinité de $\underline{n}$ impliquerait que, quels que soient u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 \leq u_1+\varepsilon$ et tels que σ soit continue en u_1 et en u_2 , on aurait $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$. Ceci entraînerait à son tour que $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$ quels que soient

u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 < u_1 + \varepsilon$ (car on peut trouver u'_1 et u'_2 tels que $u'_1 \le u_1 < u_2 \le u'_2$ et $u'_2 - u'_1 \le \varepsilon$, et que σ soit continue en u'_1 et en u'_2). C'est incompatible avec le fait que

$$\lim_{u\to-\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \sigma(u) = 1 .$$

3. 2. - Ceci dit, notre démonstration est basée essentiellement sur le théorème suivant dû à Halász.

<u>Soit</u> F <u>une fonction multiplicative complexe satisfaisant à</u>

$$|F(n)| \le 1 \qquad \text{pour tout } n .$$

<u>L'une des deux circonstances suivantes a lieu :</u>

1) $\frac{1}{x}\sum_{m\le x} F(m)$ <u>tend vers zéro quand</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$;

2) <u>On a quand</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{m\le x} F(m) = Cx^{i\alpha} \exp(iA(\log x)) + o(1) ,$$

<u>où</u> C <u>est une constante complexe non nulle</u>, α <u>une constante réelle</u>, <u>et</u> A <u>une fonction réelle définie sur</u> $\mathbb{R}^+$, <u>à variation bornée sur tout intervalle fini</u> $[o, U]$, <u>et satisfaisant à</u>

$$\lim_{u\to+\infty} (A(\lambda u) - A(u)) = o \qquad \text{pour tout } \lambda > o ,$$

<u>la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé</u> $[\lambda_1, \lambda_2]$ <u>contenu dans l'intervalle ouvert</u> $]o, +\infty[$.

3. 3. - Supposons que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

On sait qu'il existe une fonction complexe Φ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a quand <u>n</u> tend vers $+\infty$

$$(5) \qquad \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \Phi(t)\, e^{it\alpha_n} + o(1) .$$

Comme $F_o(m) = 1$ pour tout m, on a $\Phi(0) = 1$. Par suite $\Phi(t) \neq 0$ si t est assez petit ; donc il existe des $t \neq 0$ tels que $\Phi(t) \neq 0$. Soit t_o un tel t.

Du fait que f est additive, la fonction F_{t_o} est multiplicative. Comme on a évidemment $|F_{t_o}(n)| = 1$ pour tout $\underline{n}$, le théorème de Halász s'applique à F_{t_o}. Mais la formule (5) pour $t = t_o$ montre que $\left|\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_{t_o}(m)\right|$ tend vers $|\Phi(t_o)|$ quand n tend vers $+\infty$. On est donc nécessairement dans le deuxième cas du théorème de Halász.

On a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_{t_o}(m) = C\, x^{i\alpha} \exp(i\, A(\log x)) + o(1) \quad ,$$

où C, α et A sont ce qui a été dit plus haut.

En prenant $x = n$, on voit que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_{t_o}(m) &= C\, n^{i\alpha} \exp(i\, A(\log n)) + o(1) \\ &= C \exp\{i(\alpha \log n + A(\log n))\} + o(1) \;. \end{aligned}$$

Il résulte alors de (5) pour $t = t_o$ que l'on a

$$\Phi(t_o)\, e^{it_o \alpha_n} = C \exp\{i(\alpha \log n + A(\log n))\} + o(1) \;,$$

de sorte que

$$\exp\{i(t_o \alpha_n - \alpha \log n - A(\log n))\} \quad \text{tend vers} \quad \frac{C}{\Phi(t_o)}$$

(qui est donc nécessairement de module 1).

En posant $\theta_n = t_o \alpha_n - \alpha \log n - A(\log n)$, on peut dire que la suite $\{e^{i\theta_n}\}$ est convergente.

Du fait que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ tend vers zéro et des propriétés de la fonction A il résulte que $\theta_{n+1} - \theta_n$ tend vers zéro. Alors il est facile de voir que la convergence de la suite $\{e^{i\theta_n}\}$ entraîne celle de la suite $\{\theta_n\}$.

Si θ est la limite de cette dernière suite, on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$t_o \alpha_n - \alpha \log n - A(\log n) = \theta + o(1) ,$$

d'où

$$(6) \qquad \alpha_n = a \log n + B(\log n) + o(1) ,$$

où $\quad a = \dfrac{\alpha}{t_o} \quad$ et $\quad B(u) = \dfrac{A(u)+\theta}{t_o}$.

Il est clair que B est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, U]$ et que l'on a :

$$\lim_{u \to +\infty} (B(\lambda u) - B(u)) = o \quad \text{pour tout} \quad \lambda > o ,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé $[\lambda_1, \lambda_2]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]o, +\infty[$.

En tenant compte de (6), (5) s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \Phi(t) n^{iat} \exp(it B(\log n)) + o(1) ,$$

ou

$$\sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \Phi(t) n^{1+iat} \exp(it B(\log n)) + o(n) .$$

Comme, pour $n \leq x < n+1$, $|x^{1+iat} - n^{1+iat}| \leq |1+iat|$ (car $x^{1+iat} - n^{1+iat} = \int_n^x (1+iat) u^{iat} du)$, on voit que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$(7) \qquad \sum_{m \leq x} F_t(m) = \Phi(t)\, x^{1+iat} \exp(it B(\log x)) + o(x) .$$

On déduit aisément de là que l'on a

$$(8) \qquad \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_t(m) m^{-iat} = (1+iat)\Phi(t) \exp(it B(\log x)) + o(1) .$$

En effet, si l'on pose

$$\Psi_t(x) = \sum_{m \leq x} F_t(m) ,$$

on a pour $x > 1$,

$$\sum_{m \le x} F_t(m)\, m^{-iat} = \int_{\frac{1}{2}}^{x} u^{-iat}\, d\Psi_t(u)$$

$$= \Psi_t(x)\, x^{-iat} + iat \int_1^x u^{-1-iat}\, \Psi_t(u)\, du \ ,$$

et, en tenant compte de (7), ceci donne

$$\frac{1}{x} \sum_{m \le x} F_t(m)\, m^{-iat} = \Phi(t)\, \{\exp(it\, B(\log x)) + \frac{iat}{x} \int_1^x \exp(it\, B(\log u))du\} + o(1).$$

Mais on a $\frac{1}{x} \int_1^x \exp(it\, B(\log u))du = \exp(it\, B(\log x)) + o(1)$

car

$$\left| \int_1^x \exp(it\, B(\log u))du - (x-1) \exp(it\, B(\log x)) \right| =$$

$$\left| \int_1^x \{\exp(it\, B(\log u)) - \exp(it\, B(\log x))\}du \right| \le 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$+ |t| \int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x} |B(\log u) - B(\log x)|\, du$$

et, quel que soit $\varepsilon > o$, on a dès que x est assez grand

$$|B(\log u) - B(\log x)| \le \varepsilon \quad \text{pour} \quad x^{\frac{1}{2}} \le u \le x \ .$$

Si l'on définit maintenant les fonctions arithmétiques g et G_t par

$$g(n) = f(n) - a \log n \quad \text{et} \quad G_t(n) = \exp(it\, g(n)) \ ,$$

(8) s'écrit :

$$\frac{1}{x} \sum_{m \le x} G_t(m) = (1+iat)\, \Phi(t) \exp(it\, B(\log x)) + o(1) \ .$$

En prenant $x = n$, on voit que l'on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{m=1}^{n} G_t(m) = (1+iat)\, \Phi(t)\, e^{it\beta_n} + o(1) \ ,$$

où $\beta_n = B(\log n)$.

Ceci montre que $g(m) - \beta_n$ possède une distribution limite.

Comme g est évidemment additive et comme on a

$$\sup_{n \le n' \le n^2} |\beta_{n'} - \beta_n| = o(1) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty \ ,$$

on peut appliquer notre résultat cité au § 2 et conclure que g satisfait à la condition d'Erdös.

3. 4. - Supposons maintenant qu'il existe un $\underline{a}$ réel tel que la fonction g définie par

$$g(n) = f(n) - a \log n$$

satisfasse à la condition d'Erdös, c'est-à-dire que, $g^*(p)$ étant défini pour chaque p premier par

$$g^*(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si} \quad |g(p)| \leq 1 , \\ 1 & \text{si} \quad |g(p)| > 1 , \end{cases}$$

on ait
$$\Sigma \frac{g^*(p)^2}{p} < +\infty .$$

Alors on sait que, si $\beta_n = \sum_{p \leq n} \frac{g^*(p)}{p}$, $g(m) - \beta_n$ possède une distribution limite.

Il existe donc une fonction complexe Φ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, G_t étant définie comme plus haut, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} G_t(m) = \Phi(t) e^{it\beta_n} + o(1) \qquad \text{quand } \underline{n} \text{ tend vers } +\infty .$$

On sait aussi que l'on a

$$\operatorname*{Sup}_{n \leq n' \leq n^2} |\beta_{n'} - \beta_n| = o(1) .$$

Si on définit une fonction B sur $\mathbb{R}^+$ par

$$B(u) = \beta_n \quad \text{pour} \quad \log n \leq u < \log(n+1) ,$$

on voit que l'on a

$$\lim_{u \to +\infty} (B(\lambda u) - B(u)) = o \quad \text{pour tout } \lambda > 0 ,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé $[\lambda_1 , \lambda_2]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]o, +\infty[$.

On voit aussi que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{m\leq x} G_t(m) = \Phi(t)\ \exp(it B(\log x)) + o(1)\ .$$

Un calcul semblable à celui qui a été fait au paragraphe précédent permet d'en déduire que

$$\frac{1}{x}\sum_{m\leq x} G_t(m)\, m^{iat} = \frac{\Phi(t)}{1+iat}\, x^{iat} \exp(it B(\log x)) + o(1)\ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x}\sum_{m\leq x} F_t(m) = \frac{\Phi(t)}{1+iat}\, x^{iat} \exp(it B(\log x)) + o(1)\ .$$

En prenant $x = n$, on voit que l'on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \frac{\Phi(t)}{1+iat}\, e^{it\gamma_n} + o(1)\ ,$$

où $\gamma_n = a \log n + B(\log n) = a \log n + \sum_{p\leq n} \frac{g^*(p)}{p}$.

Il en résulte que $f(m) - \gamma_n$ possède une distribution limite. Par suite $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite si, et seulement si, on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$\alpha_n = \gamma_n + C^{te} + o(1)\ .$$

Le résultat annoncé est ainsi complètement démontré.

Signalons que nous avons appris par une lettre de J. Kubilius que lui-même a obtenu le même résultat, qui a été établi également par B. V. Levin et N. M. Timofeev.

-:-:-:-

NOTES

(1) "Additive arithmetical functions and Statistical independence", American Journal of Mathematics, 61, 1939, pp. 713-721.

(2) "On the distribution function of additive functions", Annals of Mathematics 47, 1946, pp. 1-20.

(3) Scripta Mathematica, 26, pp. 121-141.
Signalons une faute d'impression : dans la relation (18), il faut lire $O(1)$ au lieu de $o(1)$.
On obtient le résultat énoncé ici en prenant

$$\Omega(x) = \alpha_n \quad \text{pour} \quad n \leq x < n+1 \ .$$

(4) "Uber die Mittelwerte multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen", Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 19, 1968, pp. 365-403.
Nous avons modifié un peu ici la façon d'énoncer le résultat.

-:-:-:-

H. DELANGE
22, allée des Troënes
91 - BURES-s-YVETTE