

J. J. PAYAN

## $\Gamma$ -extensions et invariants cyclotomiques

*Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1970-1971), exp. n° 16, p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=STNB\\_1970-1971\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971___A16_0)

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

$\Gamma$ -EXTENSIONS ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

(Résumé d'un exposé de J.J. PAYAN d'après un travail en commun avec F. BERTRANDIAS)

Soit  $p$  un nombre premier impair et  $K$  un corps contenant les racines  $p$ -ièmes de 1 et de caractéristique différente de  $p$ . On dira qu'une  $p$ -extension abélienne de  $K$  est  $p^\infty$ -extensible (resp  $\Gamma$ -extensible) si elle est contenue pour tout  $n$  entier  $\geq 1$  dans une extension cyclique de degré  $p^n$  sur  $K$  (resp si elle est contenue dans une  $\Gamma$ -extension de  $K$ ).

I - APPLICATION DE LA THEORIE DE KUMMER.

On note  $\Psi_K$  (resp  $\Theta_K$ ) le sous-groupe de  $K^*$  formé des  $\alpha$  tels que  $K(\alpha^{1/p})$  soit  $p^\infty$ -extensible (resp  $\Gamma$ -extensible).

Lemme. Pour que  $K(\alpha^{1/p})$  se plonge dans une extension cyclique de degré  $p^n$  de  $K$ , il faut et il suffit que  $\alpha \in K^{*p} \cdot N_{K_n/K}(K_n^*)$  (où  $K_n = K(\zeta_n)$ ,  $\zeta_n$  racine primitive  $p^n$ -ième de 1).

Propriété 1.  $\Psi_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^{*p} \cdot N_{K_n/K}(K_n^*)$ .

On note  $\Phi_K$  le groupe des normes associé à l'extension  $K_\infty/K$  où  $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Propriété 2. Si les applications  $N_{K_{n+1}/K_n} : \Phi_{K_{n+1}} \rightarrow \Phi_{K_n}$  sont toutes surjectives alors  $\Phi_K \cdot K^{*p} \subset \Theta_K$ .

Remarque : Dire que  $\dim_{\mathbb{F}_p} \Theta_K / K^{*p} < \infty$  revient à dire qu'il existe un nombre fini de  $\Gamma$ -extensions indépendantes sur  $K$ . Dans ce cas le nombre maximum  $s_K$  de  $\Gamma$ -extensions indépendantes de  $K$  est égal à  $\dim_{\mathbb{F}_p} \Theta_K / K^{*p}$ .

## II - APPLICATION AUX CORPS DE NOMBRES.

On suppose maintenant que  $K$  est un corps de nombres.

Lemme.  $K$  étant un corps de nombres, si  $K(\alpha^{1/p})$  est  $p^\infty$ -extensible,  $K(\alpha^{1/p})/K$  est non ramifiée en dehors de  $p$ .  $\dim_{\mathbb{F}_p} \Psi_K/K^{*p}$  est donc finie.

Remarque : La conjecture de Leopoldt sur le régulateur  $p$ -adique est vérifiée pour le couple  $(p, K)$  si on démontre que  $\dim_{\mathbb{F}_p} \Psi_K/K^{*p} = r_2 + 1$  (où  $2r_2$  nombre de plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ ). Il n'y a pas équivalence comme on peut le voir sur des exemples !

On montre alors grâce à la théorie du corps de classes local [2] et au théorème des normes de Hasse.

Théorème 1. Si  $K$  est un corps de nombres contenant les racines  $p$ -ièmes de l'unité, dans lequel  $(p)$  est divisible par un seul idéal premier, et dont le nombre de classes n'est pas divisible par  $p$  alors  $\Psi_K = \Theta_K = P_K/K^{*p}$  (où  $P_K$  est le groupe des  $p$ -unités de  $K$ ) et la conjecture de Leopoldt est vraie pour le couple  $(p, K)$ .

Remarque : On trouve facilement des exemples de corps  $K$  satisfaisant aux hypothèses du théorème sans vérifier celles de Brumer [1].

Dans le cas où plusieurs idéaux premiers divisent  $p$  il semble que les choses se compliquent notablement. Le résultat suivant donne une réponse très partielle.

Théorème 2. Si  $K$  est un corps de nombres galoisien sur  $\mathbb{Q}$ , contenant le groupe  $\mu_m$  des racines  $p^m$ -ièmes de 1 mais pas  $\mu_{m+1}$ , où  $(p)$  est divisible par deux idéaux premiers seulement  $(p) = (pp')^e$  dont on note  $k$  le corps de décomposition et où  $p$  ne divise pas  $h_K$ .

Alors a) si  $k$  est imaginaire, on a  $\dim \Psi_K/K^{*p} = r_2 + 2$  ou  $r_2 + 1$  suivant qu'un générateur  $\eta$  de  $p_k^{h_k}$  (où  $p_k = p \cap k$  et  $h_k$  nombre de classes de  $k$ ) vérifie  $\eta^{p-1} \equiv 1 \pmod{p_k^2}$  ou  $\eta^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p_k^2}$ . De plus dans ce cas  $m = 1$ .

b) si  $k$  est réel et si  $p^m$  ne divise pas  $e$  la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour le couple  $(p, K)$ .

La détermination de  $\Phi_K$  semble un peu plus facile. Grâce encore à la théorie du corps de classes local et au théorème des normes de Hasse on montre que

Propriété 3. Si  $K$  est une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  contenant  $\mu_p$  et  
si  $p_1, p_2, \dots, p_g$  désignent les idéaux premiers qui divisent  $(p)$  et  
 $k_1, k_2, \dots, k_g$  leurs corps de décompositions respectifs alors  $\Phi_K = \{\alpha \in P_K \mid$   
Pour tout  $i = 1, \dots, g$ ,  $N_{K/k_i}(\alpha) \in p_i^{\mathbb{Z}}\}$  .

Corollaire. Si  $g = 1$ ,  $\Phi_K = P_K$  .

Un cas particulier intéressant est celui où  $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  avec  $p$  proprement irrégulier. Iwasawa [4] nous apprend que dans ce cas les applications  $N_{K_{n+1}/K_n} : \Phi_{K_{n+1}} \rightarrow \Phi_{K_n}$  sont surjectives, si on utilise le corollaire de la propriété 3 on en déduit  $P_K \cdot K^{*p} \subset \Theta_K$  . Brumer a montré [1] que pour ce  $K$  la conjecture de Leopoldt est vraie. Il en résulte :

Propriété 4. Si  $p$  est régulier ou proprement irrégulier et  $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ ,  
 $K(\alpha^{1/p})$  est  $\Gamma$ -extensible si et seulement si  $K(\alpha^{1/p})$  est "définissable" à  
l'aide d'une p-unité. C'est à dire si et seulement si on peut trouver  $\beta \in P_K$   
avec  $\alpha \in \beta K^{*p}$  .

### Références.

- [1] - A. BRUMER - "On the units of algebraic number fields". Mathematika 14 1967, pp.121-124.
- [2] - C. CHEVALLEY - "Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et dans les corps locaux". Journ. of Fac. Sc. Tokyo 1933, pp. 365-476.
- [3] - K. IWASAWA - "Notes d'un séminaire à Princeton" 1966.
- [4] - K. IWASAWA - "Some modules in local cyclotomic fields". Coll. C.N.R. Clermont-Ferrand (1964).

Université de Grenoble -----  
 Institut de Mathématiques Pures  
 Boîte Postale 116  
 38 - Saint-Martin-d'Hères