J. J. PAYAN

Γ-extensions et invariants cyclotomiques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 16, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A16_0>

Γ-EXTENSIONS ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

(Résumé d'un exposé de J.J. PAYAN d'après un travail en commun avec F. BERTRANDIAS)

Soit p un nombre premier impair et K un corps contenant les racines p-ièmes de 1 et de caractéristique différente de p. On dira qu'une p-extension abélienne de K est p^{∞}-extensible (resp Γ-extensible) si elle est contenue pour tout n entier ≥ 1 dans une extension cyclique de degré p^n sur K (resp si elle est contenue dans une Γ-extension de K.

I - APPLICATION DE LA THEORIE DE KUMMER.

On note Ψ_K (resp Θ_K) le sous-groupe de K^* formé des α tels que $K(\alpha^{1/p})$ soit p^{∞}-extensible (resp Γ-extensible).

Lemme. Pour que $K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une extension cyclique de degré p^n de K, il faut et il suffit que $\alpha \in K^{*p} N_{K_n/K}(K_n^*)$ (où $K_n = K(\zeta_n)$, ζ_n racine primitive p^n-ième de 1).

Propriété 1. $\Psi_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^{*p} N_{K_n/K}(K_n^*)$.

On note Φ_K le groupe des normes associé à l'extension K_∞/K où $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Propriété 2. Si les applications $N_{K_{n+1}/K_n} : \Phi_{K_{n+1}} \to \Phi_{K_n}$ sont toutes surjectives alors $\Phi_K . K^{*p} \subset \Theta_K$.

Remarque : Dire que $\dim_{\mathbb{F}_p} \Theta_K/K^{*p} < \infty$ revient à dire qu'il existe un nombre fini de Γ-extensions indépendantes sur K. Dans ce cas le nombre maximum s_K de Γ-extensions indépendantes de K est égal à $\dim_{\mathbb{F}_p} \Theta_K/K^{*p}$.

II - APPLICATION AUX CORPS DE NOMBRES.

On suppose maintenant que K est un corps de nombres.

Lemme. K étant un corps de nombres, si $K(\alpha^{1/p})$ est p^{∞}-extensible, $K(\alpha^{1/p})/K$ est non ramifiée en dehors de p. $\dim_{F_p} \Psi_K/K^{*p}$ est donc finie.

Remarque : La conjecture de Leopoldt sur le régulateur p-adique est vérifiée pour le couple (p,K) si on démontre que $\dim_{F_p} \Psi_K/K^{*p} = r_2+1$ (où $2r_2$ nombre de plongements de K dans $\mathbb{C}$). Il n'y a pas équivalence comme on peut le voir sur des exemples !

On montre alors grâce à la théorie du corps de classes local [2] et au théorème des normes de Hasse.

Théorème 1. Si K est un corps de nombres contenant les racines p-ièmes de l'unité, dans lequel (p) est divisible par un seul idéal premier, et dont le nombre de classes n'est pas divisible par p alors $\Psi_K = \Theta_K = P_K K^{*p}$ (où P_K est le groupe des p-unités de K) et la conjecture de Leopoldt est vraie pour le couple (p,K).

Remarque : On trouve facilement des exemples de corps K satisfaisant aux hypothèses du théorème sans vérifier celles de Brumer [1].

Dans le cas où plusieurs idéaux premiers divisent p il semble que les choses se compliquent notablement. Le résultat suivant donne une réponse très partielle.

Théorème 2. Si K est un corps de nombres galoisien sur $\mathbb{Q}$, contenant le groupe μ_m des racines p^m-ièmes de 1 mais pas μ_{m+1}, où (p) est divisible par deux idéaux premiers seulement $(p) = (\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^e$ dont on note k le corps de décomposition et où p ne divise pas h_K.

Alors a) si k est imaginaire, on a $\dim \Psi_K/K^{*p} = r_2+2$ ou r_2+1 suivant qu'un générateur η de $\mathfrak{p}_k^{h_k}$ (où $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p} \cap k$ et h_k nombre de classes de k) vérifie $\eta^{p-1} \equiv 1 \ \mathfrak{p}_k'^2$ ou $\eta^{p-1} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{p}_k'^2)$. De plus dans ce cas $m = 1$.

b) si k est réel et si p^m ne divise pas e la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour le couple (p,K).

La détermination de Φ_K semble un peu plus facile. Grâce encore à la théorie du corps de classes local et au théorème des normes de Hasse on montre que

Propriété 3. Si K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant μ_p et si $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_g$ désignant les idéaux premiers qui divisent (p) et $k_1, k_2, \ldots, k_g$ leurs corps de décompositions respectifs alors $\Phi_K = \{\alpha \in P_K \mid$ Pour tout $i = 1, \ldots, g$, $N_{K/k_i}(\alpha) \in p^{Z}\}$.

Corollaire. Si $g = 1$, $\Phi_K = P_K$.

Un cas particulier intéressant est celui où $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ avec p proprement irrégulier. Iwasawa [4] nous apprend que dans ce cas les applications $N_{K_{n+1}/K_n} : \Phi_{K_{n+1}} \to \Phi_{K_n}$ sont surjectives, si on utilise le corollaire de la propriété 3 on en déduit $P_K . K^{*p} \subset \Theta_K$. Brumer a montré [1] que pour ce K la conjecture de Léopoldt est vraie. Il en résulte :

Propriété 4. Si p est régulier ou proprement irrégulier et $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $K(\alpha^{1/p})$ est Γ-extensible si et seulement si $K(\alpha^{1/p})$ est "définissable" à l'aide d'une p-unité. C'est à dire si et seulement si on peut trouver $\beta \in P_K$ avec $\alpha \in \beta K^{*p}$.

Références.

[1] - A. BRUMER - "On the units of algebraic number fields". Mathematika 14 1967, pp.121-124.

[2] - C. CHEVALLEY - "Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et dans les corps locaux". Journ. of Fac. Sc. Tokyo 1933, pp. 365-476.

[3] - K. IWASAWA - "Notes d'un séminaire à Princeton" 1966.

[4] - K. IWASAWA - "Some modules in local cyclotomic fields". Coll. C.N.R.S Clermont-Ferrand (1964).

Université de Grenoble
Institut de Mathématiques Pures
Boîte Postale 116
38 - Saint-Martin-d'Hères