

JACQUES MARTINET

Modules projectifs sur un ordre

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971___A15_0

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES PROJECTIFS SUR UN ORDRE

par

Jacques MARTINET

-:-:-

§. 1. - GROUPES DE GROTHENDIECK

Soit R un anneau, et $\mathcal{P}(R)$ la catégorie des R -modules à gauche projectifs de type fini. On désigne par $\mathcal{C}(R)$ une sous-catégorie de $\mathcal{P}(R)$, contenant les modules libres, stable pour la somme directe, et vérifiant la condition suivante : si P, P', P'' sont des objets de $\mathcal{P}(R)$, avec $P \simeq P' \oplus P''$, et si P et P' sont des objets de $\mathcal{C}(R)$, il en est de même de P'' .

Exemple 1. $\mathcal{C}(R) = \mathcal{P}(R)$.

Exemple 2. Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions, L une K algèbre de dimension finie, B un ordre de A dans L . On dira que le rang d'un B -module M est défini, et égal à r , si $K \otimes_A M$ est libre sur L , avec r générateurs. La catégorie $\mathcal{P}'(B)$ des B -modules projectifs de type fini dont le rang est défini vérifie nos hypothèses. On peut remarquer que $\mathcal{P}'(B) = \mathcal{P}(B)$ dans les deux cas suivants :

1) L'algèbre L est commutative et B est à spectre connexe (Bourbaki [3]).

2) L'anneau A est un anneau de Dedekind, L est l'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini dont l'ordre n n'est pas divisible par la caractéristique de K , et les facteurs premiers de n ne sont pas inversibles dans A (Swan [9]).

On attache à la catégorie \mathcal{C} deux groupes, notés $K_0(\mathcal{C})$ (groupe de Grothendieck) et $\tilde{K}_0(\mathcal{C})$, définis comme suit :

Le groupe $K_0(\mathcal{C})$ possède comme générateurs les classes d'isomorphismes de modules projectifs de \mathcal{C} , liées par les relations $\bar{P} = \bar{P}' + \bar{P}''$ chaque fois que $P \simeq P' \oplus P''$, \bar{P} désignant l'image de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ dans le groupe abélien libre ayant pour base les classes d'isomorphismes d'objets de \mathcal{C} . On notera $[P]$ l'image dans $K_0(\mathcal{C})$ de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$.

Il est clair, d'après la définition, que le groupe $K_0(\mathcal{C})$ avec la flèche $\varphi : P \rightarrow [P]$ de \mathcal{C} dans $K_0(\mathcal{C})$ est "universel" dans le sens suivant : si f est une flèche de \mathcal{C} dans un groupe abélien \mathcal{G} vérifiant $f(P' \oplus P'') = f(P') + f(P'')$, il existe un homomorphisme f^* unique de $K_0(\mathcal{C})$ dans \mathcal{G} , tel que $f = f^* \circ \varphi$.

Pour définir $\tilde{K}_0(\mathcal{C})$, on considère sur la classe des objets de \mathcal{C} la relation d'équivalence suivante : $P \sim P'$ s'il existe des modules libres de type fini L et L' , tels que $P \oplus L \simeq P' \oplus L'$. Le groupe $\tilde{K}_0(\mathcal{C})$ est l'ensemble quotient muni de la loi induite par la somme directe dans \mathcal{C} : si (P) désigne l'image dans $\tilde{K}_0(\mathcal{C})$ de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, on a $(P) + (P') = (P \oplus P')$. On obtient un groupe, en remarquant que si $P \in \mathcal{C}$, il existe $P' \in \mathcal{C}$ et L libre de type fini, tels que $P \oplus P' \simeq L$. La classe d'un module P est l'élément neutre de $\tilde{K}_0(\mathcal{C})$ si et seulement s'il existe des modules L et L' libres de type fini, et un isomorphisme de $P \oplus L$ sur L' .

On notera $K_0(A)$ le groupe $K_0(\mathcal{P}(A))$; dans le cas de l'exemple 2, on notera $\tilde{K}'_0(B)$ le groupe $\tilde{K}_0(\mathcal{P}(B))$.

Les propriétés suivantes de $K_0(\mathcal{C})$ sont immédiates (cf. Bass, [2]) :

- 1) Tout élément de $K_0(\mathcal{C})$ peut se mettre sous la forme $[P] - [L]$, avec L libre.
- 2) On a $[P] = [P']$ si et seulement si il existe un module libre L et un isomorphisme de $P \oplus L$ sur $P' \oplus L$.

De plus, la propriété universelle de K'_0 permet de construire un homomorphisme canonique φ de $K'_0(\mathcal{C})$ dans $\tilde{K}'_0(\mathcal{C})$, pour lequel $\varphi([P]) = (P)$; φ est évidemment surjectif.

§. II. - LIEN ENTRE $K'_0(B)$ ET $\tilde{K}'_0(B)$

On prend dans ce paragraphe les notations de l'exemple 2.

Soit $\varphi : K'_0(B) \rightarrow \tilde{K}'_0(B)$ l'homomorphisme canonique. Soit $\text{rg}(P)$ le rang d'un objet P de $\mathcal{C}'(B)$. La propriété universelle de $K'_0(\mathcal{C}')$ permet de construire un homomorphisme $r : K'_0(\mathcal{C}') \rightarrow \mathbb{Z}$. On note $\psi = \varphi \times r : K'_0(B) \rightarrow \tilde{K}'_0(B) \times \mathbb{Z}$.

THEOREME. L'homomorphisme ψ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Ker } \psi$. Ecrivons $\alpha = [P] - [L]$. Comme $(L) = 0$, il existe des modules libres L' et L'' tels que $P \oplus L' \simeq L''$. Alors, $\text{rg}(P) + \text{rg}(L') = \text{rg}(L'')$. Mais $r(\alpha) = 0$; donc, $L \oplus L' \simeq L''$, d'où $P \oplus L' \simeq L \oplus L'$.

Soit $(\alpha, n) \in \tilde{K}'_0(B) \times \mathbb{Z}$. Soit P un module de \mathcal{C}' , vérifiant $(P) = \alpha$. Alors, (α, n) est l'image de $[P] + [B^{n-r}]$ si $n \geq r$, et de $[P] - [B]^{r-n}$ si $n \leq r$. La détermination de $K'_0(B)$ se ramène à celle de $\tilde{K}'_0(B)$, et ce dernier groupe possède des propriétés arithmétiques liées à l'ordre B .

§. III. - MODULES LOCALEMENT LIBRES

On garde les notations du paragraphe précédent. On suppose en outre que L est semi-simple et que les modules de \mathcal{C}' sont localement libres, i. e. : pour tout idéal maximal \mathfrak{p} de A , et tout objet M de \mathcal{C} , $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $B_{\mathfrak{p}}$ ($M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$, $B_{\mathfrak{p}} = S^{-1}B$, $S = A - \mathfrak{p}$). Il revient au même de dire que les idéaux à gauche fractionnaires de $B_{\mathfrak{p}}$ sont principaux. Ces conditions sont vérifiées entre autres dans les cas suivants :

1) B est un ordre maximal (Auslander et Goldman, [1]) ;

- 2) L est commutative (Bourbaki [3]) ;
- 3) L est l'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini (Swan, [9]).

On démontre que si M de rang $r > 0$ est un élément de \mathcal{C}' , il existe un idéal fractionnaire I tel que $M \simeq B^{r-1} \oplus I$. On peut alors décrire le groupe $\tilde{K}'_0(B)$ de la façon suivante : il est engendré par les classes (I) des idéaux fractionnaires projectifs, et l'on a $(I) + (I') = J$, où J est un idéal vérifiant $I \oplus I' \simeq B \oplus J$.

On sait définir la norme réduite dans une algèbre centrale simple. En notant K' le centre de L , on voit tout de suite qu'on peut définir un homomorphisme $N : L^* \rightarrow K'^*$, appelé encore norme réduite. Si A' désigne la clôture intégrale de A dans K' , on peut associer à un idéal fractionnaire projectif (ou inversible, c'est la même chose) de B un idéal fractionnaire inversible de A' , noté $N(I)$, défini localement de manière évidente. On a ainsi une application N de l'ensemble des classes d'idéaux de B dans le groupe \mathcal{K} des classes d'idéaux de A' . (En fait \mathcal{K} est isomorphe à $\tilde{K}'_0(A')$).

Supposons maintenant que K est un corps de nombres, et que B est un ordre maximal. Soient $L_i (1 \leq i \leq r)$ les facteurs simples de K_i ($L \simeq \prod_{i=1}^r L_i$), K'_i le centre de L_i ($K' \simeq \prod_{i=1}^r K'_i$), \mathcal{J} le groupe des idéaux inversibles de A' , \mathcal{J}' le sous-groupe de \mathcal{J} formé des idéaux principaux de K' engendrés par des éléments $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, tels que α_i soit positif aux places réelles de K_i ramifiées dans L_i (i.e. : le complété de L_i par une telle place est une algèbre de matrices sur le corps des quaternions sur \mathbb{R} , ou encore la norme réduite d'un élément de L_i est positive ou nulle à une telle place). On définit un groupe de classes d'idéaux "dans un sens restreint" de A' par $\mathcal{K}' = \mathcal{J} / \mathcal{J}'$ et la norme réduite induit un homomorphisme N de $K'_0(B)$ dans \mathcal{K}' .

En combinant divers résultats (Eichler [5] ; Chevalley [4]), on peut montrer le

THEOREME (cf. Swan [8]). -

- 1) L'homomorphisme N est un isomorphisme ;
- 2) si I et J sont des idéaux projectifs de $\mathcal{C}'(B)$, et si r est un entier au moins égal à 2, $I \oplus B^r \simeq J \oplus B^r \Rightarrow I \oplus B \simeq J \oplus B$;

3) si aucun des facteurs simples L_i de L est un corps de quaternions totalement défini sur K_i (i.e. : K_i non totalement réel ou L_i non ramifiée à toutes les places réelles de K_i),

$$I \oplus B^r \simeq J \oplus B^r \Rightarrow I \simeq J.$$

§. IV. - ALGÈBRES DE GROUPES.

On considère dans ce paragraphe le cas où $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[G]$, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}[G]$, G étant un groupe fini. Jakobinski [6], a montré que, si aucun facteur simple de $\mathbb{Q}[G]$ n'est un corps de quaternions totalement défini, alors, tout module projectif P sur $\mathbb{Z}[G]$, stablement libre, est libre (P est dit stablement libre si $(P) = 0$ dans $\tilde{K}'_0(\mathbb{Z}[G])$).

Si G possède des représentations dans un corps de quaternions totalement défini, il peut exister des modules stablement libres qui ne sont pas libres. Swan [8], a construit un tel exemple à l'aide du groupe de quaternions généralisé d'ordre 32 (le groupe G_n de quaternions généralisé d'ordre $4n$ est défini par deux générateurs σ et τ liés par les relations

$$(\sigma^{2n} = 1, \tau^2 = \sigma^n, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}).$$

Dans ce cas, l'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ est isomorphe au produit

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}\sqrt{2}) \times H_{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

où $H_{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ est le corps des quaternions "usuels" sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

Les groupes non abéliens d'ordre "petit" sont :

- Le groupe diédral D_3 (groupe symétrique sur trois lettres, d'ordre 6) ;
- le groupe diédral D_4 (groupe du carré, d'ordre 8) ;
- le groupe quaternionique G_2 , d'ordre 8.

Il est facile de trouver les représentations inducibles sur \mathbb{Q} de ces groupes :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[D_3] &\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q}) \\ \mathbb{Q}[D_4] &\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q}) \\ \mathbb{Q}[G_2] &\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times H \quad ,\end{aligned}$$

où H est le corps des quaternions usuels sur \mathbb{Q} .

(Noter que si un corps K neutralise H , $K[D_4] \simeq K[G_2]$).

Le problème des modules stablement libres ne se pose que pour le groupe G_2 .

On peut montrer qu'il y a exactement deux classes d'idéaux dans $\mathbb{Z}[G_2]$, et que, si I désigne un idéal non principal de $\mathbb{Z}[G_2]$, $\mathbb{Z}[G_2]^r \oplus I$ n'est jamais libre ([7]). On en déduit que $K_0(\mathbb{Z}[G]) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Il est à noter que le contre-exemple de Swan est construit de la manière suivante : on remarque qu'il y a deux classes d'idéaux dans un ordre maximal de \mathbb{Z} dans $H\sqrt{2+\sqrt{2}}$, donc aussi dans un ordre maximal \mathfrak{M} de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z}[G_8]$, contenant $\mathbb{Z}[G_8]$. Il résulte du théorème du paragraphe III, qu'il existe dans \mathfrak{M} un idéal I tel que $I \oplus \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$. Swan construit alors un idéal J de $\mathbb{Z}[G_8]$ tel que $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G_8]} J \simeq I$, et constate que J est aussi stablement libre.

PROBLEME. Soit G un groupe possédant des représentations dans un corps de quaternions totalement défini, \mathfrak{M} un ordre maximal de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Q}[G]$, contenant $\mathbb{Z}[G]$, I un idéal à gauche non principal, mais stablement libre de $\mathbb{Z}[G]$. Est-il vrai que $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I$ est un idéal non principal, mais stablement libre de \mathfrak{M} ? On remarquera que lorsque $G = G_2$, le nombre de classes d'idéaux de \mathfrak{M} est égal à 1. On constate bien qu'il n'y a pas de modules stablement libres, mis à part les modules libres.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN. - Maximal orders. Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960) p. 1-24.

- [2] H. BASS. - Algebraic K-theory, Benjamin, New-York (1958).
- [3] N. BOURBAKI. - Algèbre commutative, chapitre II, (1965).
- [4] C. CHEVALLEY. - L'arithmétique dans les algèbres de matrices.
Actualité Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris
(1936).
- [5] M. EICHLER. - Über die Idealklassenzahl hypercomplexer systeme.
Math. Zeit. 43 (1937) p. 481-494.
- [6] JACOBINSKI. - Genera and decompositions of lattices over orders.
(Acta Mathématique, 121 (1968) p. 1-29).
- [7] J. MARTINET. - Modules sur l'algèbre du groupe quaternien.
A paraître aux Annales de l'E. N. S. (1971).
- [8] R. G. SWAN. - Projective modules over group rings and maximal
orders. Ann. of Maths 76 (1962) p. 55-61.
- [9] R. G. SWAN. - Induced representations and projective modules.
Ann. of Math. 71 (1960) p. 552-578.

-:-:-:-

Jacques MARTINET
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E