SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL OLIVIER

# Répartition des valeurs de la fonction « somme des chiffres »

*Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1970-1971), exp. nº 14, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A14_0>

# REPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES"

par

Michel OLIVIER

-:-:-:-

## §. 1. - INTRODUCTION

1.1. - Soit $g \geq 2$ un nombre entier. Ecrivons chaque entier $n$ dans la base $g$ :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) . g^k ,$$

où $e_k(n)$ est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, g-1\}$.

On définit la fonction "somme des chiffres" de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, par :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) .$$

Il est facile de voir que si $j$ et $m$ sont des entiers, on a :

$$\operatorname{Card}\{n \leq x ; s(n) \equiv j \pmod m\} \sim \frac{x}{m} .$$

En 1966, A. O. GEL'fond [2] a montré le :

THEOREME 1. <u>Si</u> $\ell$, $m$, $\ell'$, $m'$ <u>sont des entiers tels que</u> :

$$m \geq 2 , \; m' \geq 2 \;\; \underline{\text{et}} \;\; (m, g-1) = 1 ,$$

<u>on a</u> :

$$\operatorname{Card}\{n \leq x ; s(n) \equiv \ell \pmod m \;\; \underline{\text{et}} \;\; n \equiv \ell' \pmod{m'}\} \sim \frac{x}{m.m'} .$$

En 1967, M. MENDES FRANCE [3] a retrouvé ce résultat en utilisant les fonctions pseudo-aléatoires.

Enfin, en 1970, J. BESINEAU [1], par cette même méthode a montré le :

THEOREME 2. <u>Si</u> $g$ <u>et</u> $g'$ <u>sont des entiers</u> $\geq 2$, $\ell$ <u>et</u> $\ell'$ <u>des entiers</u>, $m$ <u>et</u> $m'$ <u>des entiers</u> $\geq 2$ <u>tels que</u>

$$(m, g-1) = (m', g'-1) = 1 \ ,$$

<u>on a</u>

$$\mathrm{Card}\{x \leq n \ ; \ s(n) \equiv \ell \pmod m \ \text{ et } \ s'(n) \equiv \ell' \pmod{m'}\} \sim \frac{x}{m \, . \, m'} \ ,$$

<u>en appelant</u> $s$ <u>et</u> $s'$ <u>les fonctions</u> <u>"somme des chiffres"</u> <u>dans la base</u> $g$ <u>et</u> $g'$.

1. 2. - Ce dernier théorème donne la solution du problème proposé par A. O. Gel'fond dans [2].

Nous nous proposons ici de résoudre un autre problème proposé par A. O. Gel'fond ; nous allons démontrer le :

THEOREME 3. <u>Soient</u> $m$, $g$, $j$ <u>des entiers tels que</u> :

$$m \geq 2 \ , \ g \geq 2 \ , \ (m, g-1) = 1 \ .$$

<u>Soit</u>

$$T_1(x) = \mathrm{Card}\{p \leq x \ , \ s(p) \equiv j \pmod m\} \ ,$$

<u>où la lettre</u> $p$ <u>désigne un nombre premier.</u> <u>On a</u> :

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + o\left(\frac{x}{\mathrm{Log}\, x}\right) \ ,$$

$\pi(x)$ <u>étant le nombre de premiers inférieurs ou égaux à</u> $x$.

<u>Notation</u> : dans toute la suite, $p$ désignera un nombre premier.

Dans le paragraphe 2, nous donnerons quelques lemmes préliminaires à la preuve de ce théorème; et au paragraphe 3, nous esquisserons sa démonstration.

Signalons que, de la même manière, on peut montrer le :

THEOREME 4. La suite $(x\, s(p))_{p\geq 2}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $x$ est irrationnel.

1.3. - Remarquons qu'une condition du type $(m, g-1) = 1$ dans les hypothèses du théorème 3 ne peut être évitée.

En effet, on a $s(n) \equiv n \pmod{g-1}$, et l'égalité $s(p) \equiv 0 \pmod{g-1}$ est équivalente à

$$p \equiv 0 \pmod{g-1} .$$

Par conséquent $T_1(x) = 0$ dès que $g \geq 3$, et le théorème 3 tombe.

## § 2. - QUELQUES LEMMES PRELIMINAIRES

Dans toute la suite, $\lambda$ désignera la quantité :

$$\frac{1}{2 \log g} \left(\operatorname{Log} g \sin \frac{\pi}{2m} - \operatorname{Log} \sin \frac{\pi}{2mg}\right) .$$

Il est aisé de voir que $\frac{1}{2} < \lambda < 1$.

2.1. - LEMME 1. Soient $v$, $m$, $g$, $q$ des entiers tels que :

$$m \geq 2 , \quad g \geq 2 , \quad (m, g-1) = 1 , \quad 1 \leq q \leq m-1 , \quad v \geq 0 .$$

Soit $\alpha$ un nombre réel. On a :

$$\prod_{v=0}^{k-1} \left| \frac{\sin \pi g \left(\alpha g^v + \frac{q}{m}\right)}{\sin \pi \left(\alpha g^v + \frac{q}{m}\right)} \right| < g^{\lambda k + 1} .$$

Une démonstration de ce lemme se trouve dans [2] de façon implicite. Nous ne la donnerons pas.

2.2. - LEMME 2. Soient $m$, $g$, $d$, $q$ des entiers tels que :

$$m \geq 2 \ , \ g \geq 2 \ , \ d \geq 1 \ , \ 1 \leq q \leq m-1 \ .$$

Posons

$$S(n) = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{d}} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(n-dj))$$

et

$$f(x) = \frac{\prod_{v=0}^{k-1} \left( \sum_{\ell=0}^{g-1} \exp(2i\pi \frac{q}{m} \ell) . x^{\ell g^v} \right)}{(1-x^d) \, x^{g^k - \rho + 1}}$$

où $f$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\rho$ est un entier, $1 \leq \rho \leq d$. On a, pour tout $k \geq 0$, pour tout $\rho$ :

$$S(g^k - \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x| = \frac{1}{2}} f(x) \, dx \ .$$

Preuve : Elle s'appuie essentiellement sur l'égalité suivante que l'on démontre terme à terme facilement :

$$\prod_{v=0}^{k-1} \left( \sum_{\ell=0}^{g-1} \exp(2i\pi \frac{q}{m} \ell) . x^{\ell . g^v} \right) = \sum_{n=0}^{g^k - 1} \exp(2i\pi \frac{q}{m} s(n)) . x^n \ .$$

Et on termine la démonstration en calculant le résidu de $f$ au point $0$ qui est le seul pôle de $f$ dans le cercle $(|x| = \frac{1}{2})$.

2.3. - LEMME 3. Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 2 et $(m, g-1) = 1$, on a :

$$|S(n)| \leq c_1 . n^{\lambda} \ ,$$

$c_1$ étant une constante ne dépendant que de $m$ et $g$.

Preuve : on utilise principalement la $g$-additivité (au sens de Gel'fond) de la fonction $s$, c'est-à-dire

$$s(n_1 + n_2) = s(n_1) + s(n_2)$$

$$\text{si} \quad n_1 = g^v n_3 \ \text{ et } \ n_2 < g^v \ .$$

Donnons le principe de la démonstration.

On établit facilement la relation de "récurrence" :

$$s(n+\varepsilon g^k) = \exp(2i\pi \frac{q}{m}\varepsilon) \,.\, S(n) + S(\varepsilon g^k - \rho)$$

avec $\quad 1 \le \rho \le d$ , si $n < g^k$ et $\varepsilon \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ .

Par conséquent si on écrit l'entier $n$ dans la base $g$ :

$$n = \varepsilon_1 g^{k_1} + \dots + \varepsilon_j g^{k_j} \quad \text{avec} \quad k_1 > k_2 > \dots > k_j \ge 0 \,,$$

la majoration de $|S(n)|$ est ramenée à la majoration de $|S(g^k - \rho)|$ avec $1 \le \rho \le d$.

Puis, à l'aide du lemme 2, on se ramène au calcul de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ .

En remarquant que :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=R} f(x)\,dx = 0 \,,$$

on obtient :

$$S(g^k - \rho) = -\Sigma' \operatorname{Res}(f, \exp(2i\pi \frac{t}{d}))$$

où $\operatorname{Res}(f, \exp(2i\pi\frac{t}{d}))$ désigne le résidu de la fonction $f$ au point $\exp(2i\pi\frac{t}{d})$ , et $\Sigma'$ la somme étendue aux indices $t$ tels que $(\exp(2i\pi\frac{t}{d}))$ soit pôle de $f$ .

Il est facile de voir que :

$$|\operatorname{Res}(f, \exp(2i\pi\frac{t}{d}))| = \frac{1}{d}\prod_{v=0}^{k-1} \left| \frac{\sin \pi g(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m})}{\sin\pi(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m})} \right| .$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le lemme 1, et la relation de récurrence pour majorer $|S(n)|$ .

2.4. - LEMME 4. Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 3, on a :

$$\Big| \sum_{1 \le j \le n} \exp(2i\pi\frac{q}{m} s(dj)\Big| \le c_2 (nd)^{\lambda} \,.$$

Preuve : c'est immédiat en vertu du lemme 3.

Remarque : pour la suite, il est important de constater que les constantes $c_2$ et $\lambda$ ne dépendent pas de $d$ .

## § 3. - PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Elle découle immédiatement du théorème suivant

THEOREME 5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction airthmétique, vérifiant :

(i) $f(n) = 0(1)$ pour tout $n$ ;

(ii) il existe deux constantes $\lambda$ et $c$ telles que $0 < \lambda < 1$ , $c > 0$ et pour tout $d \geq 1$ entier,

$$\left| \sum_{1 \leq j \leq N} f(dj) \right| \leq c(Nd)^{\lambda} .$$

Alors on a :

$$\sum_{p \leq N} f(p) = o\left(\frac{N}{\text{Log } N}\right) .$$

Preuve : on raffine une méthode de I. M. Vinogradov [7]. Nous ne donnerons pas la démonstration. Elle se trouve dans [6].

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème 3.

On écrit :

$$T_1(x) = \frac{1}{m} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{p \leq x} \exp\left(2i\pi \frac{q}{m}(s(p)-j)\right) ,$$

ou encore

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + \frac{1}{m} \sum_{q=1}^{m-1} \exp\left(-2i\pi\frac{q}{m}j\right) \sum_{p \leq x} \exp\left(2i\pi\frac{q}{m}\, s(p)\right) .$$

La fonction $n \to \exp(2i\pi\frac{q}{m}\, s(n))$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 5 grâce au lemme 4.

Nous avons donc

$$\sum_{p \leq x} \exp\left(2i\pi \frac{q}{m}\, s(p)\right) = o\left(\frac{x}{\text{Log } x}\right) ,$$

ce qui termine la démonstration.

## § 4. - REMARQUE

4. 1. - Signalons pour terminer que le théorème 3 est lié au problème suivant :

Existe-t-il une infinité de nombres premiers dans la suite de Fermat $2^{2^n} + 1$ ?

Soit $s$ la somme des chiffres en base $2$ .

Dire qu'il y a une infinité de nombres de Fermat premiers, c'est dire qu il y a une infinité de premiers p tels que $s(p) = 2$ .

Le théorème 3 dit que pour tout entier $m \geq 2$ , il y a une infinité de nombres premiers P tels que $s(p) \equiv 2 \pmod m$.

4.2. - Enfin, répétons le dernier problème posé par Gel'fond dans [2] :

Evaluer : card $\{ n \leq x \ ; \ s(n^2) \equiv j \pmod m \}$ .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BESINEAU. - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres. Comptes Rendus Acad. Sciences Paris (1971), tome 272, n° 7, p. 453-456.

[2] A. O. GEL'FOND. - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arithmética, XIII (1968), p. 259-265.

[3] M. MENDES FRANCE. - La fonction "somme des chiffres" et autres fonctions analogues. Une caractérisation des nombres de Pisot. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie des nombres) 8e année (1966-1967), n° 8.

[4] D. J. NEWMAN. - On the numbers of binary digits in a multiple of three. Proc. of A. M. S. 21 (1969), p. 719-721.

[5] M. OLIVIER. - Sur la représentation en base g des nombres premiers. Comptes Rendus Acad. Sciences Paris (1971), tome 272, n° 14, p. 937-939.

[6] M. OLIVIER. - Un théorème sur les fonctions arithmétiques (à paraître).

[7] I. M. VINOGRADOV. - The method of trigonometrical sums in the Theory of Numbers. Interscience Publishers (1954).

-:-:-:-

M. OLIVIER
Université de Bordeaux 1
U. E. R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération - 33 - TALENCE