

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 12, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971___A12_0

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMES LINEAIRES p -ADIQUES
ET
PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par

Pierrette CASSOU-NOGUÈS

-:-:-

Soient \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls, \mathbb{Z} l'anneau des entiers relatifs, \mathbb{Q} le corps des rationnels, \mathbb{Q}_p le corps p -adique élémentaire, \mathbb{Z}_p son anneau de valuation et \mathfrak{M}_p son idéal de valuation. Soit encore K une extension abélienne réelle finie du corps \mathbb{Q} , $Z_K(\cdot)$ la fonction zêta du corps K et $Z_p(\cdot, K)$ sa fonction zêta p -adique. On sait [5] que c'est la fonction continue de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p qui coïncide sur $1 + (1-p)\mathbb{N}^*$ si $p \neq 2$ (resp. sur $1 - 2\mathbb{N}^*$ si $p = 2$) avec la fonction

$$s \mapsto \prod_{\mathfrak{P}|p} (1 - N(\mathfrak{P})^{-s}) Z_K(s) .$$

A l'aide de la factorisation de la fonction zêta en fonction L de Dirichlet, on peut factoriser la fonction zêta p -adique en fonction L - p -adiques : si \mathfrak{X} désigne l'ensemble des caractères primitifs du corps K , on a

$$Z_p(1-m, \chi) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L_p(1-m, \chi) ,$$

où

$$L_p(1-m, \chi) = (1 - \chi(p)p^{-s}) L(1-m, \chi)$$

si m est entier positif $m \equiv 0 \pmod{p-1}$, si $p \neq 2$ (resp. $\equiv 0 \pmod{2}$ si $p = 2$). On a encore

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi \varepsilon_p)$$

où ε_p est l'application continue et multiplicative de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Z}_p telle que

$$\varepsilon_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in p\mathbb{Z}_p \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \end{cases} .$$

Dans cet article nous nous proposons de mettre en évidence le lien qui existe entre deux méthodes d'étude des fonctions L p -adiques.

La première de ces méthodes est celle de Kubota et Leopoldt [5] qui ont remarqué que

$$L_p(1-m, \chi) = - \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m} ,$$

où $B^m(\chi \varepsilon_p)$ désigne le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli relatif au caractère $\chi \varepsilon_p$ ([3], [6]). Ce nombre est algébrique et

$$B^m(\chi \varepsilon_p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi \varepsilon_p(a) a^m \quad (\text{limite } p\text{-adique})$$

$f_1 = \text{ppcm}(p, f(\chi))$, $f(\chi)$ désignant le conducteur de χ .

L'autre méthode, celle de Y. Amice et J. Fresnel [1], consiste à considérer les fonctions $L_p(\cdot, \chi)$ comme des analogues p -adiques des séries complexes $\sum_{n=1}^{\infty} \chi \varepsilon_p(n) n^{-s}$. En effet $L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi \varepsilon_p)$ pour $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \pmod{2}$ si $p = 2$), et on démontre que la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi \varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$, convergente dans le disque de centre 0 et de rayon 1, est prolongeable en une fonction analytique au sens de Krasner [4], $I_{\chi \varepsilon_p}(x \mapsto x^{m-1})(\cdot)$ dans un quasi-connexe qui contient 0 et 1 et que

$$I_{\chi \varepsilon_p}(x \mapsto x^{m-1})(1) = - \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m} ,$$

on a donc

$$I_{\chi \varepsilon_p}(x \mapsto x^{m-1})(1) = - \frac{1}{m} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi \varepsilon_p(a) a^m .$$

C'est cette égalité que l'on se propose de démontrer sans faire intervenir les nombres de Bernoulli. En utilisant le fait que

$$\chi(n) = \chi(-1) \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a) Z_f^{an},$$

cela revient encore au problème suivant :

Etant donnée la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$, peut-on la prolonger en une fonction analytique $I(x \mapsto \varepsilon_p(x) x^{m-1}(\cdot))$ dans un quasi-con-
nexe qui contient les racines $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité ($f(\chi)$ désignant le conduc-
teur d'un caractère primitif χ quelconque du corps K) et a-t-on

$$I(x \mapsto \varepsilon_p(x) x^{m-1})(Z_{f(\chi)}^a) = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} \varepsilon_p(n) \frac{n^m}{m} Z_{f(\chi)}^{an} ?$$

On va étudier d'une part la forme linéaire p -adique

$$f \mapsto J(f)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n) T^n,$$

où f désigne une fonction de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p uniformément dérivable, et

d'autre part le prolongement analytique, $I(f')(T)$ de la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n$, d'abord dans le domaine $1 + \mathfrak{M}_p = \{T \in \mathbb{C}_p \mid |1-T| < 1\}$ et ensuite pour les unités de \mathbb{O}_p qui ne sont pas dans ce disque.

Posons

$$J_r(f)(T) = \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n) T^n;$$

on peut écrire

$$J_r(f)(T) = J_r^0(f) + J_r^1(f)(1-T) + \dots + J_r^i(f)(1-T)^i + \dots + J_r^{p^r}(f)(1-T)^{p^r},$$

où

$$J_r^0(f) = \frac{f(1) + \dots + f(p^r)}{p^r}$$

$$J_r^i(f) = (-1)^i \frac{f(i) + f(i+1) \binom{i+1}{i} + \dots + f(p^r) \binom{p^r}{i}}{p^r}$$

on voit que s'il existe des solutions g et g_i , nulles en 0, des équations aux différences finies

$$g(x) - g(x-1) = f(x)$$

et

$$g_i(x) - g_i(x-1) = f(x) \binom{x}{i},$$

alors on a :

$$J_r^0(f) = \frac{g(p^r)}{p^r}$$

et

$$J_r^i(f) = (-1)^i \frac{g_i(p^r)}{p^r} .$$

Donc

$$J_r(f)(T) = \frac{g(p^r)}{p^r} - \frac{g_1(p^r)}{p^r} (1-T) + \dots + (-1)^{p^r} \frac{g_{p^r}(p^r)}{p^r} (1-T)^{p^r} .$$

On est donc amené à étudier l'équation aux différences finies

$$g(x) - g(x-1) = f(x)$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. Soit $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace de Banach des fonctions uniformément dérivables, muni de la norme $\| \cdot \|_1$ (si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$, $\|f\|_1 = \sup_n |a_n|$).

Soit Δ l'opérateur défini sur $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ tel que

$$\Delta(g)(x) = g(x) - g(x-1) .$$

Alors Δ est un opérateur linéaire continu surjectif sur $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.

Si l'on suppose que f est une fonction uniformément dérivable, alors les fonctions g et g_i sont uniformément dérivables. On peut exprimer leurs coefficients d'interpolation à l'aide de ceux de f et démontrer ensuite le

THEOREME 1 ([2]). Soit une fonction f uniformément dérivable. Soient

$$J_r(f)(T) = \frac{f(1)T + \dots + f(p^r)T^{p^r}}{p^r}$$

et g et g_i les solutions continues nulles en 0 des équations fonctionnelles

$$g(x) - g(x-1) = f(x) ,$$

et

$$g_i(x) - g_i(x-1) = f(x) \binom{x}{i} .$$

Posons

$$1 + \mathfrak{M}_p = \{ T \in \mathbb{C}_p \mid |1-T| < 1 \} .$$

Alors pour tout T élément de $1 + \mathfrak{M}_p$, la série $g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i g'_i(0)(1-T)^i$ est convergente, $J_r(f)(T)$ admet une limite

$J(f)(T)$ lorsque r tend vers l'infini et

$$J(f)(T) = g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i g'_i(0)(1-T)^i .$$

On s'intéresse ensuite au prolongement des séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n$. Ces séries sont prolongeables dans $O_p - (1 + \mathfrak{M}_p)$ en fonctions analytiques $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$ qui sont définies par des séries de Laurent en $(1-T)$ [1]. On démontre à l'aide des propriétés des coefficients d'interpolation d'une fonction uniformément dérivable la proposition 2.

PROPOSITION 2. On peut faire le produit des séries de Laurent en $(1-T)$, $I(f)(T)$ et $\text{Log } T$, et la série de Laurent en $(1-T)$, $I(f')(T) + I(f)(T) \text{Log } T$ est en fait une série de Taylor en $(1-T)$ convergente dans $1 + \mathfrak{M}_p$.

Grâce aux théorèmes d'unicité du prolongement analytique et d'unicité du développement en série de Taylor, on démontre enfin le

THEOREME 2 ([2]). On a l'égalité des séries de Taylor en $(1-T)$ dans le disque $1 + \mathfrak{M}_p$

$$I(f')(T) + I(f)(T) \text{Log } T = g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} g'_i(0)(1-T)^i .$$

Par conséquent on a

$$J(f)(T) = -I(f')(T) - I(f)(T) \text{Log } T$$

pour tout T élément de $1 + \mathfrak{M}_p$.

On a donc bien démontré que si ζ désigne une racine de l'unité dans $1 + \mathfrak{M}_p$, on a

$$\frac{1}{m} J(x \mapsto \varepsilon_p(x) x^m)(\zeta) = -I(x \mapsto \varepsilon_p(x) x^{m-1})(\zeta) .$$

Pour les racines de l'unité qui ne sont pas dans ce disque, on démontre que l'on peut définir un prolongement fonctionnel de $J(f)(T)$ aux unités de O_p en remarquant que pour tout λ entier naturel et pour tout T élément de $1 + \mathfrak{M}_p$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n) T^n = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{r\lambda}} \sum_{n=1}^{p^{r\lambda}} f(n) T^n.$$

Le théorème est le suivant :

THEOREME 3 ([2]). Soit f une fonction uniformément dérivable. Alors on peut définir un prolongement fonctionnel de la forme linéaire définie sur

$1 + \mathfrak{M}_p$ par

$$J(f)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n) T^n = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{r\lambda}} \sum_{n=1}^{p^{r\lambda}} f(n) T^n.$$

λ Si T est une unité de O_p , on considère ξ la racine primitive de l'unité telle que $|T - \xi| < 1$. Alors

$$J(f)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{r\lambda}} \sum_{n=1}^{p^{r\lambda}} f(n) T^n$$

existe et définit un prolongement fonctionnel de $J(f)(T)$ sur

$\{T \in \mathbb{C}_p \mid |1-T| = 1 \text{ et } |T| = 1\}$ et l'on a encore

$$J(f)(T) = -I(f')(T) - I(f)(T) \text{ Log } T$$

où Log T désigne le prolongement fonctionnel du logarithme aux unités de O_p .

Le problème se trouve donc complètement résolu.

Notons enfin que l'on peut définir des notions analogues avec des fonctions de plusieurs variables et que tout se généralise.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE Y. et FRESNEL J. - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica, vol. 20, n° 4.
- [2] CASSOU-NOGUES Pierrette. - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. Doctorat de spécialité (polycopié) 1971, Bordeaux.
- [3] FRESNEL J. - Nombres de Benoulli et fonctions L p-adiques. Annales de l'Institut Fourier, tome XVII, fasc. 2, 1967, pp. 281-333.

- [4] KRASNER M. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, n° 143, Colloques internationaux du C. N. R. S.
- [5] KUBOTA T. and LEOPOLDT H. W. - Eine p-adische theorie der Zeta werte. I Einführung der p-adisher Dirichletsen L-Funktionen. Journal für die reine und ang. Math. , t. 214/215, 1964, pp. 328-333.
- [6] LEOPOLDT H. W. - Eine verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, pp. 131-140.

-:-:-

Pierrette CASSOU-NOGUES
U. E. R. de Mathématiques
et d' Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E