Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux

Guy Terjanian

La propriété C_i des corps

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. nº 8, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A8_0>

LA PROPRIETE C_i DES CORPS

par

Guy TERJANIAN

-:-:-:-:-:-:-

a) Introduction.

Nous ferons un exposé historique du sujet qui est assez neuf puisqu'il commence en 1933 ; nous ne prétendons pas à la rigueur historique ; nous voulons surtout montrer l'enchaînement des idées.

Sauf mention expresse du contraire, tous les corps considérés sont commutatifs. Il est commode de poser une définition :

Définition. - Soient K un corps commutatif et $i \geq 0$ un entier, on dit que K a la propriété C_i (resp. la propriété C_i forte), si, pour tout couple (d, n) d'entiers ≥ 0 tels qu'on ait $n > d^i$ et pour tout élément f de $K[X_1, \ldots, X_n]$ non nul, de degré d et homogène (resp. sans terme constant), f possède un zéro non banal dans K.

On voit immédiatement que, pour qu'un corps ait la propriété C_o, il faut et il suffit qu'il soit algébriquement clos.

b) La période 1933-1936.

En 1933, C. Tsen démontre, dans [14], que si K est un corps algébriquement clos, le groupe de Brauer du corps $K(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K est nul. Analysant le travail de Tsen, Emil Artin pose la définition de la propriété C_1 , à la terminologie près, car il appelle quasi algébriquement clos un corps qui a la propriété C_1 ; il remarque alors que Tsen démontre deux choses : d'abord qu'un corps de fractions rationnelles à coefficients dans un corps algébriquement clos est C_1 , ensuite que si un corps possède la propriété C_1 , son groupe de Brauer est nul.

Vu le théorème de Wedderburn qui affirme que tout corps fini est commutatif, Artin conjecture qu'un corps fini est C_1 , conjecture faite auparavant par Dickson ; ceci est prouvé en 1935 par Chevalley dans [7] ; en fait Chevalley prouve qu'un corps fini a la propriété C_1 forte. Ce résultat a été précisé par Warning en 1935 dans [17], résultat qui, à son tour, a été précisé par J. AX en 1964, dans [2].

Soit Ω le corps obtenu en adjoignant au corps des rationnels, toutes les racines de l'unité, la théorie du corps de classes permet de montrer que le groupe de Brauer de Ω est nul ; Artin conjecture que Ω est C_1 ; nous dirons que c'est la $1^{\text{ère}}$ conjecture d'Artin ; on sait qu'elle est vérifiée pour les formes quadratiques, mais on ignore si elle est vraie.

Soient K un corps et $i \geq 0$ un entier, nous appellerons forme normique d'ordre i , tout élément de $K[X_1, \ldots, X_n]$, homogène, non nul, de degré d , avec $n = d^i$, n'ayant que le zéro banal dans K.

Soient K un corps muni d'une valuation discrète, de corps résiduel k , on voit aisément que si k possède une forme normique d'ordre i , K possède une forme normique d'ordre i + 1 ; soit K un corps fini, les normes des extensions finies de K nous donnent des formes normiques d'ordre 1 ; donc le corps $\underline{Q}_p$ des nombres p-adiques possède des formes normiques d'ordre 2 ; Artin a conjecturé que, pour tout nombre premier p , le corps $\underline{Q}_p$ est C_2 ; nous dirons que c'est la $2^{\text{ème}}$ conjecture d'Artin ; en 1936, époque où cette conjecture a été faite, on savait, comme conséquence des travaux de Hasse [10] , qu'elle est satisfaite pour les formes quadratiques ; on verra plus loin que cette conjecture est fausse.

c) La période 1945-1963.

En 1952, Lewis [12] et Demyanov [8] démontrent que la 2e conjecture d'Artin est vraie pour les formes de degré 3. A la même époque, Lang [11] démontre divers résultats généraux sur les corps qui ont la propriété C_i et qui, de plus, possèdent des formes normiques d'ordre i. Dans le même article, Lang démontre que, si un corps K , muni d'une valuation discrète v , est hensélien pour v, a un corps résiduel algébriquement clos et est tel que $\hat{K}$, son complété, soit séparable sur K, alors K est C_1 . Ceci milite en faveur de la 1ère conjecture d'Artin, puisque il en résulte que les complétés $\hat{\Omega}$ du corps Ω défini en b), pour ses diverses valuations sont C_1 .

Lang remarque en 1953, dans un article aux Annals of Math. que l'on peut définir une propriété C_i restreinte à des polynômes homogènes dont les degrés appartiennent à une partie stable par la multiplication des entiers ≥ 1 et que l'on peut étendre à cette propriété C_i les résultats qu'il a obtenus dans [11] .

En 1957, Nagata étend les résultats de Lang aux corps qui ont la propriété C_i , mais ne possèdent pas nécessairement de formes normiques d'ordre i ; en particulier, il démontre que si K est un corps C_i , toute suite (f_i) $i = 1, \ldots, r$ d'éléments de $K[X_1, \ldots, X_n]$, telle que chacun des f_i soit homogène de degré d et qu'on ait $n > r d^i$ a un zéro non banal dans K ; il démontre aussi que si K est un corps C_i , le corps K(X) est C_{i+1} ; enfin, il remarque qu'on peut définir la propriété C_i pour tout nombre réel $i \geq 0$ et qu'elle jouit des mêmes propriétés que la propriété C_i où i est un entier [13].

Signalons aussi, dans cette période, les travaux de Brauer [5] et de Birch et Lewis [4].

d) La période 1964-1970.

En 1964, Ax et Kochen, dans [3], démontrent la chose suivante : pour tout entier $d \geq 1$, il existe un entier $m(d)$ tel que, pour tout nombre premier $p \geq m(d)$, tout élément de $\mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$, homogène, de degré d et tel qu'on ait $n > d^2$ a un zéro non banal dans K.

En 1966, Terjanian [15] montre par un exemple que la $2^{\text{ème}}$ conjecture d'Artin est fausse. Browkin construit d'autres exemples qui montrent que, si pour un nombre premier p et un nombre réel $i \geq 0$, le corps $\mathbb{Q}_p$ est C_i, alors on a $i \geq 3$.

En 1966, Greenberg [9] montre que si K a la propriété C_i, le corps $K((X))$ des séries formelles à coefficients dans K a la propriété C_{i+1}.

Soient n un entier ≥ 1 et f un élément d'une algèbre de polynômes $A[X_i]_{i \in I}$, on dit que f est n-homogène, si les degrés des composantes homogènes de f qui ne sont pas nulles sont congrus entre eux modulo n.

En 1969, Terjanian, aidé par Serre, [16] démontre : soient p un nombre premier, K un corps dont toute extension finie a pour degré une puissance de p et $(f_i)_{i=1,\ldots,r}$ une suite d'éléments de $K[X_1, \ldots, X_n]$ telle qu'on ait $n > r$, que chacun des f_i soit p-homogène et de degré étranger à p, alors f a un zéro non banal dans K.

Ce résultat conduit à définir une notion de propriété $C_i^{(p)}$, p étant un nombre premier, en se restreignant dans la définition de la propriété C_i aux polynômes p-homogènes et de degré étranger à p. On constate [16] que cette propriété $C_i^{(p)}$ a un comportement analogue à celui de la propriété C_i.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN - The collected papers. Addison-Wesley, Reading, Mass., U.S.A., 1965, page X..

[2] J. AX - Zeroes of polynomials over finite fields. Amer. J. Math., 86, 1964, p. 255-261.

[3] J. AX et S. KOCHEN - Diophantine problems over local fields. I, II, Amer. J. Math., 87, 1965, p. 605-648 ; III Ann. Math., 83, 1966, p. 437-456.

[4] B. J. BIRCH et D. J. LEWIS - Systems of three quadratic forms. Acta arithmetica, 10, 1964/65, p. 423-442.

[5] R. BRAUER - A note on systems of homogeneous algebraic equations. Bull. Amer. Math. Soc., 51, 1945, p. 749-755.

[6] J. BROWKIN - On forms over p-adic fields. Bull. Acad. Pol. Sci., 14, 1966, p. 489-492.

[7] C. CHEVALLEY - Démonstration d'une hypothèse de M. Artin. Abh. Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, p. 73-75.

[8] V. B. DEMYANOV - On cubic forms in discretely normed fields. Dokl. Akad. Nauk. U.R.S.S., 74, 1950, p. 889-891. (en russe).

[9] J. M. GREENBERG - Rational points in henselian discrete valuation rings. Publ. I.H.E.S. n°31, 1966, p. 59-64.

[10] H. HASSE - Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. f. reine u. augew. Math., 153, 1924, p. 113-130.

[11] S. LANG - On quasi-algebraic closure. Ann. Math. 55, 1952, p. 373-390.

[12] D. J. LEWIS - Cubic homogeneous polynomials over p-adic number fields. Ann. Math., 56, 1952, p. 473-478.

[13] M.NAGATA - Note on a paper of Lang concerning quasi-algebraic closure. Mem. Univ. Kyoto, Ser. A, 30, 1957, p. 237-241.

[14] C.C.TSEN - Divisionalgebren über Funktionkörpern. Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 1933, p. 335-339.

[15] G.TERJANIAN - Un contre-exemple à une conjecture d'Artin. C.R. Acad. Sci. Paris, 262, 1966, p. 612.

[16] G.TERJANIAN - Dimension arithmétique d'un corps. (Thèse à paraître).

[17] E.WARNING - Bemerking zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley. Abh. Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, p. 76-83.

-:-:-:-:-:-:-

Guy TERJANIAN
53, rue Roger Salengro
92 - ANTONY