SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

ALAIN ESCASSUT

Algèbres de Banach unitaire $H(D)$

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. nº 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A5_0>

ALGEBRES DE BANACH UNITAIRE H(D)

par

Alain ESCASSUT

-:-:-:-

Soit K un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos. Soit $x \to |x|$ sa valeur absolue. Soit $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K .

PROPOSITION 1. *Soit* D *une partie infinie de* K ; $K(D)$ *la* K-*algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans* D . *Soit* $H(D)$ *le groupe topologique complété de* $K(D)$ *pour la topologie de la convergence uniforme. Ce groupe topologique s'identifie à un sous-groupe du groupe complet* K^D (*pour la topologie de la convergence uniforme*).

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $H(D)$ *est une sous-algèbre de la* K-*algèbre* $H(D)$, *on peut définir sur cette algèbre* $H(D)$ *une norme qui en fasse une algèbre de Banach et cette norme définit sur le groupe* $H(D)$ *une topologie équivalente à la topologie de la convergence uniforme.*

b) D *est une partie fermée bornée de* K .

Précisons que si D est fini, d'ordre n , alors D est évidemment fermé borné et K^D est une algèbre de Banach nœthérienne isomorphe à K^n ainsi qu'à un quotient de $K(D)$. Cette algèbre sera encore notée $H(D)$.

Avant de poursuivre, nous devons rappeler certains résultats et définitions classiques concernant les fermés bornés.

Définitions

On appelle disque circonférencié de centre a, de rayon r l'ensemble des x de K tels que $|x-a| \leq r$.

On appelle disque non circonférencié de centre a, de rayon r l'ensemble des x de K tels que $|x-a| < r$.

On appelle diamètre de D le nombre $(\sup_{x,y \in D} |x-y|)$ et on le note diam (D).

On appelle enveloppe d'une partie bornée D de K ayant au moins deux points et on note $\underline{D}$ le plus petit disque circonférencié contenant D.

Pour tout $a \in D$, $\underline{D}$ est le disque circonférencié de centre a, de rayon diam (D).

Alors $\underline{D} - D$ admet une partition en disques non circonférenciés maximaux que nous appelons trous de D.

On appelle enfin trou interne de D tout trou de diamètre inférieur à celui de D.

Une famille de disques non circonférenciés (éventuellement de trous d'un fermé borné D) est appelée famille de disque non circonférenciés contigus si tous ses éléments admettent la même enveloppe.

Nous étudions désormais les algèbres de Banach $H(D)$ ce qui suppose donc D fermé borné.

Nous énoncerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. Soit a un point intérieur à un domaine D. Soit $f \in H(D)$ tel que $f(a) = 0$; alors il existe $g \in H(D)$ tel que $f = (x-a)g$.

Ce résultat très important suggère la définition ci-dessous :

Définition :

Un élément $f \in H(D)$ est dit quasi-inversible s'il se décompose sous la forme $f = Pg$ où P est un polynôme dont les zéros sont intérieurs à D et g est inversible dans $H(D)$.

Grâce au lemme et à cette définition, nous pouvons énoncer la proposition 2 :

PROPOSITION 2. Tout idéal de $H(D)$ contenant au moins un élément quasi-inversible est engendré par un polynôme dont les zéros sont intérieurs à D .

Exemple : si D se compose d'une réunion finie de disques ou encore, d'un fermé borné dont l'ensemble des trous se réduit à un nombre fini de familles de trous contigus, alors tout élément de $H(D)$ est quasi-inversible, donc $H(D)$ est principal.

Rappelons que L. Gruson [4] avait obtenu des résultats semblables, en introduisant toutefois une condition sur D assez restrictive qui est en fait inutile.

Le problème de savoir si $H(D)$ est nœthérienne étant résolu lorsque tout élément est quasi-inversible, nous sommes amenés à étudier quelles conditions D doit satisfaire pour que $H(D)$ contienne un élément non quasi-inversible.

Pour cela, nous allons d'abord définir la notion d'ensemble infraconnexe et étudier cette question lorsque D est infraconnexe puis nous généraliserons ultérieurement les résultats ainsi obtenus.

Définition

Un fermé borné D de K , de diamètre R , est dit infraconnexe si quel que soit $a \in D$, r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r_1 < r_2 < R$, il existe $x \in D$ tel que $r_1 < |x-a| < r_2$.

On montre qu'une réunion enchaînée [7] d'infraconnexes est infraconnexe.

PROPOSITION 3. La relation $\mathcal{R}$ définie sur D par $x \mathcal{R} y$ si x et y appartiennent à une même partie infraconnexe de D est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées composantes infraconnexes de D .

L'infraconnexité a une grande importance pour caractériser certaines propriétés algébriques de $H(D)$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 4. *Soit D une partie de K fermée bornée. Alors l'algèbre de Banach H(D) n'a pour idempotents que 0 et 1 si et seulement si D est infraconnexe.*

Nous allons maintenant définir le critère pour qu'une algèbre de Banach unitaire H(D) sans idempotent non triviaux soit noethérienne.

Pour cela, nous devons étudier quelle propriété un infraconnexe D doit satisfaire pour que H(D) ait des éléments non quasi-inversibles.

PROPOSITION 5. *Soit D infraconnexe tel que $f \in H(D)$ soit non quasi-inversible. Alors il existe une suite (a_n) de D satisfaisant : la suite $|a_{n+1} - a_n|$ est une suite réelle strictement monotone, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, $f(a_n) \neq 0$ quel que soit n et de plus il existe une suite de trous T_n de D telle que :*

$$d(a_n, T_n) < |a_{n+1} - a_n|$$

si la suite $|a_{n+1} - a_n|$ est décroissante

$$d(a_n, T_n) < |a_{n-1} - a_n|$$

si la suite $|a_{n-1} - a_n|$ est croissante.

Il en résulte évidemment, par ultramétricité, que

$$d(T_{n+1}, T_n) = |a_{n+1} - a_n| \quad \textit{si cette suite est décroissante},$$

$$d(T_{n-1}, T_n) = |a_{n-1} - a_n| \quad \textit{si cette suite est croissante.}$$

Nous noterons

$$d_n = d(T_{n+1}, T_n) \quad \textit{dans le premier cas},$$

$$d_n = d(T_{n-1}, T_n) \quad \textit{dans le deuxième cas}.$$

L'existence de suite de trous de D dont la suite des distances consécutives est une suite réelle strictement monotone est donc une condition nécessaire que D doit satisfaire pour que H(D) contienne des éléments non quasi-inversibles.

Une première distinction apparaît entre les suites de trous T_n dont la suite d_n est croissante et celles dont la suite d_n est décroissante.

Mais la véritable distinction doit séparer :

a) Les suites T_n telles que $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ (donc évidemment décroissante)

b) Les suites T_n telles que $\lim_{n\to\infty} d_n > 0$ (croissantes ou décroissantes).

Il est évident que si (T_n) est telle que $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, alors la suite T_n converge vers un point a de D qui n'est pas intérieur à D. Alors le filtre des voisinages de a sera appelé filtre percé de Cauchy. Il existe (trivialement) des éléments non nuls qui tendent vers zéro suivant un tel filtre : ceux tels que $f(a) = 0$.

Alors nous montrerons que si D admet au moins un filtre percé de Cauchy, $H(D)$ n'est pas nœthérienne.

Par contre, les choses sont moins simples dans le cas où la suite d_n a une limite non nulle. En effet, on sait toujours associer à une suite de trous T_n un filtre $\mathfrak{F}$ de la façon suivante :

Supposons la suite d_n croissante de limite R. Prenons pour origine un point $0 \in T_1$. Alors le trou T_n appartient au cercle de centre 0, de rayon d_n.

Soit D_n l'ensemble des $x \in D$ tels que $d_n \leq |x| < R$. On voit que $D_{n+1} \subset D_n$ et que la suite D_n est une base de filtre.

Si la suite d_n est décroissante, la définition correspondante peut présenter quelques difficultés en raison de l'absence éventuelle d'un point d'origine 0 tel que $d(0, T_n) = d_n$ quel que soit n (si K n'est pas maximalement complet).

Cependant, ce problème se résoud en considérant des couronnes consécutives centrées en une suite de points pris tour à tour pour origine.

De même, le filtre $\mathfrak{F}$ ainsi associé à la suite T_n est appelé filtre percé. Mais la différence entre le cas a) et le cas b) provient de ce que dans le cas b) il n'existe pas nécessairement d'élément (non nul) tendant vers zéro suivant le filtre percé $\mathfrak{F}$ qui n'est pas de Cauchy.

Nous devons donc caractériser parmi ces filtres percés non de Cauchy ceux pour lesquels il existe un élément de $H(D)$ non nul qui tend vers zéro suivant $\mathfrak{F}$.

Cette caractérisation est complexe mais nous pouvons énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 6. Si un élément f non nul de $H(D)$ tend vers zéro suivant un filtre percé $\mathfrak{F}$ non de Cauchy de D, alors f tend vers zéro suivant un T-filtre de D.

Il reste à définir les T-filtres dont les propriétés permettront de résoudre les problèmes posés.

Définition d'un T-filtre d'un infraconnexe D

Soit $0 \in D$, pris pour origine. Soit R le diamètre de D. Soit (C_m) $m \in \mathbb{N}$, une suite de cercles de centre 0, de rayons d_m strictement croissants, tels que

$$r = \lim_{m \to \infty} d_m \leq R .$$

On appelle filtre associé à la suite C_m le filtre $\mathfrak{F}$ admettant pour base la suite de parties D_m définies de la façon suivante :

D_m est l'ensemble des x de D tels que $d_m \leq |x| < r$.

Pour chaque classe du cercle $\Gamma_{m,i}$ du cercle C_m ayant des trous, et pour tout entier $q_{m,i} \geq 0$, soit $E(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i})$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré $q_{m,i}$ dont tous les zéros appartiennent aux trous de $\Gamma_{m,i}$.

Pour tout $f \in H(D)$, soit

$$\|f\|_{m,i} = \sup_{x \in \Gamma_{m,i} \cap D} |f(x)| \qquad \text{si} \quad \Gamma_{m,i} \cap D \neq \emptyset$$

et $$\|f\|_{m,i} = 1 \quad \text{si} \quad \Gamma_{m,i} \cap D = \emptyset .$$

Enfin, soit :

$$\gamma(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i}) = (d_m)^{q_{m,i}} . \inf[\|\tfrac{1}{P}\|_{m,i} , P \in E(\Gamma_{m,i} , q_{m,i})] .$$

Alors le filtre associé à la suite de cerlces C_m est appelé T-filtre si et seulement si il existe une famille de couples $(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i})$ $(i = 1, \ldots, k(m) ; m \in \mathbb{N})$ telle que si

$$q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i} \quad \text{et si} \quad \gamma_m = \sup[\gamma(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i}) , (i=1, \ldots, k(m))]$$

on ait

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m \left[\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_j}{d_m}\right)^{q_j} \right] = 0$$

On définit de même un T-filtre décroissant grâce à une suite de cercles décroissants C_m et une famille $(\Gamma_{m,i}, q_{m,i})$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m \left[\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right] = 0 .$$

Nous devons encore ajouter quelques définitions relatives aux T-filtres.

On appelle plage d'un T-filtre croissant, l'ensemble des $x \in D$ tels que $d(x, C_m) = r$ (quel que soit m).

On appelle plage d'un T-filtre décroissant, l'ensemble des $x \in D$ tels que $d(x, C_m) = r$ (quel que soit m). La plage est notée $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$.

Deux T-filtres $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont dits complémentaires si $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_1) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{F}_2) = D$.

Alors on est en mesure de conclure :

PROPOSITION 7. Une algèbre de Banach unitaire H(D) est intègre si et seulement si D est infraconnexe sans couple de T-filtres complémentaires.

PROPOSITION 8. Soit H(D) une K-algèbre de Banach unitaire sans idempotents non triviaux. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) H(D) est nœthérienne,

b) H(D) est principale,

c) Tout idéal de H(D) est engendré par un polynôme,

d) Tout idéal de H(D) est fermé,

e) Tout élément de H(D) est quasi-inversible,

f) D est infraconnexe ouvert, sans T-filtre.

Avant de généraliser ces résultats, nous pouvons également apporter un résultat concernant l'analycité définie par E. Motzkin et P. Robba [9] et [10].

Définition

Une partie D de K est appelée ensemble analytique si quel que soit $a \in D$ et quel que soit $r > 0$, l'élément 0 de H(D) est le seul qui satisfasse la relation :

$$f(x) = 0 \quad \text{quel que soit} \quad x \in D \quad \text{tel que} \quad |x-a| \leq r .$$

Alors on a la :

PROPOSITION 9. Un fermé borné D de K est un ensemble analytique si et seulement si D est infraconnexe sans T-filtre à plage non vide.

Considérons maintenant un fermé borné dont les composantes infraconnexes sont en nombre fini. Alors les fonctions caractéristiques de chacunes d'elles appartiennent à H(D). Un contre-exemple simple montre que ce n'est pas toujours vrai si elles ne sont pas en nombre fini. Il suffit de considérer un disque Δ de centre 0, de rayon r et une suite de points a_n tels que $|a_n| = d_n$ où $\lim_{n\to\infty} d_n = r$; alors la fonction caractéristique de ce disque Δ n'appartient pas à $H(\Delta \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n))$.

Grâce au théorème de Tate [13], (proposition 3. 2.) et à la proposition 8 nous pouvons alors énoncer la :

PROPOSITION 10. Soit une algèbre de Banach unitaire H(D). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) H(D) est nœthérienne,

b) Tout idéal de H(D) est principal,

c) Tout idéal de H(D) est fermé,

d) Les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini et chacune est ouverte et sans T-filtre ou réduite à un point.

De plus, si ces conditions sont réalisées et si $A_1, \ldots, A_n$ sont les composantes infraconnexes de D, alors on a l'isomorphisme :

$$H(D) \simeq H(A_1) \times H(A_2) \times \ldots \times H(A_n) .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Analyse p-adique. Séminaire Delange-Pisot, Théorie des Nombres, 1ère année, 1959-1960.

[2] BOURBAKI Nicolas. - Algèbre commutative. Chapitre 6. Hermann, Paris, 1964 (Actualité Scientifique et Industrielle ; 1 308 ; éléments de mathématiques XXX).

[3] BOURBAKI Nicolas. - Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 1. Hermann, Paris, 1953. (Actualité Scientifique et industrielle; éléments de Mathématiques, XV).

[4] GRUSON Laurent. - Algèbres de Banach ultramétriques. Journées Poitou-Aquitaine, Poitiers 1967.

[5] HOUZEL C. - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique (d'après Tate). Journées Poitou-Aquitaine, Poitiers 1965.

[6] KRASNER Marc. - Valuation, corps valué (polycopié) Paris, 1965-66.

[7] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres. Colloques internationaux du C. N. R. S. n° 143, Clermont Ferrand, 1964. Editions du C. N. R. S. , 1966.

[8] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytiques. Presses universitaires de France, Paris (I. H. E. S. , publication mathématique, n° 14).

[9] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Prolongement analytique en analyse p-adique. Compte rendu de l'Académie des Sciences t. 269, p. 126-129 (21 juillet 1969).

[10] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de théorie des nombres de la Faculté des Sciences de Bordeaux (J. Lesca), n° 3, 1968-69.

[11] NAGATA Masayoshi. - Local Rings, Interscience Tracts. Inpure and applied mathématics. Number 13, 1962.

[12] RICKART Charles. - Banach algèbres. Van Nostrand Company Inc. Princeton, New Jersey, 1960.

[13] TATE John. - Rigid analytic spaces. Private notes of J. Tate, reproduced by I. H. E. S.

-:-:-:-