SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JACQUES MARTINET

Algèbre d'un groupe quaternionique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. nº 2, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A2_0>

ALGEBRE D'UN GROUPE QUATERNIONIQUE [1]

par

Jacques MARTINET

-:-:-:-

Soit G le groupe quaternionique d'ordre 8 , défini par des générateurs σ et τ , liés par les relations $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = \sigma^2$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Soit N une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois isomorphe à G , et soit A son anneau d'entiers.

On suppose que 2 ne se ramifie pas dans N (ce qui équivaut à " $N/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée " ou encore à " A est projectif sur $\mathbb{Z}[G]$ " [2] .

Le but de cet exposé est de donner un exemple où A ne possède pas de base normale sur $\mathbb{Z}$ (ce qui revient à dire que A n'est pas libre sur $\mathbb{Z}[G]$). On peut prendre en fait l'exemple suivant : soient k_1 , k_2 , k_3 les corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{41})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{205})$, K le corps biquadratique composé des k_i , $M = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \frac{41+\sqrt{205}}{2}$. Alors $N = K(\sqrt{M})$ convient.

Esquisse de démonstration

En calculant les normes $N_{K/k_i}(M)$, on montre que N est cyclique sur chacun des k_i , et par suite galoisienne sur $\mathbb{Q}$; le groupe de Galois est isomorphe à G .

- Le nombre 2 est non ramifié dans chacun des k_i, donc non ramifié dans K. La congruence $M \equiv \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{205}}{2}\right)^2 \bmod 4$ montre que les facteurs premiers de 2 dans K ne se ramifient pas dans N. L'extension $N/\mathbb{Q}$ est donc modérément ramifiée.

- On fait une étude des modules projectifs de rang 1 sur $\mathbb{Z}[G]$. Soit M un tel module, M' le sous-module des invariants pour σ^2, M'' le sous-module des $x \in M$ annulés par $(1+\sigma^2)$.

On montre successivement que :

1°) M' est libre sur $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[G]/_{(1-\sigma^2)}$ et M'' est libre sur $\mathbb{Z}'' = \mathbb{Z}[G]/_{(1+\sigma^2)}$.

2°) On peut choisir une base φ de M' sur $\mathbb{Z}'$ et une base ψ de M'' sur $\mathbb{Z}''$ de façon que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\psi - \varphi \in 2M \qquad \text{ou} \qquad \psi - (\sigma + \tau + \tau\sigma)\varphi \in 2M .$$

3°) Que M est libre si et seulement si la première propriété est vérifiée.

- On étudie les discriminants Δ de N et D de K, et l'on trouve la relation

$$\Delta = D\,[\,\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2)]^4 .$$

- On en déduit que $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = \varepsilon \prod_{p|\Delta} p$, avec $\varepsilon = +1$ si N est réelle, $\varepsilon = -1$ si N est imaginaire.

- La relation $\psi \equiv \varphi \bmod 2A$ équivaut à $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) \equiv \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) \bmod 4$ dans $\mathbb{Z}$.

- On calcule $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2)$ et $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2)$. Le résultat est indépendant du choix de φ et ψ.

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = 5 \times 41 = 205 .$$

Comme $\varphi = \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{41} \pm \sqrt{205}}{4}$, $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) = \dfrac{1+5+41+205}{4} = 63$,

$Tr_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = 205 \equiv -63 \equiv -Tr_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) \mod 4$, donc A n'est pas libre sur $\mathbb{Z}[G]$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MARTINET. - Modules sur l'algèbre du groupe quaternionique. (à paraître).

[2] J. MARTINET. - cf. thèse, th. II-1. Ann. Inst. Fourier, 19, 1, Grenoble 1969.

-:-:-:-

Université de Bordeaux 1
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération
33 - Talence