SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

YVETTE AMICE

Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 8, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A8_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
(J. LESCA)
Année 1968/1969 , n° 8

31 Janvier 1969

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LE COMPLEMENTAIRE D'UNE FAMILLE DE DISQUES

par

Yvette AMICE

-:-:-:-:-:-

K désigne un corps valué complet non discret et algébriquement clos, A son anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal, k le corps résiduel et p la caractéristique résiduelle.

Problème.

Etant donnée une série formelle convergente $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in K[[X]]$, peut-on, par des conditions sur la suite (a_n), exprimer le fait que f est la série de Taylor à l'origine d'une fonction analytique au sens de Krasner dans un domaine quasi-connexe donné ?

On sait [3] qu'une fonction qui est analytique dans un disque circonférencié mais qui ne l'est pas dans un disque ouvert plus grand n'est pas prolongeable hors de ce disque. On peut donc se limiter aux séries dont le disque de convergence est non circonférencié, et, par homothétie, se ramener à celles dont le rayon de convergence est 1^-. On sait de plus qu'une fonction analytique dans un disque non circonférencié et prolongeable hors de ce disque est bornée. Nous allons donc étudier la question suivante.

Soit Δ un domaine quasi-connexe de K, $\Delta \supset \mathfrak{M}$, soit $H(\Delta)$ l'espace des fonctions strictement analytiques sur Δ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur Δ). Soit $S \subseteq K^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites bornées à valeurs dans K. Si $f \in H(\Delta)$, soit Tf sa série de Taylor à l'origine et $a(f)$ la suite des coefficients de Tf, déterminer $a(H(\Delta)) = S_{\Delta}$.

1. Le cas le plus simple

Soit $\Delta_o = \complement_K (1+\mathfrak{M}) = \{x \in K \mid |x-1| \geq 1\}$ et soit $H_o(\Delta_o)$ le sous-espace de $H(\Delta_o)$ constitué des fonctions nulles à l'infini. On sait que $H_o(\Delta_o)$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme sur Δ_o, et admet une base normale $(e_k)_{k \geq 1}$ où $e_k(x) = (1-x)^{-k}$.

Autrement dit, toute $f \in H_o(\Delta_o)$ admet un développement unique $f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{(1-x)^k}$ uniformément convergent sur Δ_o et tel que

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \Delta_o} |f(x)| = \sup_{k \geq 1} |\lambda_k| .$$

Or,
$$T e_k(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{-k}{n} X^n = \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{k-1} X^n ,$$

donc $a(e_k)$ est la suite $a^k : n \to \binom{k+n-1}{k-1} = a^k(n)$.

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans K, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}_p$. Si $\tilde{a} \in E$, sa restriction à $\mathbb{N}$, est une suite a bornée à valeurs dans K, et $\tilde{a} \to a$ est une injection isométrique de E dans un sous-espace fermé de S (S est muni de la norme $\|a\| = \operatorname*{Sup}_n |a_n|$).

Soit SC (suites continues) l'image de E par cette injection.

On sait [1] que les fonctions $x \to \binom{x+k-1}{k-1}$, $k \geq 1$, sont une base normale de E : ce sont en effet les polynômes d'interpolation sur la suite $u_n = -(1+n)$, qui est très bien répartie. Donc les suites a_k , $a^k(n) = \binom{k+n-1}{k-1}$, $k \geq 1$, sont une base normale de SC . Ceci prouve que $S_{\Delta_o} = a(H(\Delta_o)) = SC$ et que a est un isomorphisme d'espaces de Banach de $H(\Delta_o)$ sur SC. On peut donner une autre formulation de ce résultat.

PROPOSITION 1. Pour que la série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ soit la série de Taylor à l'origine d'une fonction f analytique dans le domaine :

$$\Delta_o = \{ x \in K \mid |x-1| \geq 1 \} ,$$

et nulle à l'infini, il faut et il suffit que $n \to a_n$ $(n \geq 1)$ soit prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$. Alors

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \Delta_o} |f(x)| = \operatorname*{Sup}_{n \geq 0} |a_n| .$$

2. Complémentaire d'un nombre fini de classes entières modulo $\mathfrak{M}$

Soient maintenant $D_i = \alpha_i + \mathfrak{M}$, $i = 1, \dots, n$, des disques ouverts disjoints différents de $\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire tels que $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i - \alpha_j| = 1$) et soit $\Delta = \complement \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ et $H_o(\Delta)$ l'espace des fonctions analytiques sur Δ et nulles à l'infini. Si $D'_i = \complement D_i$, on sait que $H_o(\Delta)$ est somme directe des espaces $H_o(D'_i)$ c'est-à-dire que toute $f \in H_o(\Delta)$ s'écrit de façon unique

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{où} \qquad f_i \in H(D'_i) .$$

Pour $i=1, \dots, n$, il existe m_i tel que $\alpha_i^{m_i} \in 1+\mathfrak{M}$, donc il existe m tel que pour $i = 1, \dots, n$ $\alpha_i^m \in 1+\mathfrak{M}$. Soit Z une racine primitive m-ienne de 1 , il existe $k_1, \dots, k_n$ distincts tels que pour $1 \leq i \leq n$

$$\alpha_i + \mathfrak{M} = Z^{-k_i} + \mathfrak{M} .$$

Soit $\mathfrak{M}_j = Z^{-j} + \mathfrak{M}$, $\Delta_j = \complement \mathfrak{M}_j$, $\Delta' = \bigcap_{j=0}^{m-1} \Delta_j$, on a donc

$$\Delta' \subseteq \Delta \quad , \; H_o(\Delta') = \bigoplus_{j=0}^{m-1} H_o(\Delta_j) \quad ,$$

et

$$H_o(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_o(\Delta_{k_i}) \quad .$$

Nous allons caractériser $S_{\Delta'}$, puis nous obtiendrons une caractérisation de S_Δ comme sous-espace du précédent. On sait que $H_o(\Delta_j)$ admet les fonctions $(e_{k,j})_{k\geq 1}$, où $e_{k,j}(x) = (1 - Z^j x)^{-k}$ comme base normale. Or

$$a(e_{k,j})(n) = Z^{nj} \binom{k+n-1}{k-1} \quad .$$

Donc si $f \in H_o(\Delta)$, $f = \sum_{j=0}^{m-1} f_j$ où $f_j \in H_o(\Delta_j)$,

$$f_j = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,j}\, e_k \quad , \quad \text{alors}$$

$$a(f)(n) = \sum_{j=0}^{m-1} Z^{nj} \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,j} \binom{k+n-1}{k-1} \quad .$$

Autrement dit, soit $(SC)_j$ le sous-espace de S constitué des suites $n \to a_n$ telles que " $n \to Z^{-nj} a_n$ " $\in SC$, on a :

$$S_{\Delta_j} = (SC)_j \qquad \text{et ,}$$

$$S_{\Delta'} = \bigoplus_{j=0}^{m-1} (SC)_j \quad .$$

Donc la suite $a \in S_{\Delta'}$ si et seulement s'il existe des fonctions continues $(\varphi_j)_{0\leq j<m}$, $\varphi_j \in E$, telles que

$$a_n = \sum_{0\leq j<m} Z^{nj} \varphi_j(n) \quad .$$

On peut encore caractériser autrement ces suites. En effet, si $a \in S_{\Delta'}$, soit, pour $0 \le r < m$, u_r la suite

$$n \to u_r(n) = a_{r+nm} .$$

Alors

$$(1) \qquad u_r(n) = \sum_{0 \le j < m} Z^{rj} \varphi_j(r+nm) , \quad \text{donc } u_r \in SC .$$

Réciproquement si $u_r \in SC$, $0 \le r < m$, soit $\tilde{u}_r \in E$ son prolongement continu à $\mathbb{Z}_p$, et soit, pour $0 \le j < m$

$$(2) \qquad \tilde{\varphi}_j(t) = \frac{1}{m} \sum_{0 \le r < m} Z^{-jr} u_r\left(\frac{t-r}{m}\right) ,$$

alors $\tilde{\varphi}_j \in E$ (car $(m,p) = 1$). De plus $t \to \frac{t-r}{m}$ est une isométrie de $\mathbb{Z}_p$, donc, si $(SC)^{(m)}$ désigne le sous-espace de S constitué des suites a telles que si $n \to u_r(n) = a_{r+nm}$, $u_r \in SC$, les formules (1) et (2) montrent que $S_{\Delta'} = (SC)^{(m)}$.

De plus, si $f \in H^o(\Delta')$, $f = \sum_{0 \le j < m} f_j$, $f_j = 0$ si et seulement si $\tilde{\varphi}_j$ donnée par (2) est nulle. D'où la

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> Z <u>une racine primitive</u> m<u>-ième de</u> 1 <u>et</u> $\Delta' = \bigcup_{j=0}^{m-1} (Z^{-j} + \mathfrak{M})$. <u>Une série formelle</u> $\sum_{n \ge 0} a_n X^n$ <u>est la série de Taylor à l'origine d'une fonction</u> $f \in H_o(\Delta')$ <u>si et seulement si</u>

(i) <u>pour</u> $0 \le r < m$ <u>les suites</u> $n \to u_r(n) = a_{r+mn}$, $n \ge 0$, <u>sont prolongeables en des fonctions</u> $\tilde{u}_r$ <u>continues sur</u> $\mathbb{Z}_p$.

(ii) <u>S'il en est ainsi,</u>

<u>Soit</u> $\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq [0, m-1]$ <u>et soit</u>

$$\Delta = \complement \bigcup_{i=1}^{n} (Z^{-k_i} + \mathfrak{M}) \ , \quad \Delta \supseteq \Delta' \ .$$

<u>Pour que</u> $f \in H_o(\Delta)$, <u>il faut et il suffit que pour</u> $j \notin \{k_1, \dots, k_n\}$, $0 \leq j < m$,

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \sum_{0 \leq r < m} Z^{-jr} u_r \left(\frac{t-r}{m}\right) = 0 \ .$$

(iii) <u>Si</u> $f \in H_o(\Delta')$, $f = \sum_{j=0}^{m-1} f_j$, $f_j \in H_o(\complement Z^{-j} + m)$,

<u>On a</u>

$$\|f_j\| = \operatorname{Sup}_{t \in \mathbb{Z}_p} |\tilde{\varphi}_j(t)| \ ,$$

<u>où</u> $\tilde{\varphi}_j$ <u>est donné par la formule (2).</u>

Par exemple, soit χ un caractère multiplicatif de $\mathbb{Z}$ dont le conducteur est $f = mp^h$, $h \neq 0$, $(m, p) = 1$, $m \neq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^k} X^n$, où k est un entier quelconque, est la série de Taylor à l'origine d une fonction analytique dans le complémentaire de la réunion des $Z^{-j} + \mathfrak{M}$ où Z^{-j} parcourt l'ensemble des racines primitives m-ièmes de 1 .

3. <u>Généralisation</u>

Soit Δ un quasi-connexe fermé de K contenant 0 et ∞ . Nous dirons que Δ est un "<u>bon" quasi-connexe</u> si son complémentaire Δ' est réunion d'une famille de disques ouverts D'_i dont le rayon r_i est la distance de D_i à 0 . Alors $H_o(\Delta)$ est somme directe des espaces $H_o(D_i)$, où $D_i = \complement D'_i$. On déduit à peu près immédiatement de la proposition 2, la

PROPOSITION 3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série convergente, pour qu'elle soit la série de Taylor à l'origine d'une fonction f analytique dans un "bon" quasi-connexe Δ et nulle à l'infini, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(\theta_i)_{i\geq 1}$, $\theta_i \in K$, une suite m_i, $m_i \in \mathbb{N}$, $(m_i, p) = 1$, et des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$

$$\varphi_{r_{i,i}} \ , \quad 0 \leq r_i < m_i \ , \quad i \geq 1 \ , \quad \text{tels que}$$

$$\lim_{j\to\infty} \left(\sup_n |\theta_j^{-n} \varphi_{r_{j,j}}(n)| \right) = 0 \ , \quad \text{et}$$

$$a_n = \sum_{j\geq 1} \theta_j^{-n} \varphi_{r_j}(n), j \left(\frac{n - r_j(n)}{m_j}\right) ,$$

où $r_j(n)$ désigne le reste de n modulo m_j.

-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE. - Interpolation p-adique. - Bull. Soc. Math. Fce. 92, 1964.

[2] L. GRUSON. - Algèbres de Banach ultramétriques. Journées Poitou-Aquitaine de la SMF. - Poitiers - Juin 1966.

[3] M. KRASNER. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque CNRS - Clermont-Ferrand, 1964.

-:-:-:-:-:-:-:-