Jean Fresnel

Fonctions zêta p-adique des corps de nombres abéliens réels

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 15, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A15_0>

FONCTIONS ZETA p-ADIQUE DES CORPS DE NOMBRES ABELIENS REELS

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-:-

0. - INTRODUCTION

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation, Ω_p un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, A son anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ son idéal de valuation.

Soit K une extension, abélienne, réelle, finie du corps $\mathbb{Q}$. La fonction Zêta du corps K est définie par

$$Z(s,K) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{q}} \frac{1}{(1-N(\mathfrak{q})^{-s})} \qquad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 1$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers de K non nuls et où le produit est étendu à tous les idéaux premiers de K.

Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs (c'est-à-dire des caractères de Dirichlet) du corps K, à chaque $\chi \in \mathfrak{X}$ on associe la fonction $L(\,.\,,\chi)$ définie par

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{q} \frac{1}{(1-\chi(q)q^{-s})}$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers. On peut alors factoriser la fonction Zêta sous la forme

$$Z(s,K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s,\chi) .$$

D'autre part, χ étant toujours un caractère primitif du corps K de conducteur f, la fonction L p-adique $L_p(.,\chi)$ définie par Kubota et Leopoldt [8] est l'application continue de $\mathbb{Z}_p$ dans

$$Q_p(\chi) = Q_p[\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(f)],$$

telle que pour m entier positif et $m \equiv 0 \mod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$) on ait

$$(1) \qquad L_p(1-m, \chi) = (1-\chi(p)p^{m-1}) L(1-m, \chi)$$

ceci a bien un sens puisque

$$L(1-m,\chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m}$$

où $B^m(\chi)$ est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli [10], [4] relatif au caractère χ, ce nombre est algébrique et appartient au corps $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(1), \ldots, \chi(f))$.

Afin d'expliciter ces définitions, rappelons la signification du caractère θ_p [4], [8].

Soient p un nombre premier distinct de 2 et θ_p l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ définie par

$$\theta_p(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n} \qquad \text{(limite p-adique)}$$

(c'est-à-dire $\theta_p(a) \equiv a \mod p\,\mathbb{Z}_p$ et $(\theta_p(a))^p = \theta_p(a)$).

Si $p = 2$, θ_2 est <u>l'application de</u> $\mathbb{Z}_2$ <u>dans</u> $\mathbb{Z}_2$ <u>définie par</u>

$$\theta_2(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \in 2\,\mathbb{Z}_2 \\ 1 & \text{si} \quad a \equiv 1 \mod 4\,\mathbb{Z}_2 \\ -1 & \text{si} \quad a \equiv -1 \mod 4\,\mathbb{Z}_2 \end{cases}.$$

Si n est un entier rationnel θ_p^n est l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant :

$$\theta_p^n(a) = \begin{cases} \theta_p(a)^n & \text{si} \quad a \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases}.$$

Si p est un nombre premier, ε_p <u>est l'application de</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>dans</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>satisfaisant</u> :

$$\varepsilon_p(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

On a donc $\theta_p^o = \varepsilon_p$.

On voit alors que la relation (1) s'écrit

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi\varepsilon_p).$$

Pour construire les fonctions L p-adique, il existe jusqu'ici trois méthodes [8], [4], [6] que nous allons rappeler brièvement. La première de ces méthodes, celle de Kubota et Leopoldt, utilise la remarque suivante : pour $m > 0$ et $m \equiv 0 \mod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$)

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi\varepsilon_p) = -\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m}$$

d'autre part

$$(2) \qquad B^m(\chi\varepsilon_p) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi\varepsilon_p(a) a^m \quad \text{(limite p-adique)}$$

où $f_1 = \operatorname{ppcm}(f, p)$. Posons, selon [8]

$$\langle a\rangle = \begin{cases} \theta_p(a)/a & \text{si} \quad a \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

La relation (2) s'écrit donc

$$B^m(\chi\varepsilon_p) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi(a) \langle a\rangle^m \qquad \text{(limite p-adique)}.$$

Kubota et Leopoldt considèrent alors une forme linéaire $\mathfrak{M}_\chi$ définie sur un certain espace de fonction par

$$\mathfrak{M}_\chi(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi(a)\, \varphi(\langle a\rangle).$$

Ils montrent alors que cette forme linéaire est continue et on voit par suite que la fonction $L_p(.\,,\chi)$ est définie par

$$L_p(1-s, \chi) = -\frac{1}{s}\, \mathfrak{M}_\chi(x \mapsto x^s).$$

La seconde méthode revient à considérer la fonction

$$(1-m) \mapsto -\frac{B^m(\chi\theta_p^{-m})}{m}$$

et à montrer en utilisant un théorème d'interpolation p-adique [1] que cette fonction définie sur les entiers négatifs se prolonge à $\mathbb{Z}_p$ en une fonction continue. Ceci revient à démontrer que les nombres de Bernoulli satisfont des congruences du type Kummer.

Iwasawa construit ces fonctions par une méthode différente. Il les obtient à partir d'un quotient de séries entières en T en remplaçant cette indéterminée par $(1+q)^s-1$, q étant un entier déterminé par le caractère χ . Cette définition lui permet de mettre en évidence une relation entre les fonctions L p-adiques et la p-composante du groupe des classes d'idéaux de la Γ-extension fondamentale au-dessus du corps K .

Ces trois méthodes présentent l'inconvénient de faire oublier l'analogie avec les fonctions L définies comme séries

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} .$$

Nous proposons ici de donner une méthode qui sera plus proche de cet aspect. De façon simple, considérant la série de Taylor

$$G(s,\chi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi\,\theta_p^{-1}(n) \left(\frac{\theta_p(n)}{n}\right)^s T^n$$

on est tenté d'écrire l'égalité

$$L_p(1-s,\chi) = G(1-s,\chi, 1) \quad .$$

Il est à peu près clair que tout le problème consiste à donner un sens à $G(s,\chi, 1)$, en effet la série de Taylor $G(s,\chi,T)$ a pour rayon de convergence 1^- et par conséquent $G(s,\chi, 1)$ n'a pas de sens à priori. Pour lui en donner un, on montre que la fonction $G(s,\chi,.)$ est prolongeable analytiquement (au sens de Krasner) [7] à un domaine quasi-connexe contenant 0 et 1 .

Dans un premier paragraphe nous énonçons quelques résultats sur le prolongement analytique en analyse p-adique. Au paragraphe 2 nous démontrons que l'on peut définir les fonctions L p-adiques par la méthode indiquée précédemment et en montrer l'analycité. Au paragraphe 3 nous montrons comment l'on peut obtenir une formule p-adique des résidus pour le nombre de classes d'idéaux.

1. - PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe nous allons énoncer deux théorèmes sur les fonctions analytiques.

THEOREME 1. [2], [3] - Soit $\varphi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ une série entière à coefficients dans Ω_p. Pour qu'elle soit la série de Taylor à l'origine d'une fonction analytique Φ dans le domaine $D = \{x \in \Omega_p \mid |x-1| \geq 1\}$ et nulle à l'infini, il faut et il suffit que la fonction $n \to a_n$, notée a soit prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$. Si

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(1-x)^k} \quad \text{où} \quad \lambda_k \to 0 \quad \text{et}$$

$$\sup_{x \in D} |\Phi(x)| = \|\Phi\|_D = \sup_k |\lambda_k| , \qquad \text{on a}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{n+k-1}{n-1} , \quad \lambda_k = \sum_{i=1}^{k} (i)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} a(-i) \quad \text{et}$$

$$\|\Phi\|_D = \sup_n |a_n| .$$

Ce théorème permet de montrer que la suite (λ_n) tend vers zéro. Le théorème qui va suivre montre que la façon dont (λ_n) tend vers zéro dépend du module de continuité de la fonction a. Rappelons tout d'abord que si (u_n) est une suite très bien répartie [1] le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'interpolation est

$$Q_n(x) = \frac{(x-u_o)(x-u_1)\dots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_o)(u_n-u_1)\dots(u_n-u_{n-1})} .$$

Ainsi $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base normale du $\mathbb{Q}_p$-espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme [1].

THEOREME 2. - Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ telle que

(i) $\|f\| \leq 1$,

(ii) il existe un entier u tel que, quel que soit k entier positif, quels que soient x et y dans Z_p satisfaisant $|x-y| \leq |p|^k$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq |p|^{k-u} .$$

Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n$ la série d'interpolation de f sur la suite (u_n), alors pour $n \geq p^{k+u}$ on a $|a_n| \leq |p|^k$.

Ce théorème admet en quelque sorte une réciproque [5].

II. - CONSTRUCTION DES FONCTIONS $L_p(\,.\,,\chi)$

Dans ce paragraphe nous introduirons deux fonctions, $(s,X) \to h(s,X)$ et $(s,X) \to k(s,X)$ dont nous étudierons les propriétés d'analycité et qui nous permettront de définir les fonctions $L_p(\,.\,,\chi)$.

Etant donnée la définition du caractère θ_p (introduction), on voit que l'expression $\frac{1}{p}(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1)$ appartient à $\mathbb{Z}_p$ si $x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$. On définit ainsi une application ψ_p pour $p \neq 2$ de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ par

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad x \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

et de même pour $p = 2$ <u>on définit</u> ψ_2 comme étant <u>une application de</u> $\mathbb{Z}_2$ <u>dans</u> $\mathbb{Z}_2$ satisfaisant

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{x}{\theta_2(x)} - 1) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}_2 - 2\mathbb{Z}_2 \\ 0 & \text{si} \quad x \in 2\mathbb{Z}_2 \end{cases}.$$

Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, alors la série

$$(3) \qquad \varepsilon_p(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \binom{s}{k} \psi_p^k(x)$$

converge uniformément sur tout sous-disque circonférencié du disque D_1 non circonférencié de centre 0 et de rayon $|p|^{-1+1/p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. $|2|^{-1}$ si $p = 2$). Si $x \in \mathbb{Z}_p$ et si $s \in D_1$ <u>nous noterons</u> $(\frac{x}{\theta_p(x)})^s$ <u>la</u> somme de la série (3). Il est clair que la fonction $s \mapsto (\frac{x}{\theta_p(x)})^s$ est analytique et bornée sur D_1. De façon plus précise nous avons si $x \in p\mathbb{Z}_p$

$$|(\frac{x}{\theta_p(x)})^s| = 1 \quad \text{quel que soit } s \in D_1 \quad , \quad \text{et}$$

$$|(\frac{x}{\theta_p(x)})^s - 1| < |p|^{1/p-1} \qquad \text{si} \quad s \in D_1 \quad .$$

Ces notations étant précisées, nous allons définir les fonctions $L_p(.\,,\chi)$ par l'introduction successive de deux fonctions $(s,X)\mapsto k(s,X)$ et $(s,X)\mapsto h(s,X)$.

La série de Taylor

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n)\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n}$$

est convergente pour $s\in D_1$ et $|X|<1$.

Si $s\in D_1$ et $|X|<1$, <u>nous posons</u>

$$(4)\qquad h(s,X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n)\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n}\ .$$

<u>Soit</u> D_2 <u>le domaine défini de la façon suivante</u> :

$$D_2 = \{\, X\in\Omega_p \mid |1-X|\geq 1 \,\}\ .$$

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> $s_o\in D_1$, <u>alors la fonction</u> $X\mapsto h(s_o,X)$ <u>est analytique sur</u> D_2.

<u>Preuve.</u> La fonction $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ $x\to\varepsilon_p(x)\left(\frac{x}{\theta_p(x)}\right)^s\times\frac{1}{x}$ est continue, ainsi le théorème 1 montre que la fonction $X\to h(s,X)$ est développable en série de Laurent sur D_2 sous la forme :

$$h(s_o,X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n(s_o)}{(1-X)^n}$$

Désormais la fonction $X\mapsto h(s_o,X)$ désignera le prolongement analytique à D_2 de la fonction $X\mapsto h(s_o,X)$ définie sur D_1 par (4).

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> $X_o\in D_2$, <u>alors la fonction</u> $s\mapsto h(s,X_o)$ <u>est analytique et bornée sur</u> D_1.

<u>Preuve.</u> Posons $u_i = -(i+1)$, nous avons

$$\varepsilon_p(x)\left(\frac{x}{\theta_p(x)}\right)^s\times\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(s)\,Q_n(x)\ .$$

Posons

$$\frac{1}{x}\,\psi_p^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k Q_n(x)\ ,$$

ainsi
$$\lambda_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k \, p^k \binom{s}{k} .$$

D'autre part la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \psi^k(x)$ satisfait l'hypothèse du théorème 2 avec $u = 1$, il s'ensuit que la relation $\{n \geq p^{k+1}\}$ implique la relation $\{ |\lambda_n(s)| \leq |p^k| \}$. En conclusion la suite de fonctions (λ_n) converge vers 0 uniformément sur D_1 et la série
$$h(s, X_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s)}{(1-X_o)^n}$$
converge uniformément sur D_1. D'autre part, nous avons $|\lambda_n(s)| \leq 1$ quel que soit $s \in D_1$, on peut conclure que
$$|h(s, X)| \leq 1 \qquad \text{quels que soient } s \in D_1 \text{ et } X \in D_2 \quad .$$
Ce qui démontre la proposition.

Si $|X| < 1$ et si $s \in D_1$ nous avons
$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \, h(s, Z_f^a X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \chi \, \varepsilon_p(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n} .$$
On cherche donc à savoir si l'on peut faire $X = 1$, c'est-à-dire si l'on peut donner un sens à $h(s, Z_f^a)$ pour montrer que la fonction
$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(x)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \, h(s, Z_f^a)$$
est la fonction $L_p(. , \chi)$.

Tout d'abord, remarquons que si $(a, f) \neq 1$ nous avons $\bar{\chi}(a) = 0$, par suite le fait de savoir si $h(s, Z_f^a)$ a un sens ne se pose que pour $(a, f) = 1$. Il est alors clair que $Z_f^a \in D_2$ si et seulement si $f \neq p^e$. Ainsi pour satisfaire le cas où $f = p^e$ nous avons recours à un artifice. Nous remplaçons la fonction $h(. , .)$ par une fonction $k(. , .)$ et la fonction $X \mapsto k(s, X)$ sera analytique sur un domaine contenant les Z_f^a même pour $f = p^e$.

Soit c un entier tel que $(c, p) = 1$, $c \neq 1$ et soit $k(s, X)$ <u>la série de Taylor en</u> X <u>définie par</u>

$$(5) \qquad k(s, X) = h(s, X) - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s h(s, X^c) .$$

LEMME 1. - Soit ξ une racine primitive $c^{\text{ième}}$ de l'unité. Si $s \in D_1$ et si $|X| < 1$ nous avons l'égalité

$$k(s,X) = -\sum_{i=1}^{c-1} h(s, \xi^i X) .$$

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = -1 \quad \text{si} \quad c \nmid n$$

$$\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = c-1 \quad \text{si} \quad c \mid n$$

et que $\qquad \varepsilon_p(c) = 1 .$

Soit D_3 le domaine suivant de Ω_p :

$$D_3 = \{ X \in \Omega_p \mid \left| \frac{X^c - 1}{X-1} \right| \geq 1 \} .$$

PROPOSITION 3. - Soit $s_o \in D_1$, alors la fonction $X \to k(s_o, X)$ est prolongeable analytiquement sur D_3 .

Preuve. D'après la proposition de la fonction $X \mapsto h(s_o, \xi^i X)$ est développable en série de Laurent sous la forme

$$h(s_o, \xi^i X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s_o)}{(1-\xi^i X)^n} \quad \text{si} \quad |1-\xi^i X| \geq 1 .$$

En utilisant la décomposition du lemme 1 nous avons

$$k(s_o, X) = -\sum_{i=1}^{c-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s_o)}{(1-\xi^i X)^n} \quad \text{si} \quad X \in D_3 .$$

Cette égalité montre bien que la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ est analytiquement prolongeable à D_3 .

Comme pour la fonction $X \to h(s_o, X)$ désormais la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ désignera le prolongement analytique à D_3 de la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ définie sur D_1 par (5) .

PROPOSITION 4. - Soit $X_o \in D_3$, alors la fonction $s \mapsto k(s, X)$ est analytique et bornée sur D_1 .

Preuve. Si $X_o \in D_3$, l'élément $\xi^i X_o \in D_2$ pour $1 \leq i < c$ et la proposition 2 dit que la fonction $s \mapsto h(s, \xi^i X_o)$ est analytique et bornée sur D_1.

Rappelons que si χ est un caractère primitif de conducteur $f(\chi)$, si Z_f est une racine primitive $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité (si $\chi = \varepsilon$ le caractère trivial, nous posons $f(\varepsilon) = 1$ et $Z_f = 1$) la somme de Gauss associée à χ et Z_f est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a) Z_f^a .$$

Remarquons que dans la notation de la somme de Gauss nous ne faisons figurer que le caractère χ afin de ne pas alourdir les notations.

Donnons une convention et rappelons quelques relations classiques. Soit χ un caractère primitif de conducteur f, φ une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement sur les éléments de $\mathbb{N}$ premier à f) à valeur dans une extension de $\mathbb{Q}$.

Par convention dans une sommation de la forme

$$\sum_{a=1}^{f} \chi(a)\varphi(a)$$

l'expression $\chi(a)\varphi(a)$ est nulle si $(a,f) \neq 1$ (que $\varphi(a)$ soit définie ou non).

Soient $c \in \mathbb{N}$, $(c,f) = 1$, φ une fonction périodique de période f, on a

$$(6) \qquad \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\varphi(ac) = \chi(c) \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\varphi(a) .$$

Rappelons que $\bar{\chi}$ est le caractère défini par $\bar{\chi}(a) = 0$ si $\chi(a) = 0$ et $\bar{\chi}(a) = \chi(a)^{-1}$ si $\chi(a) \neq 0$.

Soient φ une fonction périodique de période f_1 avec $f_1 | f$ et $f_1 \neq f$, on a

$$(7) \qquad \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\varphi(a) = 0 .$$

Nous nous proposons dans la suite de montrer que la fonction

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\, k(s, Z_f^a) \frac{1}{1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est la fonction $L_p(\,.\,,\chi)$. Pour ce faire il nous faudra donc démontrer que cette fonction prend sur les entiers négatifs congrus à $1 \bmod (p-1)$ (si $p \neq 2$)

les mêmes valeurs que la fonction $L_p(.\,,\chi)$ c'est-à-dire

$$L_p(1-m,\chi) = -\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m}$$

si $m \equiv 0 \mod p-1$ et $m > 0$.

<u>Désormais l'entier</u> c <u>choisi précédemment sera astreint aux conditions supplémentaires suivantes</u> :

Si $\chi \neq \varepsilon$, $0 < c < p\,f(\chi)$, $\chi(c) \neq 1$ et $(c, p\,f(\chi)) = 1$.
Si $\chi = \varepsilon$, $0 < c < p^2$ et $c \neq 1$.

Ici encore il faut remarquer que l'entier c ainsi choisi dépend du caractère χ et du nombre premier p .

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère primitif</u>, Z_f <u>une racine primitive</u> $f(\chi)^{\text{ième}}$ <u>de l'unité et</u> $\tau(\chi)$ <u>la somme de Gauss associée au caractère</u> χ <u>et à la racine</u> Z_f. <u>Alors pour tout entier positif</u> r <u>divisible par</u> $p-1$ <u>si</u> $p \neq 2$ (<u>resp. divisible par</u> 2 <u>si</u> $p = 2$) <u>nous avons</u>

$$-\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\, k(r, Z_f^a) = -(1-\chi(c)\,c^r)\,\frac{B^r(\chi\varepsilon_p)}{r} ,$$

<u>où</u> $B^r(\chi\varepsilon_p)$ <u>est le</u> $r^{\text{ième}}$ <u>nombre de Bernoulli relatif au caractère</u> $\chi\varepsilon_p$.

<u>Preuve.</u> Nous savons que les nombres de Bernoulli [4], [10] $B^r(\chi\varepsilon_p)$ vérifient la relation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i(\chi\varepsilon_p)\,(cf')^{n+1-i} = (n+1) \sum_{k=1}^{cf'} \chi\varepsilon_p(k)k^n$$

où $f' = \text{ppcm}\,(p, f(\chi))$. Posons

$$B_1^r(\chi\varepsilon_p) = (1-\chi(c)\,c^r)\,B^r(\chi\varepsilon_p) .$$

Il est facile de voir que les nombres $B_1^r(\chi\varepsilon_p)$ vérifient la relation de récurrence

$$(8) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_1^i(\chi\varepsilon_p)(cf')^{n+1-i} = (n+1) \sum_{k=1}^{cf'} \chi\varepsilon_p(k)\,k^n - (n+1)\,c^{n+1}\chi(c) \sum_{k=1}^{f'} \chi\varepsilon_p(k)\,k^n .$$

Nous allons maintenant montrer que les nombres

$$- \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, k(r, Z_f^a)_{\times} \; r$$

ou plus exactement des expressions analogues satisfont la relation de récurrence.

Soit la série de Taylor

$$g_i(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n)\, n^{i-1} X^n \qquad i \geq 1 \; .$$

Si $i \equiv 0 \mod p-1$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $i \equiv 0 \mod 2$, lorsque $p = 2$) on a

$$h(i, X) = g_i(X) \; .$$

Soit K l'opérateur $X \frac{d}{dX}$, on a

$$g_i(X) = H^{i-1}\, g_1(X) \; ,$$

de plus $g_1(X)$ se décompose sous la forme

$$g_1(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n)\, X^n = \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{1 - Z_p^a X} \; .$$

Par suite $g_1(X)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines primitives $p^{\text{ième}}$ de l'unité. De même si $i \equiv 0 \mod(p-1)$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $i \equiv 0 \mod 2$ lorsque $p = 2$) nous avons

$$k(i, X) = g_i(X) - c^i\, g_i(X^c) \; .$$

Il est aisé de voir que $g_1(X) - c\, g_1(X^c)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $cp^{\text{ième}}$ de l'unité qui ne sont pas racines $p^{\text{ième}}$. Il en est donc de même de

$$g_i(X) - c^i\, g_i(X^c) = H^{i-1}\,(g_1(X) - c\, g_1(X^c) \; .$$

Les fractions rationnelles $g_i(X)$ satisfont la relation de récurrence suivante

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i}\, i\, g_i(X)\, (\lambda f')^{n+1-i} = (n+1) \Big\{ \Big(\frac{1}{X^{\lambda f'}} - 1 \Big)\, g_{n+1}(X) - \frac{1}{X^{\lambda f'}} \sum_{k=1}^{\lambda f'} \varepsilon_p(k)\, k^n X^k \Big\}$$

où λ est un entier positif. Cette relation permet d'obtenir successivement

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} i\, g_i(X)(c f')^{n+1-i} = (n+1)\Big\{\Big(\frac{1}{X^{cf'}}-1\Big) g_{n+1}(X) - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n X^k \Big\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (i\, c^i g_i(X^c))\, (c f')^{n+1-i} = c^{n+1}(n+1)\Big\{\Big(\frac{1}{X^{cf'}}-1\Big) g_{n+1}(X) - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{f} \varepsilon_p(k) k^n X^{ck} \Big\} .$$

En soustrayant ces deux dernières relations, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} i\, (g_i(X) - c^i g_i(X^c))\, (c f')^{n+1-i} =$$
$$(n+1)\Big\{\Big(\frac{1}{X^{cf'}}-1\Big)(g_n(X) - c^n g_n(X^c)) - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n X^k + \frac{c^{n+1}}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k) k^n X^{ck} \Big\} .$$

Il résulte de l'étude des pôles de $g_i(X) - c^i g_i(X^c)$ que Z_f^a n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $g_i(X) - c^i g_i(X)$ si $(a, g) = 1$. Ainsi

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} i\, (g_i(X) - c^i g_i(X^c))_{X=Z_f^a} \times (cf')^{n+1-i} - (n+1)\Big\{ \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k)\, k^n Z_f^{ak} - c^{n+1} \sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k)\, k^n Z_f^{caf'} \Big\} . \tag{9}$$

Sachant que l'on a

$$\tau(\chi)\ \tau(\bar{\chi}) = f(\chi)$$

un calcul facile montre que

$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \Big(\sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k)\, k^n Z_f^{ak}\Big) = \sum_{k=1}^{cf'} \chi\, \varepsilon_p(k) k^n$$
$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \Big(\sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k) k^n Z_f^{ack}\Big) = \chi(c) \sum_{k=1}^{f'} \chi\, \varepsilon_p(k)\, k^n \ . \tag{10}$$

Les relations (9) et (10) indiquent alors que les quantités

$$\beta_i = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\ i\, (g_i(X) - c^i g_i(X^c))_{X = Z_f^a}$$

satisfont la relation de récurrence (8) des nombres $B_1(\chi)$. Comme

$$\beta_o = B_1^o(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \times (0) \times (g_o(X) - g_o(X^c))_{X=Z_f^a} = 0$$

ceci prouve que

$$\beta_i = B_1^i(\chi\,\varepsilon_p) \qquad \text{pour } i \geq 0$$

ainsi

$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\,k(r, Z_f^a) = B_1^r(\chi\varepsilon_p) = (1-\chi(c)c^r)\,B^r(\chi\,\varepsilon_p)$$

si $r \equiv 0 \mod (p-1)$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $r \equiv 0 \mod 2$ lorsque $p = 2$).

THEOREME 3.- <u>Soit</u> χ <u>un caractère primitif non trivial</u>. <u>Alors la fonction</u>

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\,k(s, Z_f^a)\,\frac{1}{1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

<u>définie sur</u> D_1 <u>est la fonction</u> $L_p(.\,,\chi)$. <u>Elle est analytique et bornée sur</u> D_1.

<u>Preuve.</u> La fonction $s \mapsto \chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ est analytique sur D_1. De plus, quel que soit $s \in D_1$ on a

$$\left|\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s - 1\right| < |p|^{1/p-1} \quad , \text{ et par suite}$$

$$\left|1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s\right| = |1-\chi(c)| \quad \text{quel que soit } s \in D_1$$

ainsi $1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ ne s'annule pas sur D_1 et la fonction

$$(1-s) \mapsto \frac{1}{1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est analytique sur D_1. La proposition nous montre que

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\,k(s, Z_f^a)\,\frac{1}{1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est analytique sur D_1 et bornée par $|1-\chi(c)|^{-1}$. Finalement sur les entiers négatifs congrus à 1 mod $(p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. congrus à 1 mod 2 si $p = 2$) cette fonction prend les mêmes valeurs que la fonction $L_p(.\,,\chi)$ (proposition 5). Le théorème en résulte immédiatement.

THEOREME 4. - <u>Soit</u> c <u>un entier associé au caractère trivial</u>. <u>Alors la fonction</u>

$$(11) \qquad (1-s) \mapsto -\frac{k(s,1)}{1-\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

<u>est la fonction</u> $Z_p(\,.\,,\mathbb{Q}) = L_p(\,.\,,\varepsilon)$. <u>Elle est méromorphe sur</u> D_1 , <u>elle a un seul pôle</u>, <u>il est en</u> 1 , <u>il est simple et a pour résidu</u> $\frac{p-1}{p}$. <u>De plus la fonction</u> $s \mapsto (s-1)\, Z_p(s,\mathbb{Q})$ <u>est bornée sur</u> D_1 .

Preuve. La quantité $\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ se décompose sous la forme

$$\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s = 1 + s\, g(s) \quad , \qquad \text{où } g \text{ est une fonction analytique}$$

sur D_1 . Il est aisé de vérifier que

$$|g(s)| = \left| 1 - \frac{c}{\theta_p(c)} \right| .$$

Par suite, la fonction $(1-s) \mapsto \dfrac{s}{1-\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$ est analytique et bornée sur D_1 et $(1-s) \mapsto -\dfrac{k(s,1)}{1-\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$ est méromorphe sur D_1 admet un seul pôle il est en 1 . Calculons sans résidu

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}{-s} = \log\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right) = \frac{1}{p-1} \log(c^{p-1})$$

$$k(0,X) = h(0,X) - h(0,X^c)$$

or
$$h(0,X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) \frac{X^n}{n} = \frac{1}{p} \log \frac{(1-X)^p}{1-X^p}$$

d'où
$$k(0,X) = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-X)^p}{1-X^p} \times \frac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p} \right\}$$

$$k(0,1) = -\frac{1}{p} \log(c^{p-1}) ,$$

ainsi le résidu cherché est $\frac{p-1}{p}$. Finalement la proposition 5 montre que la fonction (11) prend sur les entiers négatifs congrus à 1 mod (p-1) si $p \neq 2$ (resp. congrus à 1 mod 2 si $p = 2$) les mêmes valeurs que la fonction $Z_p(\,.\,,\mathbb{Q})$. Ceci termine donc la preuve du théorème.

III. - FORMULE ANALYTIQUE p-ADIQUE POUR LE NOMBRE DE CLASSES D'IDEAUX

Rappelons la définition des quantités $L_p(\chi)$ qui sont des équivalents p-adiques des quantités complexes $L(1,\chi)$. Pour définir ces expressions nous considérerons trois cas, toutefois χ désignera toujours un caractère primitif, $f(\chi)$ son conducteur, Z_f une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associé à χ et Z_f.

a) Cas où $f(\chi) \neq p^e$

$$(12) \qquad L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) \log(1-Z_f^a) .$$

On remarque en effet que la condition $f(\chi) \neq p^e$ implique que $1-Z_f^a$ est une unité p-adique si $(a, f(\chi)) = 1$ et que par suite le logarithme p-adique de $1-Z_f^a$ est défini.

b) Cas où $f(\chi) = p$

$$(13) \qquad L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \sum_{a=1}^{p} \bar{\chi}(a) \log \frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}$$

c) Cas où $f(\chi) = p^e \quad e > 1$

$$(14) \qquad L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \cdot \frac{1}{p} \cdot \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) \log\left\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{(1-Z_f^{ap})}\right\} .$$

Nous pouvons montrer maintenant que les quantités $L_p(\chi)$ sont à un facteur simple près les valeurs au point 1 des fonctions $L_p(\cdot,\chi)$.

THEOREME 5. - *Quels que soient le caractère* $\chi \neq \varepsilon$ *et le nombre premier* p , *nous avons*

$$L_p(1,\chi) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi) .$$

Preuve. Calculons l'expression $\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi)$. Supposons $f(\chi) \neq p^e$.

Si de plus $p \nmid f$, d'après (6)

$$\chi(p) \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \log(1-Z_f^a) = \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \log(1-Z_f^{ap})$$

et ainsi

$$(15) \qquad (1-\frac{\chi(p)}{p})\, L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, \frac{1}{p} \log\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}\} .$$

Si $p \mid f$, d'après (7)

$$\sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \log(1-Z_f^{ap}) = 0$$

et ainsi

$$(1-\frac{\chi(p)}{p})\, L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, \frac{1}{p} \log\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}\} .$$

<u>Supposons</u> $f(\chi) = p^e$ $e > 1$, nous avons en utilisant (14)

$$(16) \qquad (1-\frac{\chi(p)}{p})\, L_p(\chi) = L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, \frac{1}{p} \log\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}\} .$$

<u>Supposons</u> $f(\chi) = p$, on a

$$(17) \qquad (1-\frac{\chi(p)}{p})\, L_p(\chi) = L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p} .$$

<u>Calculons l'expression</u> $L_p(1,\chi)$. D'après le théorème 3

$$L_p(1,\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, k(0, Z_f^a)\, \frac{1}{1-\chi(c)}$$

$$k(0,X) = h(0,X) - h(0,X^c) = \frac{1}{p} \log\{\frac{(1-X)^p}{1-X^p} \times \frac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p}\} .$$

<u>Si</u> $f \neq p$ <u>et si</u> $(a,f) = 1$

$$k(0, Z_f^a) = \frac{1}{p} \log\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} \times \frac{1-Z_f^{acp}}{(1-Z_f^{ac})^p}\} \quad , \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_f^a) = \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} - \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^{ac})^p}{1-Z_f^{acp}} .$$

Par suite en utilisant (6) on obtient

$$(18) \qquad \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, k(0, Z_f^a) = (1-\chi(c)) \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} .$$

<u>Si</u> $f = p$ <u>et si</u> $(a,p) = 1$

$$k(0, Z_p^a) = \frac{1}{p} \log \{\frac{(1-Z_p^a)^p}{(1-Z_p^{ac})^p} \times c\} , \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_p^a) = \log \frac{1-Z_p^a}{1-Z_p^{ac}} + \frac{1}{p} \log c \quad , \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_p^a) = \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p} - \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_p^{ac})^{p-1}}{p} + \frac{1}{p} \log c \ .$$

Par suite en utilisant (6) on obtient

$$(19) \qquad \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, k(0, Z_f^a) = (1-\chi(c)) \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \frac{1}{p-1} \log \{\frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}\} \ .$$

Finalement les relations (15), (16), (17), (18) et (19) montrent que

$$L_p(1, \chi) = (1 - \frac{\chi(p)}{p})\, L_p(\chi) \ .$$

Il nous est maintenant possible de déterminer une expression analytique p-adique du nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres abélien réel avec le résidu au point 1 de la fonction Zêta p-adique.

THEOREME 6. - <u>Soit</u> K <u>un corps de nombres abélien réel de degré</u> n , <u>de discriminant</u> d , <u>de régulateur</u> p-<u>adique</u> R_p , <u>dont</u> h <u>est le nombre de</u> classes d'idéaux et dont $Z_p(. , K)$ est la fonction Zêta p-adique, alors

$$\frac{2^{n-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\mathfrak{P} | p} (1 - N(\mathfrak{P})^{-1})^{-1} \lim_{s \to 1} (s-1)\, Z_p(s, K)$$

<u>Preuve.</u> On sait [4], [8] que, par définition

$$Z_p(. , K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L_p(. , \chi)$$

où $\mathfrak{X}$ désigne l'ensemble des caractères de l'extension abélienne K .

D'autre part, d'après Leopoldt [11] on a

$$\frac{2^{n-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \varepsilon} L_p(\chi) \ .$$

Le théorème 4 montre que

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\, Z_p(s, \mathbb{Q}) = 1 - \frac{1}{p} \ .$$

D'après le théorème 5 on déduit que

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\, Z_p(s,K) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) \prod_{\chi\neq\varepsilon} L_p(\chi) \quad .$$

La relation

$$\prod_{\chi\in\mathfrak{X}} \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) = \prod_{\mathfrak{P}\mid \mathfrak{p}} \left(1-N(\mathfrak{P})^{-1}\right)$$

est classique et on en déduit la formule cherchée.

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-160.

[2] AMICE Yvette. - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, exposé n° 8, Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux, 1968/69.

[3] AMICE Yvette et FRESNEL Jean. - Fonctions Zêta des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica (à paraître)

[4] FRESNEL Jean. - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques. Annales de l'Institut Fourier, tome XVII, fasc. 2, 1967, pp. 281-333.

[5] HELSMOORTEL Eve. - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, n° 12, pp. 546-548.

[6] IWASAWA Kenkichi. - On p-adic L-functions. Annals of math. vol. 89 n° 1, january 1969, pp. 198-205.

[7] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, n° 143, Colloques internationaux du C. N. R. S.

[8] KUBOTA T. and LEOPOLDT H. W. - Eine p-adishe theorie der Zetawerte. I Einführung der p-adisher Dirichletsen L-Funktionen. Journal für die reine und ang. Math. , t. 214/215, 1964, pp. 328-333.

[9] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique sur un corps valué complet . Publications de l'I. H. E. S. , n° 14.

[10] LEOPOLDT H. W. - Eine verallgemeinerung der Bernoullishen Zahlen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, pp. 131-140.

[11] LEOPOLDT H. W. - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkorpen. Journal für die reine und ang. math. Band 209, Heft 1/2, 1962, pp. 54-71.

-:-:-:-:-:-