SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

PIERRE DAMEY

Extensions cycliques de degré 4, non ramifiées d'un corps quadratiques sur $\mathbb{Q}$

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 12, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A12_0>

Séminaire de Théorie des Nombres (J. LESCA)
Année 1968/1969 , n° 12

7 Mars 1969

EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRE 4 , NON RAMIFIEES D'UN CORPS QUADRATIQUES SUR $\mathbb{Q}$

par

Pierre DAMEY

-:-:-:-:-:-

Notation. $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^2$ on pose $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$
$\tilde{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$

- $\mathcal{K}$ groupe des classes de k , au sens restreint.
- r_1 (resp. r_2) le nombre de groupes cycliques d'ordre 2 (resp. supérieure ou égale à 2^2) dans la décomposition de $\mathcal{K}$ en produit direct de groupes cycliques .
- Mêmes définitions pour $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$.

Problème : relations entre r_2 et $\tilde{r}_2$.

. Etude des extensions cycliques de degré 4 , non ramifiées du corps k .

Propriété. Ce sont des extensions galoisiennes, non abéliennes de $\mathbb{Q}$.

. D'après la théorie du corps de classe il y a une bijection entre les sous-groupes H du groupe $\mathcal{K}$ dont le quotient $\mathcal{K}/H$ est cyclique de degré 4 et les extensions N non ramifiées, cycliques de degré 4 du corps k .

Or N galoisien sur $\mathbb{Q} \Rightarrow$ H globalement invariant par $Gal(k/\mathbb{Q})$ puis N non abélienne sur $\mathbb{Q} \Leftrightarrow gal(k/\mathbb{Q})$ opère non trivialement sur $\mathcal{K}/_H$.

Ici 1) Notons $\overline{\mathfrak{M}}$ le conjugué de l'idéal $\mathfrak{M}$, du corps k ;

$$cl(\mathfrak{M}) \in H \Rightarrow cl(\overline{\mathfrak{M}}) \in H \quad car \quad cl(\overline{\mathfrak{M}}) = cl^{-1}(\mathfrak{M}) .$$

2) Si $cl(\mathfrak{N})$ engendre le quotient $\mathcal{K}/_H$, l'égalité

$$cl(\mathfrak{N})H = \overline{cl(\mathfrak{N})}H \Rightarrow cl(\mathfrak{p}^2) \subset H ,$$

contrarie le fait que $cl(\mathfrak{N})$ engendre le quotient qui est cyclique de degré 4.

Conséquence. N est une extension non abélienne de $\mathbb{Q}$, galoisienne. Il n'y a que deux cas possibles

1) $Gal(N/\mathbb{Q})$ isomorphe au groupe du carré

2) $Gal(N/\mathbb{Q})$ isomorphe au groupe des quaterniens.

Mais dans le cas d'une extension quaternionique, en considérant le groupe d'inertie d'un diviseur premier p ramifié dans k un raisonnement rapide montre que $\mathfrak{P}$ est encore ramifié dans $N/_k$. (cf. Redei und Reichhardt: Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers J. für Mathematik Bd 170 Het. 2. 1933).

D'où finalement il ne reste que les extensions carrées de degré 8 sur $\mathbb{Q}$.

Dénombrement de ces extensions non ramifiées

En utilisant le résultat de la théorie du corps des classes, il suffit de compter le nombre de sous-groupe de $\mathcal{K}$, cyclique de degré 4.

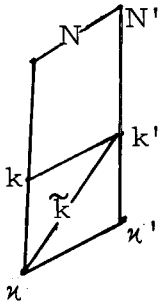
On obtient alors

$2^{r_1+r_2}$ éléments d'ordre 2 ou plus ,

$2^{r_1+2r_2}$ éléments d'ordre 4 ou plus ,

d'où $\underline{\underline{2^{r_1+r_2-1}(2^{r_2}-1)}}$ sous groupes cycliques d'ordre 4 .

Existence et construction d'extensions carrées sur $\varkappa$,
cycliques sur k . ($\varkappa$ corps de caractéristique $\neq 2$).



Idée : On veut utiliser les résolvantes de Lagrange, méthode de Kümmer, donc on a besoin des racines 4-ième de l'unité : on les rajoute (éventuellement).

Alors $N'/_{\varkappa'}$ est extension carrée (si N et $\varkappa'$ disjoints)

Etude de la réciproque : $N'/_{\varkappa'}$ extension carrée peut-on trouver N tel que $N/_{\varkappa}$ soit une extension carrée, cyclique de d° 4 sur k .

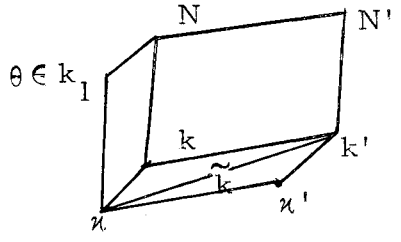
A l'aide du critère de décomposition d'une extension (cf. J. J. Payan, Annales E. N. S. $1/_3$, 1968) on peut aboutir au résultat suivant :

L'existence d une extension carrée N , linéairement disjointe de $\varkappa'$ équivaut à l'existence d'un élément $\alpha \in \tilde{k}$ vérifiant :

$$\alpha \in \tilde{k} \ , \ \alpha \notin k'^2 \quad \text{et} \quad N_{\tilde{k}/\varkappa}(\alpha) \in \varkappa^4 \ .$$

Eléments de démonstration :

$$\mathrm{Gal}(N/_k) = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \ , \ \mathrm{Gal}(k/_{\varkappa}) = \{1, \tau\} \ , \ \mathrm{Gal}(\varkappa'/_{\varkappa}) = \{1, s\}.$$



Condition nécessaire.

Soit $\theta \in K_1$, corps de degré 4 sur $\mathcal{u}$ tel que N soit le composé de k et de K_1 , avec $B = \{ \theta , \theta^{\sigma} , \theta^{\sigma^2} , \theta^{\sigma^3} \}$ base de K_1 sur $\mathcal{u}$. Alors B est une base de l'extension N/k , et aussi de l'extension N'/k' .

Posons $\langle \theta, \chi \rangle = \sum_{\sigma} \chi(\sigma^{-1}) \theta^{\sigma}$ (la résolvante de Lagrange).

Alors $\alpha = (\langle \theta, \chi \rangle)^4$ vérifie

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \in \tilde{k} \\ \alpha \notin k'^2 \\ N_{\tilde{k}/\mathcal{u}}(\alpha) \in \mathcal{u}^4 \end{array} \right.$$

Condition suffisante.

En utilisant le critère de décomposition on peut construire un "bon" 2-cocycle ce qui donne une extension diedrale.

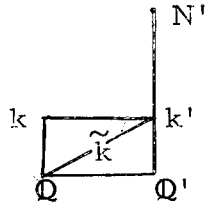
Mieux on obtient deux sous-extensions N et $\hat{N}$.

Etude de la ramification.

$$N \to \alpha \in \tilde{k} \; : \; \alpha \bar{\alpha} = a^4 \Rightarrow \boxed{\alpha = a^2 \frac{\mu}{\bar{\mu}} \quad \mu \in \tilde{k}}$$

Alors on obtient l'écriture suivante :

on va décomposer l'idéal (α) de $\tilde{k}$ en produit d'idéaux entiers en isolant la participation de 2 à cet idéal.



$\alpha \in \tilde{k}$: $\alpha \notin k'^2$ $\quad \alpha\alpha^s = a^4 \quad a \in \mathbb{Q}$

$\alpha = a^2 \dfrac{\mu}{\mu^s} \quad \mu \in \tilde{k}$, $a \in \mathbb{Q}$, $\mu\mu^s \notin k'^2$

$(\alpha) = \mathfrak{N}^4\ \mathfrak{A}\ \bar{\mathfrak{A}}^3\ b^2\ \mathfrak{C}$ avec

- $\mathfrak{A}$ idéal entier de $\tilde{k}$ de norme sans facteur carré et sans facteur ramifié, premier avec 2 .
- b entier naturel, sans facteur carré, impair premier avec $N(\mathfrak{A})$
- $\mathfrak{C}$ idéal entier de $\tilde{k}$ sans facteur $4^{\text{ième}}$ puissance et ne comprement que des facteurs divisant (2).

Remarque : α , -4α , α^3 et $-4\alpha^3$ donne la même extension ($-4 = (1+i)^4 \in k'^4$).

THEOREME. N extension carrée régulière cyclique sur k correspond :

- un entier b impair sans facteur carré, sans facteur ramifié dans $\tilde{k}$
- un couple d'idéaux $(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{A}})$ conjugués de $O_{\tilde{k}}$, premiers à b, de norme impaire sans facteur carré, ni ramifié.
- un idéal $\mathfrak{C}$ avec soit $\mathfrak{C} = O_{\tilde{k}}$ soit $\mathfrak{C} = \mathfrak{q}_{\tilde{k}}\, \bar{\mathfrak{q}}^3_{\tilde{k}}$ si $(2) = \mathfrak{q}_{\tilde{k}}\, \bar{\mathfrak{q}}_{\tilde{k}}$,
- un couple (resp. 2 couples) de classes d'idéaux conjugués $cl(\mathfrak{N})$ et $cl(\bar{\mathfrak{N}})$, (resp. $cl(\mathfrak{N})$, $cl(\bar{\mathfrak{N}})$, $cl(\bar{\mathfrak{q}}_{\tilde{k}}\, \mathfrak{N})$ et $cl(\mathfrak{q}_{\tilde{k}}\, \bar{\mathfrak{N}})$) vérifiant $cl(\mathfrak{N}^4) = cl(\mathfrak{A}^2)$ (resp. $cl(\mathfrak{N}^2) = cl(\mathfrak{A}^2)\, cl(\mathfrak{q}^2_{\tilde{k}})$) si $\mathfrak{C} = O_{\tilde{k}}$ (resp. $\mathfrak{C} = \mathfrak{q}_{\tilde{k}}\, \bar{\mathfrak{q}}^3_{\tilde{k}}$) (classes au sens restreint).

Un calcul élémentaire montre que la partie modérée du discriminent de l'extension N/k est

$$(\Delta_{N/\mathbb{Q}})_t = b^4 [\, N_{\tilde{k}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}) \,]^6 .$$

Pour avoir une extension non ramifiée, il faut donc $b = 1$ et $\mathfrak{A} = (1)$.

Donc $(\alpha) = \mathfrak{N}^4 \mathfrak{C}$ nécessairement.

Pour savoir si on a alors une extension non ramifiée, on utilise les lemmes suivants :

LEMME 1. Si $m \equiv -1(4)$ N'/k' modérément ramifiée $\Leftrightarrow$ N/k et N/k modérément ramifiée.

Si $m \not\equiv -1(4)$ N'/k' modérément ramifiée $\Leftrightarrow$ une et une seule des deux, modérément ramifiée.

(La démonstration utilise l'étude des groupes d'inertie (cf. Serre, corps locaux, ch. IV, prop. 2, p. 70).

LEMME 2. Si $\mathfrak{C} \neq O_{\tilde{k}}$ N'/k' est sauvagement ramifiée.

A l'aide de ces lemmes, on arrive au résultat suivant :

Si $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ $m > 0$, $\tilde{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, on a

$$r_2 \leq \tilde{r}_2 \leq r_2 + 1 .$$

(On dénombre les classes d'idéaux vérifiant $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}^4$ principal, et le nombre d'extensions non ramifiées correspondant à un idéal (α). Ici interviennent les unités).

-:-:-:-:-:-:-