Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Merle

Polyèdre de Newton, éventails et désingularisation, d'après A. N. Varchenko

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A18_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

POLYEDRE DE NEWTON, EVENTAILS ET DESINGULARISATION D'APRES A. N. VARCHENKO ([1])

M. MERLE

22 Mars 1977

Soit f un germe d'application $(\mathbb{C}^k,0) \to (\mathbb{C},0)$ dont l'expression dans un système de coordonnées locales est :

$$f = \sum_{p\in \mathbb{N}^k} f_p \, x^p \; .$$

Nous allons étudier l'effet sur l'application f d'une classe de transformations "monomiales" qui s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{a_1^1} \cdots\cdots y_k^{a_1^k} \\ &\;\vdots \\ x_k &= y_1^{a_k^1} \cdots\cdots y_k^{a_k^k} \end{aligned}$$

et définissent pour $a^j \in \mathbb{N}^k$ $(1 \le j \le k)$ une application $\pi(a^1,\ldots,a^k) : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$.
Nous avons :

$$f \circ \pi(a^1,\ldots,a^k)(y) = \sum_{p\in \mathbb{N}^k} f_p \, y_1^{\langle a^1,p\rangle} \cdots\cdots y_k^{\langle a^k,p\rangle}$$

où $\langle\; ,\; \rangle$ désigne le produit scalaire habituel : $\langle a^j,p\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i^j \, p_i$.

Soit $m(a^j) = \inf\limits_{f_p \neq 0} \langle a^j,p\rangle$. Nous obtenons

(0.1) $$f \circ \pi(a^1,\ldots,a^k)(y) = y_1^{m(a^1)} \cdots\cdots y_k^{m(a^k)} \, \tilde{f}(y)$$

avec $\tilde{f}(0) \neq 0$ et $\tilde{f}(y) = \sum_{p\in \mathbb{N}^k} f_p \, y_1^{\langle a^1,p\rangle - m(a^1)} \cdots\cdots y_k^{\langle a^k,p\rangle - m(a^k)}$.

Il est alors naturel d'interpréter ce qui précède en termes du polyèdre de Newton de f.

§ 1. POLYEDRE DE NEWTON ET EVENTAILS

On définit successivement

$$\operatorname{supp} f = \{p \in \mathbb{N}^k \; ; \; f_p \neq 0\}$$

$\Gamma_+(f)$ = enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^k$ de l'ensemble $(\operatorname{supp} f) + \mathbb{N}^k$

$\Gamma(f)$ = réunion des faces compactes de $\Gamma_+(f)$.

On considère alors les éléments $a \in (\mathbb{R}^*)^k$ tels que $\langle a,p\rangle \geq 0$ pour $p \in \Gamma_+(f)$ et pour chacun d'eux $m(a) = \inf\limits_{p \in \Gamma_+(f)} \langle a,p\rangle$.

Sur l'ensemble de ces formes linéaires nous considérons la relation d'équivalence suivante :

$$a \sim a' \Leftrightarrow (\{p \in \Gamma_+(f)\ ;\ \langle a,p\rangle = m(a)\} = \{p \in \Gamma_+(f)\ ;\ \langle a',p\rangle = m(a')\}) \quad .$$

Une classe d'équivalence est un cône convexe rationnel de sommet 0 dans $(\mathbb{R}_+^*)^k$. On appelle Σ_o l'ensemble des adhérences des classes d'équivalence. Σ_o est l'éventail de f (il ne dépend en fait que du polyèdre de Newton de f). Un tel éventail satisfait aux conditions suivantes :

(i) si σ est une face fermée de $\sigma' \in \Sigma_o$ alors $\sigma \in \Sigma_o$;

(ii) si σ_1 et σ_2 appartiennent à Σ_o, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face (fermée) de σ_1 et de σ_2 ;

(iii) soit $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$ et $\sigma_I = \{a \in (\mathbb{R}^*)^k\ ;\ \forall\, i \in I,\ a_i > 0\ ;\ \forall\, i \notin I,\ a_i = 0\}$.

- si il existe $a^o \in \sigma_I$ avec $m(a^o) > 0$, alors $m(a) > 0$ pour tous les éléments a de σ_I ,
- si il existe $a^o \in \sigma_I$ avec $m(a^o) = 0$, alors $m(a) = 0$ pour tous les $a \in \sigma_I$ et $\overline{\sigma_I} \in \Sigma_o$.

Explicitons la condition (iii).

Soit $\mathrm{proj}_I : R^k \to L_I$ la projection sur le plan défini par $L_I = \{p \in \mathbb{R}^k\ ;\ \forall\, i \in I,\ p_i = 0\}$. Si il existe $a^o \in \sigma_I$ tel que $m(a^o) > 0$ la projection $\mathrm{proj}_I(\Gamma_+(f))$ ne contient pas l'origine et par suite tous les éléments de σ_I prennent des valeurs strictement positives sur σ_I.

Si au contraire il existe $a^o \in \sigma_I$ avec $m(a^o) = 0$, $\mathrm{proj}_I(\Gamma_+(f))$ contient l'origine et tous les éléments $a \in \sigma_I$ sont tels que $\{p \in \Gamma_+(f)\ ;\ \langle a,p\rangle = m(a) = 0\} = \{p \in \Gamma_+(f)\ ;\ \forall\, i \notin I,\ p_i = 0\}$. Par suite $\overline{\sigma_I} \in \Sigma_o$.

Proposition 1.4 ([2], [3]) : Il existe un éventail Σ plus fin que Σ_o qui vérifie toujours les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) : chaque élément $\sigma \in \Sigma$ est engendré par une partie d'une base de $\mathbb{Z}^k$.

A un tel éventail Σ est associé un plongement torique non singulier $X(\Sigma)$, propre au-dessus de $\mathbb{C}^k$ (puisque Σ est un raffinement du quadrant fermé $(\mathbb{R}_+^*)^k$.

Chaque élément $\sigma \in \Sigma$ de dimension k détermine un ouvert $\mathbb{C}^k(\sigma)$ de $X(\Sigma)$ isomorphe à $\mathbb{C}^k$, et un morphisme

$$\pi(\sigma) : \mathbb{C}^k(\sigma) \longrightarrow \mathbb{C}^k .$$

$\pi(\sigma) = \pi(a^1,\ldots,a^k)$ si $\{a^1,\ldots,a^k\}$ est le squelette de σ (ensemble des éléments primitifs des faces de dimension 1 de σ).

Proposition 1.5 : $\pi(\sigma)$ est un isomorphisme en dehors de l'image réciproque de $f = 0$.

Preuve : Le jacobien de $\pi(\sigma)$ est aisément calculable :

$$y_1 \ldots\ldots y_k \cdot \mathrm{Jac}(\pi(\sigma)) = x_1 \ldots\ldots x_k \det(a^j)$$

soit
$$\mathrm{Jac}(\pi(\sigma)) = \det(a^j)\, y_1^{\alpha_1} \ldots\ldots y_k^{\alpha_k}$$

avec
$$\alpha_j = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^j\right) - 1 .$$

$\pi(\sigma)$ est singulière le long de $y_j = 0$ si et seulement si $\alpha_j > 0$, c'est-à-dire si et seulement si α_j n'est pas un vecteur de la base canonique de $(\mathbb{R}^*)^k$.

Vérifions que $f \circ \pi(\sigma)$ s'annule alors pour $y_j = 0$. Il suffit de s'assurer que $m(a^j) \neq 0$ (voir (0.1)). $m(a^j)$ ne peut être nul que si a^j est contenu dans un plan de coordonnées, mais (iii) impose alors que a^j soit un vecteur de base de $(\mathbb{R}^*)^k$ ce qui est impossible si $\pi(\sigma)$ est singulière pour $y_j = 0$.
D'autre part $\pi(\sigma)$ est une bijection en dehors de $x_1\ldots x_k = 0$, puisque le déterminant des a^j, $1 \leq j \leq k$, est inversible sur $\mathbb{Z}$.

Note : Les cartes $\mathbb{C}^k(\sigma)$ et $\mathbb{C}^k(\sigma')$ sont recollées en dehors de l'image inverse de $x_1\ldots x_k = 0$ par l'isomorphisme $(\pi(\sigma))^{-1} \circ \pi(\sigma')$.
Le morphisme $X(\Sigma) \to \mathbb{C}^k$ est noté $\pi(\Sigma)$.

§ 2. ETUDE DE L'IMAGE RECIPROQUE DE f PAR $\pi(\Sigma)$

Théorème 2.1 (Varchenko) : Pour tout éventail Σ plus fin que Σ_o, vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv), les conditions suivantes sont équivalentes :

1) l'image réciproque de $\{f = 0\}$ par le morphisme $\pi(\Sigma)$ est à croisements normaux au voisinage de $\pi(\Sigma)^{-1}(0)$;

2) pour toute face compacte γ du polyèdre de Newton, la fonction $f_\gamma = \sum_{p\in\gamma} f_p x^p$ est non singulière en dehors de l'ensemble $x_1 \dots x_k = 0$. (On dit alors que f est non dégénérée).

Démonstration : La question est évidemment locale sur un voisinage de $(\pi(\Sigma))^{-1}(0)$. Considérons une carte $\mathbb{C}^k(\sigma)$ et la restriction $\pi(\sigma)$ de $\pi(\Sigma)$ à $\mathbb{C}^k(\sigma)$. Nous avons (voir (0.1)) :

$$f\circ\pi(\sigma)(y) = y_1^{m(a^1)} \dots y_k^{m(a^k)}\tilde{f}$$

avec $\tilde{f}(y_1,\dots,y_k) = \sum_p f_p\, y_1^{<a^1,p>-m(a^1)} \dots y_k^{<a^k,p>-m(a^k)}$.

$\tilde{f} = 0$ est l'équation de l'adhérence de l'image inverse de $\{x\in\mathbb{C}^k \,;\, x_1\dots x_k \neq 0 \,;\, f=0\}$ et nous appelons $\tilde{f}$ la transformée stricte de f par $\pi(\sigma)$.

L'assertion 1) est donc équivalente à :

1') au voisinage de tout point ξ de $\pi(\sigma)^{-1}(0)$ l'hypersurface $\tilde{f}=0$ est lisse et coupe transversalement toute "strate" du diviseur $\pi(\sigma)^{-1}(0)$.

$\pi(\sigma)^{-1}(0)$ se décompose en une réunion disjointe de tores $T_I = \{y\in\mathbb{C}^k(\sigma)\ \forall\, i\in I,\ y_i=0,\ \forall\, i\notin I,\ y_i\neq 0\}$ pour $I\subset\{1,2,\dots,k\}$ (que nous appelons les strates de $\pi(\sigma)^{-1}(0)$.

A quelle condition $T_I \subset \pi(\sigma)^{-1}(0)$? La réponse est immédiate :

Lemme 2.2 : $T_I\subset\pi(\sigma)^{-1}(0)$ si et seulement si $\sigma^I\subset\sigma$ engendrée par $\{a^j,\ j\in I\}$ n'est pas contenue dans un hyperplan de coordonnées.

Remarque : Si σ^I n'est pas inclus dans un plan de coordonnées, les hyperplans affines de $\mathbb{R}^k$ donnés par

$$<a^j,p> = m(a^j)$$

pour a^j engendrant σ^I déterminent une face compacte de $\Gamma_+(f)$ notée γ_I.

La condition 1') est donc à son tour équivalente à :

1") pour tout $T_I \subset \pi(\sigma)^{-1}(0)$ et en tout point ξ de T_I, la restriction $\tilde{f}_{|T_I}$ est non singulière.

Lemme 2.3 : $\tilde{f}_{|T_I} = \sum_{p \in \gamma_I} f_p \, y_i^{\langle a^1, p\rangle - m(a^1)} \cdots y_k^{\langle a^k, p\rangle - m(a^k)} = \tilde{f}_{\gamma_I}$.

$\tilde{f}_{\gamma_I}$ étant la transformée stricte par $\pi(\sigma)$ de f_{γ_I}, comme $\pi(\sigma)$ est un isomorphisme en dehors de $x_1 \ldots x_k = 0$, $\tilde{f}_{|T_I}$ sera non singulière si et seulement si f_{γ_I} est non singulière en dehors de $x_1 \ldots x_k = 0$. (A noter : $\tilde{f}_{\gamma_I}$ est un polynôme en y_i, $i \notin I$).

Comme toute face compacte de $\Gamma_+(f)$ est associée à au moins un tore T_I envoyé sur 0 par $\pi(\sigma)$, la condition 1") est équivalente à la non dégénérensce de f. c.q.f.d.

REFERENCES

[1] A.N. Varchenko, Zeta-function of monodromy and Newton's diagram, Inv. Math. 37 (1976) 253-262.

[2] M. Demazure, Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona, Annales Scientifiques de l'E.N.S. 4ème série, t. 3, fasc. 4 (1970).

[3] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings, Lect. Notes in Math. 339, Springer 1973.

Erratum à l'exposé de M. Merle.

Page 4, lignes 1-3, lire :

2) pour toute face compacte γ du polyèdre de Newton, non contenue dans l'adhérence d'une face non compacte, la fonction $f_\gamma = \sum_{p\in\gamma} f_p x^p$ est non singulière en dehors de l'ensemble $x_1 \ldots x_k = 0$.

Page 4, lignes 15-17, lire :

$\pi(\sigma)^{-1}(0)$ se décompose en une réunion disjointe de tores $T_I = \{y \in \mathbb{C}^k(\sigma); \forall\ i \in I,\ y_i = 0;\ \forall\ i \notin I,\ y_i \neq 0\}$ pour $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$. Cet ensemble de tores est ordonné par la relation $T_I \subset \overline{T_{I'}}$. Nous appelons strates de $\pi(\sigma)^{-1}$ $\pi(\sigma)^{-1}(0)$ les éléments maximaux pour cette relation, ou denses dans l'intersection d'adhérence d'éléments maximaux.

Page 4, entre les lignes -1 et -2, intercaler :

T_I est une strate de $\pi(\sigma)^{-1}$ si la face γ_I n'est pas contenue dans l'adhérence d'une face non compacte de $\Gamma_+(f)$.

Page 5, ligne 1, lire :

1") pour toute strate $T_I \subset \pi(\sigma)^{-1}(0)$ et en tout point ξ de T_I, la restriction

Page 5, supprimer les 3 lignes avant les références.