Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Demazure

A, B, C, D, E, F, etc

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A15_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S D E S S U R F A C E S

A, B, C, D, E, F, etc

M. DEMAZURE

15 Février 1977

On appellera dans cet exposé <u>graphe pondéré</u> un couple $\Gamma = (I,a)$, où I est un ensemble fini et a une application de l'ensemble $\mathcal{P}_2(I)$ des parties à deux éléments de I dans $\mathbb{R}_+^*$. On associe à Γ la forme quadratique

$$\Phi_\Gamma((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} x_i^2 - \sum_{\{i,j\}} a\{i,j\}\, x_i\, x_j \quad .$$

On impose la condition

$$(*) \qquad a\{i,j\} \neq 0,1 \Longrightarrow a\{i,j\} \geq \sqrt{2} \quad .$$

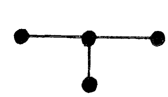
<u>Exemples</u> : 1) Si $(m_{ij}) \in M_I(\mathbb{Z})$ est une <u>matrice de Coxeter</u> ($m_{ii} = 2$, $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$), on pose $a\{i,j\} = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{5}/2}, \sqrt{3}$, etc. Alors Φ_Γ est > 0 (positive et non dégénérée) si et seulement si le groupe de Coxeter $G = \langle (s_i) \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$ est fini.

2) G est <u>cristallographique</u> si de plus $m_{ij} = 2,3,4,6$, c'est-à-dire $a\{i,j\} = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.

3) A un "carquois" est associé un graphe pondéré avec $a\{i,j\} \in \mathbb{N}$.

On se propose de déterminer les graphes pondérés (satisfaisant à (*)) pour lesquels Φ_Γ est ≥ 0 (resp. > 0). On représente graphiquement Γ par le graphe dont I est l'ensemble des sommets, $\mathrm{Supp}(a)$ l'ensemble des arêtes, et on affecte chaque arête $\{i,j\}$ du coefficient $a\{i,j\}$ (on l'omet s'il est égal à 1).

Si $\Gamma' = (I',a')$ est un autre graphe pondéré, on note $\Gamma \leq \Gamma'$ la relation : il existe une application injective $\varphi : I \to I'$ telle que $a\{i,j\} \leq a'\{\varphi(i),\varphi(j)\}$ pour tout $\{i,j\}$; si φ n'est pas un isomorphisme, on note $\Gamma < \Gamma'$.

Par exemple, si D_4 est le graphe  , alors $D_4 \leq \Gamma$ si et seulement si Γ possède un point triple.

<u>Lemme 1</u> : <u>Supposons</u> $\Gamma < \Gamma'$, Γ' <u>connexe et</u> $\Phi_{\Gamma'} \geq 0$. <u>Alors</u> $\Phi_\Gamma > 0$.

Soit $(x_i)_{i\in I} \neq 0$ tel que $\Phi_\Gamma(x_i) \leq 0$. Posons $y_{\varphi(i)} = |x_i|$ pour $i \in I$ et $y_j = 0$ pour $j \notin \varphi(I)$. Alors $\Phi_\Gamma(|x_i|) \leq \Phi_\Gamma(x_i) \leq 0$, et

$$\Phi_\Gamma(|x_i|) = \sum y_{\varphi(i)}^2 - \sum a\{i,j\}\, y_{\varphi(i)}\, y_{\varphi(j)} \quad ,$$

donc

$$(**)\qquad \Phi_{\Gamma'}(y_k) + \Sigma(a'\{\varphi(i),\varphi(j)\} - a\{i,j\})y_{\varphi(i)}\, y_{\varphi(j)} \le 0 \quad .$$

Comme $\Phi_{\Gamma'} \ge 0$, cela implique d'abord $\Phi_{\Gamma'}(y_k) = 0$. Montrons que tous les y_k sont $\neq 0$; cela implique que φ est bijectif et, vu (**), que $a'\{\varphi(i),\varphi(j)\} = a\{i,j\}$, ce qui contredira $\Gamma < \Gamma'$. Soit $K = \{j \in I' \mid y_j = 0\}$; si $K \neq \emptyset$, il existe $i_o \in I'$, $j_o \in K$ avec $i_o \notin K$ et $a'\{i_o,j_o\} \neq 0$ (puisque I' est connexe). Posons $y_i' = y_i$ pour $i \notin K$, $y_{j_o}' = \eta > 0$, $y_j = P$ pour $j \in K$, $j \neq j_o$. Alors

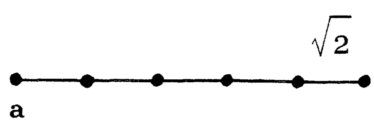
$$0 \le \Phi_{\Gamma}(y_i') = \Phi_{\Gamma}(y_i) + \eta^2 - \sum_{i \notin K} a\{i,j_o\}\, y_i\, \eta \le \eta^2 - a\{i_o,j_o\}\, y_{i_o}\, \eta \quad .$$

Donc $\eta^2 - a\{i_o,j_o\}\, y_{i_o}\, \eta \ge 0$ pour tout η, ce qui est impossible.

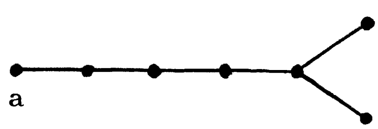
<u>Lemme 2</u> : <u>Considérons</u>

$\Gamma_1 =$ 

, p sommets,

$\Gamma_2 =$ 

, p sommets,

$\Gamma_3 =$ 

, p sommets .

<u>Alors</u> $\inf\{\Phi_{\Gamma_i}(x), x_a > 0 \text{ donné}\} = \lambda_i x_a^2$ <u>avec</u> $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ <u>et ce minimum est atteint pour l'unique vecteur</u>

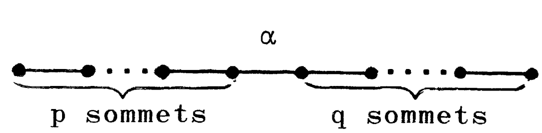
$$\frac{x_a}{p}\,(p,p-1,\dots,1) \quad \underline{\text{pour}}\ \Gamma_1$$

$$\frac{x_a}{2}\,(2,2,\dots,2,\sqrt{2}) \quad \underline{\text{pour}}\ \Gamma_2$$

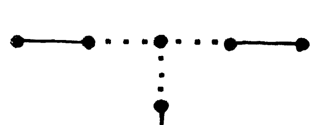
$$\frac{x_a}{2}\,(2,2,\dots,2,1) \quad \underline{\text{pour}}\ \Gamma_3 \quad .$$

C'est immédiat.

<u>Lemme 3</u> : <u>Considérons</u>

$\Gamma_{pq}^{\alpha} =$ 

(p+q sommets)

$\Gamma_{pqr} =$ 
(branches de longueur p,q,r, au au total p+q+r-2 sommets) .

Alors
$$\Phi_{\Gamma^{\alpha}_{pq}} > 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 < \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)$$
$$\Phi_{\Gamma^{\alpha}_{pq}} \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 \leq \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)$$
$$\Phi_{\Gamma_{pqr}} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$$
$$\Phi_{\Gamma_{pqr}} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq 1 \quad .$$

D'après le lemme 2, $\Phi_{\Gamma^{\alpha}_{pq}}$ est > 0 ou ≥ 0 si et seulement si il en est de même de la forme

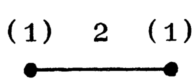
$$x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}\right)+y^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}\right)-\alpha xy \quad ,$$

dont le déterminant est $\alpha^2-\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)$. De même, $\Phi_{\Gamma_{pqr}}$ est > 0 ou ≥ 0 s'il en est de même de

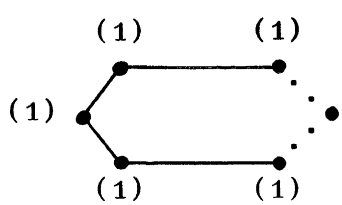
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}\right)-2 \quad .$$

Proposition 1 : Les graphes suivants donnent des formes positives et dégénérées. (On indique entre parenthèses l'unique vecteur à un coefficient près qui est dans le noyau de la forme.)

$\tilde{A}_1$

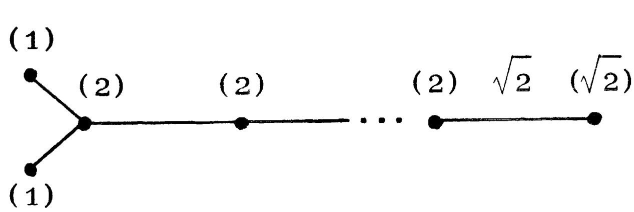


$\tilde{A}_n$



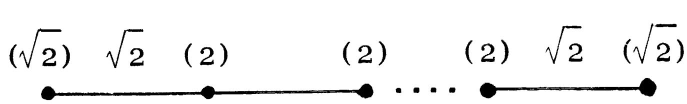
(cycle à n + 1 sommets, n ≥ 2)

$\tilde{B}_n$



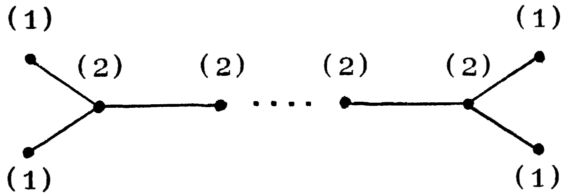
(n + 1 sommets, n ≥ 3)

$\tilde{C}_n$



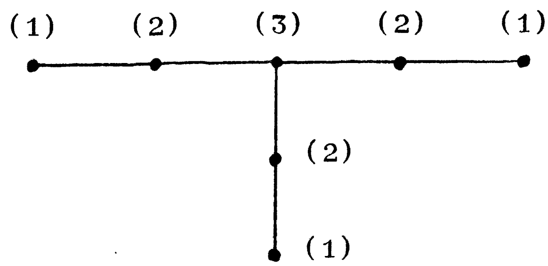
(n+1 sommets, n ≥ 2)

$\tilde{D}_n$



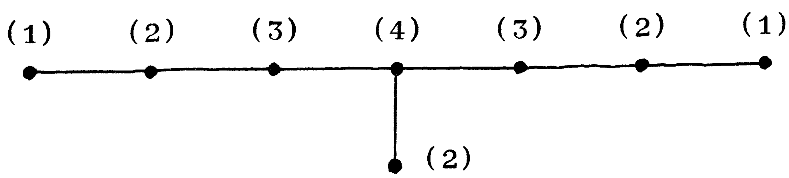
(n+1 sommets, $n \geq 4$)

$\tilde{E}_6$



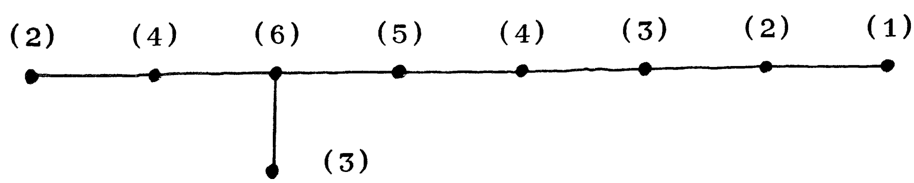
$(\tilde{E}_6 = \Gamma_{333})$

$\tilde{E}_7$



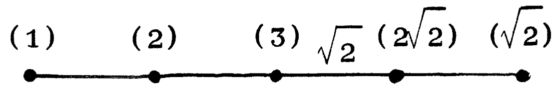
$(\tilde{E}_7 = \Gamma_{244})$

$\tilde{E}_8$



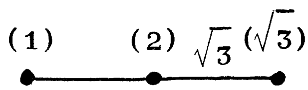
$(\tilde{E}_8 = \Gamma_{236})$

$\tilde{F}_4$



$(\tilde{F}_4 = \Gamma_{23}^{\sqrt{2}})$

$\tilde{G}_2$

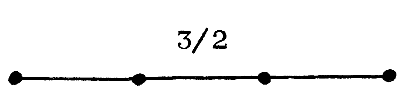


$(\tilde{G}_2 = \Gamma_{12}^{\sqrt{3}})$

U_n

$a_n = \sqrt{2 + \frac{2}{n}}$ (n + 1 sommets, $n \geq 3$)

V_3



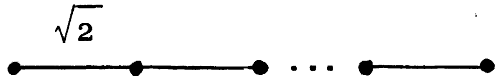
Celà se vérifie trivialement grâce aux lemmes 2 et 3.

Théorème 1 : A) Les graphes de la prop. 1 sont les seuls graphes pondérés connexes qui donnent des formes positives dégénérées.

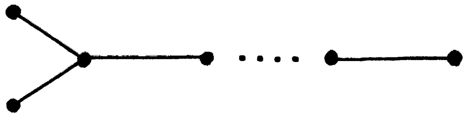
B) Les graphes pondérés connexes donnant des fornes positives non dégénérées sont les suivants (l'indice indique le nombre de sommets)

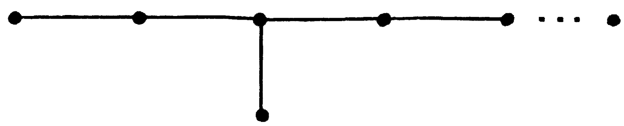
A_n

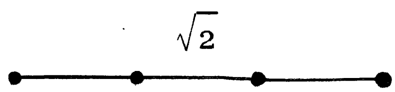
$(n \geq 1)$

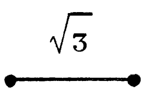
$B_n = C_n$ 

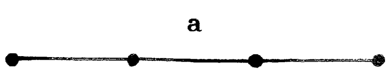
$(n \geq 2)$

D_n  $(n \geq 4)$

E_n  $(6 \leq n \leq 8)$

F_4 

G_2 

$H_4(a)$ 

$\sqrt{2} < a < \frac{3}{2}$

$I_n(a)$ 

, $\sqrt{2} < a < \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$, n sommets, $n \geq 2$

Chacun des graphes de B) est < à un graphe de la prop. 1, donc donne une forme positive non dégénérée (lemme 1). Soit Γ un graphe pondéré connexe tel que Φ_r soit ≥ 0. Distinguons plusieurs cas.

a) Si Γ contient deux points triples, alors $\Gamma \geq \tilde{D}_n$, donc $\Gamma = \tilde{D}_n$ (lemme 1).

b) Si Γ contient un point triple et une liaison > 1, alors $\Gamma \geq \tilde{B}_n$, donc $\Gamma = \tilde{B}_n$ (lemme 1).

c) Si Γ contient un point triple et ne possède que des liaisons simples, alors $\Gamma = \Gamma_{pqr}$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ (lemme 3), ce qui donne les solutions "maximales" $(2,2,\infty)$, $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$, et toutes les solutions inférieures pour l'ordre produit, d'où les graphes D_n, $\tilde{E}_n$, E_n.

d) Si Γ ne possède aucun point triple et possède une liaison > 1, alors $\Gamma \geq \Gamma^a_{pq}$ avec $p \leq q$, donc $2 \leq a^2 \leq (1 + \frac{1}{p})(1 + \frac{1}{q})$ (lemmes 1 et 3). Cela donne les solutions $p = 1$, q quelconque, $2 \leq a^2 \leq 2(1 + \frac{1}{q})$ (graphes $\tilde{G}_2$, U_n, G_2 et $I_n(a)$) ; $p = 2$, $q = 2$, $2 \leq a^2 \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$ (graphes V_3 et $H_4(a)$) ; $p = 2$, $q = 3$, $a^2 = 2$, (graphe $\tilde{F}_4$).

e) Enfin si Γ ne possède ni point triple, ni liaison > 1, alors $\Gamma = A_n$ ou $\Gamma = \tilde{A}_n$.

<u>Remarque</u> : On notera que U_n, V_3 ne sont pas cristallographiques, ni $H_4(a)$, ni $I_n(a)$ sauf $I_2(\sqrt{3}) = G_2$. De même les graphes U_n, V_3, $H_4(a)$ sauf

$H_4(2\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{3+\frac{\sqrt{5}}{2}})$, $I_n(a)$ pour $n \geq 3$ sauf $I_3(2\cos\frac{\pi}{5})$, et $I_2(a)$ sauf les $I_2(2\cos\frac{\pi}{p})$ $p \geq 5$. On trouve ainsi les graphes de Coxeter notés H_4, H_3 et $I_2(p)$.
