

# SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. PINKHAM

### Singularités rationnelles de surfaces

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique)* (1976-1977), exp. n° 10, p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=SSS\\_1976-1977\\_\\_\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977___A11_0)

© Séminaire sur les singularités des surfaces  
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S  
D E S   S U R F A C E S

SINGULARITES RATIONNELLES DE SURFACES\*

H. PINKHAM

4 Janvier 1977

---

\* Partially supported by NSF grant 32843 at Columbia University.



Nous nous proposons de faire une liste des propriétés les plus saillantes de singularités rationnelles de dimension 2. Pour pallier la sécheresse d'une telle liste, nous donnons quelques démonstrations, sans essayer d'être systématiques, mais en développant deux thèmes : d'une part le cycle fondamental (pour cette partie nous suivons de près les articles d'Artin [2,3] et et Tjurina [27]) ; d'autre part les liens des points doubles rationnels avec les systèmes de racines. Nous avons essayé de donner suffisamment de références pour que le lecteur puisse trouver sans difficulté les démonstrations manquantes.

Pour simplifier l'exposition, nous travaillons sur un corps de base  $k$  algébriquement clos, mais de caractéristique quelconque (pour certains résultats nous aurons besoin de caractéristique 0). Signalons quand même que Lipman [20,21] a développé une théorie des singularités rationnelles dans un cadre beaucoup plus général. Les méthodes qu'il emploie sont très différentes des nôtres et nous n'en dirons rien (voir cependant § 11).

Outre les outils habituels de la géométrie algébrique, nous utiliserons intensivement la cohomologie locale et la notion de profondeur. Une bonne référence pour ces questions est [15], et pour la profondeur seulement [1], qui contient aussi une exposition de la dualité suffisante pour nos besoins. Pour la théorie des intersections sur une surface lisse, consulter le livre de Mumford, "Curves on an algebraic surface" (Princeton) ou [20].

## 1. DEFINITIONS

Dans tout cet exposé, une singularité (de surface)  $(X,P)$  ou simplement  $X$  est un couple formé d'un schéma affine  $X = \text{Spec } A$ , où  $A$  est une  $k$  algèbre locale, normale, essentiellement de type fini et de dimension 2 et  $P$  est le point fermé.

$\pi : X' \rightarrow X$  est une résolution de  $X$  si  $\pi$  est un morphisme birationnel propre qui est un isomorphisme au-dessus de  $X - P$ , et  $X'$  est régulier le long du diviseur exceptionnel  $E = \pi^{-1}(P)$ .

Le genre de  $X$  est la dimension sur  $k$  de  $H^1(X', \mathcal{O}_{X'})$ . Cette dimension ne dépend pas de la résolution  $\pi : X' \rightarrow X$  choisie. En effet, il est facile de vérifier que pour l'éclatement d'un point régulier  $Q \in Y$ , noté  $e : Y' \rightarrow Y$ , on a  $H^0(Y', R^1 e_* \mathcal{O}_{Y'}) = 0$ . L'assertion découle alors du théorème de factorisation des applications birationnelles de surfaces régulières, et de la suite spectrale

standard (voir (\*\*), prochain paragraphe). Comme on suppose  $X$  affine, on a  $H^1(X', F) = H^0(X, R^1\pi_*F)$  pour tout faisceau cohérent  $F$ . D'autre part il est facile de voir que le genre ne dépend que du complété de  $X$  au point  $P$ .

$X$  est rationnel si son genre est nul. Cette définition est due à Artin [3].

Soient  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel  $E$ . Comme  $X$  est normal,  $E$  est connexe par le Main Theorem de Zariski [EGA III]. Nous ferons un usage constant de la Proposition (Duval [12'], Mumford [22]) : La matrice d'intersection  $(E_i \cdot E_j)$  des composantes du diviseur exceptionnel est négative non dégénérée.

Nous utiliserons aussi de nombreuses fois l'argument simple suivant : si  $E$  et  $D$  sont des diviseurs effectifs sur une surface, sans composante commune, alors  $E \cdot D \geq 0$ .

Voici, pour finir, quelques notations ( $F$  est un faisceau sur  $Z$ )

$$h^i(Z, F) = \dim_k H^i(Z, F)$$

$$\chi(Z, F) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j h^j(Z, F)$$

$$\chi(Z) = \chi(Z, \mathcal{O}_Z)$$

$$p(Z) = 1 - \chi(Z).$$

## 2. EXEMPLE (caractéristique 0) : LES SINGULARITES QUOTIENTS SONT RATIONNELLES

Par singularité quotient on entend le quotient d'un espace lisse par un groupe fini. Plus généralement nous montrons (Brieskorn [9], Satz 1.7) que le quotient d'une singularité rationnelle  $(X, P)$  par un groupe fini  $G$  agissant librement sur  $X$  en dehors du point  $P$  est une singularité rationnelle. Le quotient  $Y = X/G$  est évidemment affine avec éventuellement un point singulier, l'image  $Q$  de  $P$ .  $Q$  est normal : il faut montrer que les groupes de cohomologie locale  $H_Q^i(\mathcal{O}_Y)$ ,  $i = 0$ , sont nuls. On les calcule par la suite spectrale suivante (Grothendieck [15], p. 73), qui nous sera aussi utile pour plus tard :

(\*) Soient  $\pi : X' \rightarrow X$  un morphisme de variétés algébriques,  $Y$  une sous-variété fermée de  $X$ ,  $Y' = \pi^{-1}(Y)$ ,  $F$  un  $\mathcal{O}_{X'}$ -module. Alors on a une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = H_Y^p(X, R^q\pi_*F) \implies H_{Y'}^n(X', F) .$$

Dans le cas qui nous intéresse,  $R^q\pi_*F$  est nul pour  $q > 0$ , puisque  $\pi$  est fini. Donc  $H_Q^i(\mathcal{O}_Y) = H_P^i(\mathcal{O}_X)$  pour tout  $i$ , et puisque  $P$  est normal, on a

$H_P^i(\mathcal{O}_P) = 0$  pour  $i = 0, 1$ .

Il faut maintenant démontrer que  $(Y, Q)$  est rationnelle. On peut évidemment trouver des résolutions  $g: Y' \rightarrow Y$  et  $f: X' \rightarrow X$  telles qu'on ait un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{\pi'} & Y' \\
 f \downarrow & \searrow h & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{\pi} & Y
 \end{array}$$

(résoudre d'abord  $Y$  et prendre comme résolution de  $X$  la résolution du graphe de l'application rationnelle  $X \dashrightarrow Y'$ ).

On a deux suites spectrales :

$$(**) \quad E_2^{pq} = R^p g_* (R^q \pi'_* \mathcal{O}_{X'}) \implies R^n h_* \mathcal{O}_X,$$

$$E_2^{pq} = R^p \pi_* (R^q f_* \mathcal{O}_{X'}) \implies R^n h_* \mathcal{O}_X, \quad .$$

Comme  $\pi$  est fini  $R^q \pi_* F = 0$  pour  $q > 0$ . D'autre part comme  $X$  est rationnelle  $R^q f_* \mathcal{O}_{X'} = 0$  pour  $q > 0$ . (Le seul cas à vérifier est bien sûr  $q = 1$ .) Donc la seconde suite spectrale montre que  $R^1 h_* \mathcal{O}_X = 0$ . La première suite montre alors que  $R^1 g_* (\pi'_* \mathcal{O}_{X'}) = 0$ . On conclut en notant que  $\mathcal{O}_Y$  est un facteur direct de  $\pi'_* \mathcal{O}_{X'}$  (prendre la factorisation de Stein de  $X' \rightarrow Y'$  et utiliser le morphisme trace et le fait qu'on est en car. 0), c.q.f.d.

On donnera une autre démonstration de ce résultat au paragraphe 16.

### 3. UN LEMME TECHNIQUE

Revenons aux notations du § 1. On appelle cycle exceptionnel un diviseur strictement positif sur  $X'$ , à support  $E$ . Un tel diviseur s'écrit donc

$$Z = \sum_{i=1}^s r_i E_i, \quad r_i \geq 0 \text{ avec au moins un } r_i > 0.$$

Le lemme technique suivant joue un rôle très important par la suite :

Lemme (Artin [2], 1.7) : Soit  $Z = \sum_{i=1}^s r_i E_i$  un cycle exceptionnel avec tous

les  $r_i$  strictement positifs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$

b) pour tout cycle exceptionnel  $Y$ ,  $0 < Y \leq Z$ ,  $p(Y) \leq 0$

c)  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z^*) \simeq \mathbb{Z}^s$  .

Nous ne démontrerons ici que l'équivalence a)  $\Leftrightarrow$  b), qui est facile.

Définissons quand même pour tout  $Z$  la flèche  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z^*) \rightarrow \mathbb{Z}^s$  qui donne l'isomorphisme dans c). A un élément de  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z^*)$  correspond un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $Z$ .  $\mathcal{L}$  induit par restriction des faisceaux inversibles  $\mathcal{L}_i$  sur  $E_i$ , de degrés  $d_i$ . Alors l'application en question est donnée par  $\mathcal{L} \mapsto (d_i)_{1 \leq i \leq s}$ . Donc c) implique qu'un faisceau inversible sur  $Z$  est uniquement déterminé par ses degrés sur  $E_i$ .

a)  $\Rightarrow$  b). L'inclusion  $Y \hookrightarrow Z$  donne une surjection  $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Y$ . Puisque ces espaces sont de dimension 1 on a une surjection  $H^1(\mathcal{O}_Z) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_Y)$ . Comme on a  $h^0(\mathcal{O}_Y) \geq 1$ , on en tire l'inégalité voulue.

b)  $\Rightarrow$  a). Prenons  $Y = E_i$ . L'hypothèse implique donc que les  $E_i$  sont des courbes rationnelles lisses. On procède par récurrence sur  $n = \sum r_i$  (on vient de voir que le résultat est vrai pour  $n = 1$ ). Supposons le résultat vrai pour  $\sum r_i - 1$ . Posons  $Z_0 = Z - E_i$ . On a  $0 \rightarrow \mathcal{O}_Z(-Z_0) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{Z_0} \rightarrow 0$ . Par l'hypothèse de récurrence on a  $H^1(\mathcal{O}_{Z_0}) = 0$ , et nous allons montrer que  $H^1(\mathcal{O}_Z(-Z_0)) = 0$ . On voit facilement que  $\mathcal{O}_Z(-Z_0)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{E_i}(-Z_0)$ . Mais  $E_i \approx \mathbb{P}^1$ ; il suffit donc de montrer que le degré  $-Z_0 \cdot E_i$  est  $\geq -1$ , c'est-à-dire que  $Z \cdot E_i \leq 1 + E_i \cdot E_i$ . Il suffit d'établir cette inégalité pour un quelconque des  $E_i$ ; supposons donc par contradiction qu'on a  $Z \cdot E_i \geq 2 + E_i \cdot E_i$  pour tout  $i$ . Rappelons la formule du genre

$$(*) \quad p(Z) = \frac{Z \cdot (Z + K)}{2} + 1 \quad ,$$

$K$  un diviseur canonique de  $X'$ .

$$p(E_i) = 0, \text{ donc } K \cdot E_i = -2 - E_i \cdot E_i .$$

Donc

$$(Z + K) \cdot Z = (Z + K) \cdot (\sum r_i E_i) \geq 0 \quad ,$$

ce qui implique  $p(Z) \geq 1$ , une contradiction.

#### 4. PREMIER CRITERE DE RATIONALITE

Un corollaire de ce lemme (on se sert seulement de l'équivalence a)  $\Leftrightarrow$  b) démontrée plus haut) est la

**Proposition** (Artin [3], Proposition 1) :  $(X, P)$  est une singularité rationnelle si et seulement si pour tout cycle exceptionnel  $Z > 0$ ,  $p(Z) \leq 0$ .

Par le théorème des fonctions holomorphes (EGA III, 4.2.1)

$$(R^1 \pi_* \mathcal{O}_{X'})_P = \varprojlim_{(r) \rightarrow \infty} H^1(X', \mathcal{O}_{Z(r)}) = 0 \quad ,$$

où  $(r) = (r_1, \dots, r_s)$  et  $Z(r) = \sum r_i E_i$ .

Pour  $(r') \geq (r)$ , c'est-à-dire tout  $r'_i \geq r_i$ , on a une surjection  $\mathcal{O}_{Z(r')} \rightarrow \mathcal{O}_{Z(r)}$ .

Comme E est de dimension 1 on obtient une surjection  $H^1(X', \mathcal{O}_{Z(r')}) \rightarrow H^1(X', \mathcal{O}_{Z(r)})$ .

Donc pour que X soit rationnel il faut et il suffit que pour tout  $(r)$ ,  $H^1(X', \mathcal{O}_{Z(r)}) = 0$ . La proposition résulte donc de l'implication a)  $\Rightarrow$  b) du lemme précédent.

## 5. LA RESOLUTION MINIMALE D'UNE SINGULARITE RATIONNELLE

Voici un corollaire du critère précédent :

Proposition : Soient  $\pi : X' \rightarrow X$  la résolution minimale de la singularité rationnelle  $(X, P)$ ,  $E_i$  les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel E. Alors

a) les  $E_i$  sont des courbes rationnelles lisses

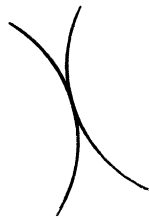
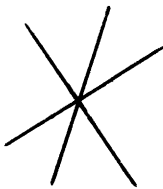
b)  $E_i$  intersecte  $E_j$  transversalement, et pour  $E_i, E_j, E_k$  distincts,

$$E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$$

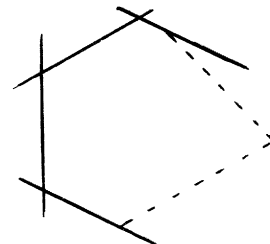
c) E ne contient pas de cycles, i.e. le graphe dual [24, II] de E est

simplement connexe.

Nous avons déjà vérifié a) (voir la démonstration du lemme). Pour toutes les autres assertions il suffit de vérifier, d'après la proposition, que les trois diviseurs Z dessinés ci-dessous ont  $p(Z) > 0$ . (Chaque trait représente  $\mathbb{P}^1$ ).



ordre de contact  $\geq 2$



cycle de n  $\mathbb{P}^1$ ,  
 $n \geq 2$



## 6. LE CYCLE FONDAMENTAL

Revenons au cas général :  $\pi : X' \rightarrow X$  une résolution quelconque d'une singularité de surface  $(X, P)$  arbitraire (notations comme au § 1).

Proposition (Zariski [31] 7.1 et 7.5, Artin [3], Prop. 2) : Il existe des cycles exceptionnels  $Z > 0$  tels que  $Z \cdot E_i \leq 0$  pour tout  $i$ . De plus parmi de tels cycles il en existe un minimum appelé le cycle fondamental.

Pour démontrer l'existence, nous prenons l'argument de Mumford [22], cité au § 1, à l'envers. Soit  $g$  une fonction sur  $X$  dans l'idéal maximal de  $P$ .  $\pi^* g$  l'image inverse sur  $X'$ . Comme le diviseur  $(\pi^* g)$  est principal, on a  $(\pi^* g) \cdot E_i = 0$  pour tout  $i$ . D'autre part écrivons  $(\pi^* g) = \sum r_i E_i + D$ , où  $D$  ne contient aucun des  $E_i$ . Il est clair que  $D$  est un diviseur positif. Donc  $D \cdot E_i \geq 0$  pour tout  $i$ . Comme  $r_i$  est l'ordre de  $\pi^* g$  sur  $E_i$ ,  $r_i > 0$ .  $Z = \sum r_i E_i$  fait donc l'affaire. Nous étudierons la structure de ces  $Z$  plus en détail au § 14.

Démontrons maintenant la seconde assertion. Remarquons d'abord que pour tout  $Z$  tel que  $Z > 0$  et  $Z \cdot E_i \leq 0$  on a  $Z \geq \sum E_i$ . En effet supposons que non. Soit  $C$  l'union des  $E_i$  qui n'appartiennent pas à  $Z$ . Puisque  $C$  n'est pas tout  $E$  ( $Z$  est positif) et  $E$  est connexe, il existe une composante irréductible  $E_{i_0}$  de  $C$  telle que  $E_{i_0}$  intersecte  $Z$ . Mais alors  $E_{i_0} \cdot Z > 0$ , contradiction. Soient  $Z_j$ ,  $j = 1, 2$  deux cycles  $> 0$  avec  $Z_j \cdot E_i \leq 0$  pour tout  $i$ . Posons  $Z_j = \sum r_{ij} E_i$ ,  $r_i = \inf(r_{i1}, r_{i2})$  et  $Z = \sum r_i E_i$ . Comme  $Z_j \geq \sum E_i$ , on a  $Z \geq \sum E_i$  et donc  $> 0$ . Montrons finalement que  $Z \cdot E_i \leq 0$  pour tout  $i$ . Supposons pour fixer les idées que  $r_{i1} \leq r_{i2}$  pour un  $i$  donné. Alors  $Z \cdot E_i = r_{i1} (E_i \cdot E_i) + \sum_{j \neq i} r_j (E_j \cdot E_i)$ . Mais  $E_j \cdot E_i \geq 0$  pour  $j \neq i$ . Donc

$$Z \cdot E_i \leq r_{i1} (E_i \cdot E_i) + \sum_{j \neq i} r_{j1} (E_j \cdot E_i) = Z_1 \cdot E_i \leq 0 \quad .$$

Nous réserverons la lettre  $Z$  pour le cycle fondamental. On peut calculer  $Z$  de la façon suivante (Laufer [19], Prop. 4.1) : posons  $Z_1 = E_{i_0}$ , pour un  $E_{i_0}$  quelconque. On définit  $Z_{j+1}$  par récurrence : s'il existe un  $E_{i_j}$  tel que  $E_{i_j} \cdot Z_j > 0$ ,  $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j}$ . S'il n'en existe pas, je prétends que  $Z = Z_j$ . Démonstration par récurrence sur  $j$  que  $Z_j \leq Z$ , ce qui est évidemment suffisant : on a déjà vu que  $E_{i_0} \leq Z$ , donc l'assertion est vérifiée pour  $j = 1$ . Supposons donc que  $Z_j \leq Z$ . Si  $Z_j = Z$  il n'y a rien à démontrer ; supposons donc  $Z_j < Z$ . Par hypothèse  $(Z - Z_j) \cdot E_{i_j} < 0$  donc le diviseur (positif)  $Z - Z_j$  contient  $E_{i_j}$

et donc  $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j} \leq Z$ . Laufer appelle les  $Z_j$  une "séquence de calcul" du cycle fondamental.

## 7. SECOND CRITERE DE RATIONALITE

Théorème (Artin [3], Théorème 3) : Avec les hypothèses du § 6, et  $Z$  étant le cycle fondamental, alors  $p(Z) \geq 0$  et  $p(Z) = 0$  si et seulement si  $(X, P)$  est rationnelle.

Lemme : Soit  $Y$  un cycle sur  $E$ . Alors

$$p(Y + E_i) = p(Y) + p(E_i) + Y \cdot E_i - 1 \quad .$$

Démonstration du lemme : On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y+E_i}(-E_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y+E_i} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme on a vu plus haut,  $\mathcal{O}_{Y+E_i}(-E_i) = \mathcal{O}_{E_i}(-Y)$ . Par Riemann Roch (en réalité simplement la définition du degré)  $\chi(\mathcal{O}_{E_i}(-Y)) = -Y \cdot E_i - p(E_i) + 1$ , ce qui démontre le lemme : prendre  $\chi$  de la suite exacte.

Démonstration du théorème : Pour montrer que  $p(Z) \geq 0$ , utilisons une séquence de calcul pour  $Z$  (définie au paragraphe précédent). Puisque  $Z_1 = E_{i_1}$ ,  $p(Z_1) \geq 0$ .

Supposons par récurrence que  $p(Z_j) \geq 0$ . Par le lemme, puisque  $Z_j \cdot E_{i_j} > 0$ , on a  $p(Z_{j+1}) \geq p(Z_j) + p(E_{i_j}) \geq p(Z_j) \geq 0$ .

On voit donc que si  $(X, P)$  est rationnelle, alors  $p(Z) = 0$  (utiliser la proposition du § 4).

Inversement, supposons que  $p(Z) = 0$ , et montrons que  $(X, P)$  est rationnelle.

D'après la proposition du § 4, il suffit de montrer que pour tout cycle exceptionnel  $Y$ ,  $p(Y) \leq 0$ . Nous allons construire une séquence finie de cycles exceptionnels  $Y_1 = Y, Y_2, \dots, Y_k = Z$  telle que  $p(Y_j) \leq p(Y_{j+1})$ . Donc  $p(Y) \leq p(Z) \leq 0$ , ce qui démontre ce qu'on veut.

Supposons que  $Y_j$  a déjà été défini. Alors

a) si  $Y_j \geq Z$ , posons  $Y_{j+1} = Y_j - Z$ . Une généralisation facile du lemme montre que  $p(Y_j) = p(Y_{j+1}) + p(Z) + Z \cdot Y_{j+1} - 1$ . Mais  $p(Z) = 0$  par hypothèse et  $Z \cdot Y_{j+1} \leq 0$  puisque  $Z$  est le cycle fondamental. Donc  $p(Y_j) \leq p(Y_{j+1}) - 1$ .

b) sinon prendre un  $E_{i_0}$  tel que  $Y_j \cdot E_{i_0} > 0$  avec la plus petite multiplicité possible dans  $Y_j$ . Alors  $Y_{j+1} = Y_j + E_{i_0}$ . Le lemme montre que  $p(Y_{j+1}) \geq p(Y_j)$ .

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette séquence arrive en temps fini à  $Z$  (on voit facilement que b) ne peut se produire qu'un nombre fini de fois avant que  $Y_j \geq Z$ ; montrer ensuite que  $p(Y)$  est borné supérieurement puisque  $(E_i \cdot E_j)$  est négative non dégénérée; on doit donc arriver à  $Y_j = 0$  ce qui implique  $Y_{j-1} = Z$ ).

Remarque : Ce théorème montre qu'on peut décider si une singularité est rationnelle ou non uniquement à partir du graphe dual d'une résolution. En général on ne peut pas calculer le genre d'une singularité à partir de son graphe. Par exemple prenons le graphe :



Il existe des singularités ayant ce graphe de genre 1, 2 et 3 (voir [23], 6.3).

### 8. POLYNOME DE HILBERT-SAMUEL D'UNE SINGULARITE RATIONNELLE

Théorème (Artin [3], Theorem 4) : Soient  $X = \text{Spec}(A)$  une singularité rationnelle,  $\mathfrak{M}$  l'idéal maximal de  $A$ , et  $\pi: X' \rightarrow X$  une résolution de  $X$ . Alors ( $Z$  est le cycle fondamental) :

- i)  $M^n_{\mathcal{O}_X} = \mathcal{O}_X(-nZ)$  pour tout entier  $n$  positif,
- ii)  $H^0(nZ, \mathcal{O}_{nZ}) \approx A/\mathfrak{M}^n$  et  $\dim_k M^n/M^{n+1} = -nZ \cdot Z + 1$ .

Donc la multiplicité de  $A$  est  $-Z \cdot Z$  et sa dimension de plongement (= dimension de l'espace tangent de Zariski) est  $-Z \cdot Z + 1$ ; son polynôme de Hilbert-Samuel est  $P(x) = 1/2(-Z \cdot Z)(x^2 - x) + x$ .

(Pour la définition des termes soulignés, voir Serre, Algèbre locale-multiplicités, Springer Lecture Notes No 11.)

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Remarquons seulement que nous avons déjà constaté que  $M_{\mathcal{O}_X} \subset \mathcal{O}_X(-Z)$  : voir le début de la démonstration de la proposition du § 6. L'inclusion inverse, qui donne i), est une conséquence du

très important :

Lemme : Soit  $D$  un diviseur positif sur  $X'$  tel que  $D \cdot E_i = -Z \cdot E_i$  pour tout  $i$ . Alors il existe une fonction  $g \in M$  telle que  $(\pi^*g) = Z + D$ .

Pour démontrer ce lemme il faut supposer que  $A$  est hensélien. Le théorème est vrai sans cette hypothèse car on peut passer à l'hensélisé (ou au complété) de  $A$  sans en affecter la conclusion.

Corollaire : Soient  $X$  une singularité rationnelle de multiplicité  $m$ ,  $\pi: X' \rightarrow X$  la résolution minimale. Alors  $E_i \cdot E_i \geq -m$  pour tout  $i$ , et il y a au plus  $m-2$  courbes  $E_i$  avec  $E_i \cdot E_i < -2$ .

Comme  $X'$  est la résolution minimale,  $E_i \cdot E_i \leq -2$ . Le nombre de courbes avec  $E_i \cdot E_i = -2$  peut être arbitrairement grand, comme on verra.

Démonstration du corollaire : Comme  $p(Z) = 0$  (§ 7, Théorème) la formule du genre (§ 3, (\*)) donne  $Z \cdot K = m - 2$ . Ecrivons  $Z = \sum r_i E_i$ . Donc  $\sum r_i (E_i \cdot K) = m - 2$ . Mais  $E_i \cdot K = -E_i \cdot E_i - 2$ . Comme tous les  $r_i$  sont strictement positifs (§ 5, démonstration de la proposition) on a gagné.

## 9. EXEMPLE : LES POINTS DOUBLES RATIONNELS

Classifions les singularités rationnelles de multiplicité 2.

Les  $E_i$  (pour la résolution minimale) ont self-intersection  $-2$ . On a

$$E_i \cdot E_j = 2 \cos \pi/m_{ij}, \text{ avec } m_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \\ = 2 \text{ ou } 3 \text{ si } i \neq j.$$

La matrice  $(m_{ij})$  est une matrice de Coxeter (Bourbaki [7], IV.1.9) dont le groupe de Coxeter associé est fini et irréductible, puisque la matrice  $(E_i \cdot E_j)$  est négative non dégénérée et le graphe dual est connexe ([7], V.4.8). D'après la classification de tels groupes ([7], VI.4.1, ou l'exposé de Demazure [11] dans ce séminaire), on voit que  $(m_{ij})$  doit correspondre à l'un des systèmes de racines  $A_n$ ,  $D_n$  ou  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Notons que le graphe dual de la résolution minimale est le graphe de Dynkin (Bourbaki [7], VI.4.2) du système de racines correspondant. D'autre part nous avons vu dans un exposé précédent [24] (du moins en caractéristique 0 : pour la caractéristique  $> 0$  voir le § 18) que tous ces systèmes de racines sont effectivement réalisés par des points doubles rationnels.

Nous avons donc classifié les graphes des points doubles rationnels.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans [24], en caractéristique 0, il

existe une seule singularité, à isomorphisme "analytique" près, ayant pour graphe dual un de ces systèmes de racines. Cela justifie l'identification de la singularité par son graphe. Il n'en est plus de même en caractéristique positive (en réalité seulement 2, 3, 5) comme l'ont montré Lipman [20] et Artin [6]. Dans [6] Artin donne une liste de tous les points doubles rationnels.

Au § 11, nous esquissons un argument, semblable à celui donné plus haut dans ce paragraphe, pour montrer a priori que lorsque  $k$  n'est pas algébriquement clos, un certain graphe pondéré associé à un point double rationnel est le graphe de Dynkin d'un groupe de Coxeter cristallographique.

## 10. REALISATION GEOMETRIQUE DU SYSTEME DE RACINES ASSOCIE A UN POINT DOUBLE RATIONNEL

Nous allons réaliser le système de racines associé à un point double rationnel au paragraphe précédent dans le groupe de Picard  $\text{Pic}(X') = H^1(X', \mathcal{O}_{X'}^*)$  de la résolution minimale  $X'$ . Nous suivons la présentation de Lipman ([20], § 14). Voir aussi [8].

Supposons seulement, pour commencer, que la singularité  $X$  est rationnelle, et  $X'$  est une résolution quelconque. Soit  $\underline{E}$  le groupe additif des diviseurs à support le diviseur exceptionnel  $E$ . On a une flèche canonique évidente  $\underline{E} \rightarrow \text{Pic}(X')$  qui est une injection puisqu'aucun diviseur principal n'a pour support  $E$  (Proposition du § 1).

Posons  $U = X' - E = X - P$ . On a une suite exacte ([20], § 14 ou [22]) pour n'importe quelle singularité  $X$  :

$$0 \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow \text{Pic}(X') \longrightarrow \text{Pic}(U) \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part il existe un homomorphisme  $\theta : \text{Pic}(X') \rightarrow \underline{E}^* = \text{Hom}(\underline{E}, \mathbb{Z})$  : si  $\xi \in \text{Pic}(X')$ , alors  $\theta(\xi)$  est l'élément de  $\underline{E}^*$  défini par  $\theta(\xi)(E_i) = \xi \cdot E_i$ . Le noyau de  $\theta$  consiste en les classes de diviseurs numériquement triviaux sur chaque composante  $E_i$ . Le lemme du § 3 permet alors de montrer que si  $X$  est rationnel,  $\theta$  est injectif.

Supposons maintenant que  $X$  est hensélien (le résultat qui suit est aussi vrai dans la catégorie analytique : voir [22]). Il est alors facile de voir que  $\theta$  est surjectif. Donc

Proposition 1 : Si  $X$  est rationnelle,  $\theta : \text{Pic}(X') \rightarrow \underline{E}^*$  est un isomorphisme.

$\text{Pic } X'$  est donc un  $\mathbb{Z}$  module libre de rang  $s$  muni d'une forme quadra-

tique négative non-dégénérée.

$$\text{Posons } R = \{e \in \underline{E} \mid e \cdot e = -2\}.$$

Proposition 2 : Si  $X$  est un point double rationnel, et  $X'$  la résolution minimale,  $R$  est un système de racines dans  $\text{Pic}(X') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Les images des  $E_i$  dans  $\text{Pic}(X')$  forment une base de ce système de racines. Le cycle fondamental  $Z$  est la plus grande racine dans cette base. (Pour la définition des termes soulignés, voir [7], chapitre VI.)

Comme d'autre part toutes les racines ont même longueur, on retrouve le fait que le graphe dual de la résolution minimale est un des graphes de Dynkin  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ , démontré indépendamment au § précédent.

Démonstration de la proposition 2 : Les deux premières assertions se vérifient facilement sur les définitions. Démontrons la dernière. Comme  $-Z \cdot Z$  est égal à la multiplicité qui est 2,  $Z$  est une racine (positive pour la base  $E_i$ ). Supposons qu'il y ait une racine  $Z'$  plus grande. Donc  $Z < Z'$  et  $Z' \cdot Z' = 2$ . Écrivons  $Z' = Z + Y$ ,  $Y \geq 0$ .  $Z' \cdot Z' = Z \cdot Z + 2Z \cdot Y + Y \cdot Y$ , d'où  $2Z \cdot Y = -Y \cdot Y$ . Mais  $Z \cdot Y \leq 0$  puisque  $Z$  est le cycle fondamental et  $Y \geq 0$ . Donc  $Y \cdot Y = 0$ , et donc  $Y = 0$  (on utilise deux fois la proposition du § 1).

Une application de ce résultat est donnée dans [8'].

## 11. POINTS DOUBLES RATIONNELS LORSQUE $k$ N'EST PAS ALGÈBRIQUEMENT CLOS

Lorsque  $X$ , point double rationnel, est défini sur un corps algébriquement clos, nous avons montré "a priori" que la matrice d'intersection de la résolution minimale est la matrice de Coxeter d'un système de racines d'égale longueur (voir § 9). Nous n'avons, en fait, utilisé que les faits suivants :

- i)  $(E_i \cdot E_j)$  est négative non-dégénérée,
- ii)  $E_i \cdot E_i = 2$ ,
- iii)  $E_i \cdot E_j = 0$  ou  $1$ ,  $i \neq j$ .

Supposons maintenant que  $X = \text{Spec } A$ ,  $A$  un anneau local normal excellent de dimension 2 et de corps résiduel arbitraire. La notion de singularité rationnelle se généralise telle quelle à cette situation, puisqu'on sait que  $X$  admet une désingularisation [21]. Supposons que  $X$  est rationnelle, de multiplicité 2 et que  $\pi : X' \rightarrow X$  est la résolution minimale de  $X$ . Dans cette situation on a

- i')  $(E_i \cdot E_j)$  est négative définie (fait général),
- ii')  $E_i \cdot E_i = 2h^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$  ([20], § 24),

- iii') si  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ ,  $E_i \circ E_j$  est divisible par  $h^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$  et  $h^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j})$ , et  $E_i \circ E_j = \max_{\alpha=i,j} (h^0(E_\alpha, \mathcal{O}_{E_\alpha}))$  ([20], 22.2),
- iv') il existe un cycle exceptionnel  $Z$  avec  $-Z \circ Z = 2$ .

Posons  $h_i = h^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$  et  $h_{ij} = \max_{\alpha=i,j} (h_\alpha)$ .

Associons à chaque point double  $X$  un graphe (le "graphe dual pondéré") dont les sommets  $e_i$  correspondent aux composantes  $E_i$ , deux sommets  $e_i$  et  $e_j$  étant liés par une arête  $a_{ij}$  si et seulement si  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ . Le sommet  $e_i$  est affecté du poids  $h_i$  et l'arête  $a_{ij}$  est affecté du poids  $m_{ij} : m_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $m_{ij} \geq 3$  est défini par l'équation

$$\frac{h_{ij}}{2h_i^{1/2}h_j^{1/2}} = \cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) .$$

Par définition de  $h_{ij}$ , on voit facilement que :

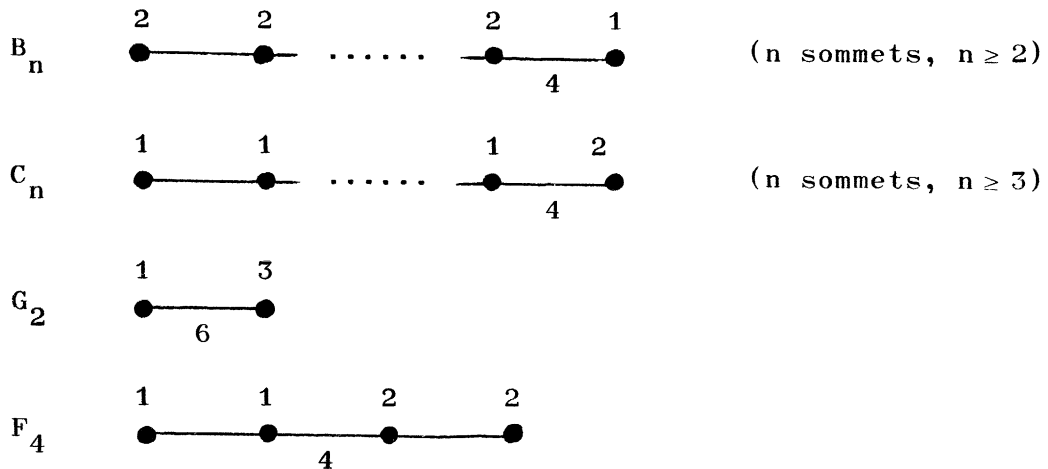
Lemme :  $h_{ij} / h_i^{1/2} h_j^{1/2} \geq 1$ ,

ce qui montre qu'on peut trouver un tel  $m_{ij}$ . (Rappelons que  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ).

Si  $m_{ij} = 3$ , on ne l'écrit pas sur le graphe. (Il n'est pas clair, a priori, que les  $m_{ij}$  sont des entiers.)

Théorème (Lipman [20], § 24) : Ce graphe est le graphe de Dynkin (Bourbaki [7], VI.4.2 ou Serre, "Algèbres de Lie semi-simples complexes" (Benjamin), V.15, dont nous avons conservé les notations) d'un groupe de Coxeter cristallographique fini irréductible. Les seuls graphes possibles sont donc  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$  et  $G_2$ .

Voici les nouveaux graphes (i.e. ceux qui ne se produisent pas sur un corps algébriquement clos) :



Les autres se trouvent par exemple dans [24] (affecter chaque sommet du poids 1, chaque arête du poids 3), ou dans [3], [20] ...

Démonstration du théorème : Soit I l'exemple des paires  $(i, j)$ ,  $i \neq j$ , telles que  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ . La forme quadratique positive non dégénérée associée à la matrice d'intersection est :

$$\sum_i 2h_i x_i^2 - \sum_{(i,j) \in I} h_{ij} x_i x_j .$$

Divisons par 2 et faisons le changement de variable  $x_i = y_i h_i^{1/2}$  (on prend la racine positive). On obtient :

$$\sum_i y_i^2 - \sum_{(i,j) \in I} \frac{1}{2} \frac{h_{ij}}{(h_i h_j)^{1/2}} y_i y_j .$$

Pour  $(i, j) \in I$  posons  $M_{ij} =$  plus grand entier  $M$  tel que

$$\frac{h_{ij}}{2(h_i h_j)^{1/2}} \geq \cos\left(\frac{\pi}{M}\right) .$$

Pour  $i \neq j$ ,  $(i, j) \notin I$ , posons  $M_{ij} = 2$ , et  $M_{ii} = 1$ .  $(M_{ij})$  est donc une matrice de Coxeter.

Par la proposition de [11] la forme quadratique :

$$\sum_i y_i^2 - \sum_{i \neq j} \cos\left(\frac{\pi}{M_{ij}}\right) y_i y_j$$

est positive non dégénérée ; donc le groupe de Coxeter défini par la matrice de Coxeter  $(M_{ij})$  est fini. Comme  $\cup E_i$  est connexe, on voit (par le lemme) que le graphe de  $(M_{ij})$  l'est aussi. Le groupe de Coxeter est donc irréductible.

Considérons un couple  $(i, j) \in I$ . On sait (lemme) que  $M_{ij} \geq 3$ . Analysons



les cas possibles. Pour fixer les idées, supposons  $h_j \leq h_i$ , donc que  $h_j$  divise  $h_i$  (iii'). Donc  $h_{ij} = h_i$ .

a.  $M_{ij} = 3$ . Alors  $\frac{1}{2} \frac{h_{ij}}{h_i^{1/2} h_j^{1/2}} = \frac{h_i^{1/2}}{h_j^{1/2}} < \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc  $h_i < 2h_j$ . Comme

$$h_j \text{ divise } h_i, \quad \boxed{h_i = h_j} \quad .$$

b.  $M_{ij} = 4$ . Le même argument montre que  $\boxed{h_i = 2h_j}$  .

c.  $M_{ij} = 5$ . Le même genre d'inégalités montre qu'on a  $2h_j < h_i < 3h_j$ . Il n'y a donc pas de solution.

d.  $M_{ij} = 6$ . On obtient  $3h_j \leq h_i < 4h_j$ , donc  $\boxed{h_i = 3h_j}$  .

e.  $M_{ij} \geq 7$ . On a  $h_i < 4h_j$ , donc il n'y a pas de solution.

Il est clair maintenant que l'on obtient un graphe de Dynkin d'un groupe de Coxeter fini et irréductible, à ceci près qu'il est possible que les exposants des sommets soient  $r$  fois trop grands pour un facteur  $r$  indépendant de  $i$ . Donc  $r$  divise  $h_i$ , pour tout  $i$ , et donc  $r$  divise  $h_{ij}$ . Soit  $Z = \sum x_i E_i$  le cycle du iv').

$$-Z \cdot Z = 2 = \sum_i 2h_i x_i^2 - \sum_{(i,j) \in I} 2h_{ij} x_i x_j \quad .$$

On peut diviser par 2. Ensuite puisque  $r$  divise tous les termes à droite,  $r$  doit diviser le terme à gauche. Donc  $r = 1$ , ce qui termine la démonstration.

Réciproquement, Lipman montre en regardant directement les équations que le graphe de Dynkin de n'importe quel groupe de Coxeter cristallographique fini irréductible est le graphe dual pondéré d'un point double rationnel. C'est d'ailleurs par une étude directe des équations qu'il établit le théorème qu'on vient de démontrer.

## 12. RESOLUTION PROJECTIVE DE A

Après cette digression sur les points doubles rationnels et le groupe de Picard, revenons à la structure de l'anneau  $A$  pour une singularité rationnelle  $x = \text{Spec } A$ . Nous supposerons ici que  $A$  est un anneau local complet, et donc est le quotient  $P/I$  d'un anneau de séries formelles  $P$  en  $e$  variables sur

$k$ , où  $e$  est la dimension de plongement de  $A$  (= multiplicité de  $A + 1$ ).

Théorème (Wahl [29]) : Il existe une résolution projective minimale de  $A$  :

$$0 \longrightarrow P^{b_{e-2}} \xrightarrow{\varphi_{e-2}} P^{b_{e-3}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} P^{b_1} \xrightarrow{\varphi_1} P \longrightarrow P/I \longrightarrow 0$$

avec  $b_i = i \binom{e-1}{i+1}$ ,  $i \geq 1$ .

La suite exacte graduée associée est une résolution projective minimale de cône tangent  $\bar{A}$  et les morphismes gradués associés  $\varphi_i$  ont degré 1 pour  $i > 1$  et degré 2 pour  $i = 1$ .

On peut donc dire que la résolution projective minimale ne dépend que de la multiplicité  $e-1$ .

Corollaire : Une singularité rationnelle est de Gorenstein si et seulement si elle est de multiplicité 2 ( $e = 3$ ).

En effet  $A$  n'est de Gorenstein que si  $b_{e-2} = 1$ . Le théorème montre que  $b_{e-2} = e-2$ . Par ailleurs, il est facile de démontrer le corollaire directement sans avoir le théorème de Wahl.

### 13. SINGULARITES ABSOLUMENT ISOLEES

On dit qu'une singularité (normale) de surface est absolument isolée si on peut la résoudre par des éclatements de points (c'est-à-dire qu'on éclate l'idéal maximal du point) sans normaliser.

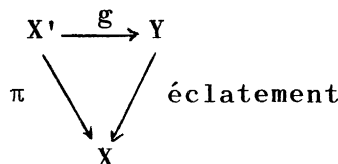
Plaçons-nous en caractéristique 0. D. Kirby [18] et Brieskorn [8] ont montré que les singularités normales d'hypersurface dans  $\mathbb{A}^3$  de multiplicité 2 qui sont absolument isolées sont précisément les points doubles rationnels. Lipman [20] a généralisé ce résultat en caractéristique quelconque (sans corps de base).

En toute caractéristique on a le résultat suivant :

Théorème : Toute singularité rationnelle est absolument isolée. L'éclatement de l'idéal maximal d'une singularité rationnelle est encore une singularité rationnelle (donc normale) et la répétition de ce procédé conduit à la résolution minimale.

Il existe deux démonstrations indépendantes et très différentes de ce résultat ; toutes les deux sont très intéressantes. Nous ne dirons rien de celle de Lipman ([20], § 4) ; celle de Tjurina [27] est très proche des méthodes d'Artin exposées plus haut : nous essayerons d'en donner le principe.

$(X,P)$  est donc une singularité rationnelle,  $\pi : X' \rightarrow X$  sa résolution minimale. Eclatons l'idéal maximal  $m$  de l'anneau local  $A$  de  $P$ . Puisque  $m\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-Z)$  est inversible, il existe un morphisme  $g$  de  $X'$  dans l'éclaté  $Y$  tel que le diagramme



commute. Soient  $x_1, \dots, x_2$  des éléments de  $m$  qui forment une base de  $m/m^2$ , et  $Q$  un point quelconque du diviseur exceptionnel  $E = f^{-1}(P)$ . Nous voulons décrire  $g$  au voisinage de  $Q$ . Le lemme du § 8 dit qu'on peut choisir un des  $x_i$  ( $x_1$  par exemple) tel que, au voisinage de  $Q$ , le diviseur de  $\pi^* x_1$  soit  $Z$  ; prendre pour  $D$  un diviseur qui ne passe pas par  $Q$ . Donc pour  $i \neq 1$ ,  $\pi^* x_i$  peut s'écrire  $y_i \pi^* x_1$ , où  $y_i$  est une fonction rationnelle sur  $X'$  qui est définie au point  $Q$ . La définition de l'éclatement montre facilement que  $g$  est donnée par

$$R \longmapsto (\pi^* x_1(R), y_2(R), \dots, y_e(R))$$

au voisinage du point  $Q$ .

Considérons l'ensemble des courbes  $E_i$  telles que  $Z \cdot E_i > 0$ . Notons  $B_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq r$ , les composantes connexes de cet ensemble. En utilisant la description locale de  $g$  donnée plus haut nous voulons montrer que  $g$  est la contraction des  $B_j$  en des singularités (normales, bien sûr). Ces singularités sont rationnelles par la proposition du § 4 ; une récurrence sur le nombre de composantes du diviseur exceptionnel donne alors le théorème.

Etudier le morphisme  $g$  au voisinage de  $Q \in E$  revient à trouver des fonctions  $x_i \in m$ ,  $x_i \notin m^2$  avec certaines propriétés. L'outil principal pour construire de telles fonctions est le lemme du § 8. On en tire facilement la version suivante :

Lemme : Soit  $Z'$  un cycle exceptionnel tel que

a)  $Z' < 2Z$

b)  $Z' \cdot E_i \leq 0$  (donc  $Z \leq Z'$  par la définition de  $Z$ ).

Alors il existe une fonction  $x \in m$ ,  $x \notin m^2$  telle que  $(\pi^* x) - Z$  soit un diviseur

positif sans support sur E.

Tout revient donc à construire des diviseurs  $Z'$  satisfaisant à a) et b). Nous étudions ces diviseurs au prochain §. Nous ne pousserons pas plus loin la démonstration de Tjurina. Remarquons seulement qu'il n'y est pas démontré (dans la traduction du moins) que les points singuliers de  $Y$  sont normaux. Mais cela se fait facilement à l'aide des résultats du paragraphe suivant et du théorème du § 8.

#### 14. LE CONE CONVEXE POLYEDRAL RATIONNEL $\langle \underline{E}^+ \rangle$

Suivant Lipman [20], § 18, notons  $\underline{E}^+$  l'ensemble des diviseurs exceptionnels  $D$ ,  $D \neq 0$ , tels que  $D \cdot E_i \leq 0$  pour tout  $i$ . Ces inégalités dans  $\mathbf{R}^S$  définissent un cône convexe polyédral rationnel qu'on note  $\langle \underline{E}^+ \rangle$  et qui est évidemment un simplexe. D'autre part, comme  $(E_i \cdot E_j)$  est négative non dégénérée, tout  $D \in \underline{E}^+$  est effectif, donc  $\langle \underline{E}^+ \rangle$  est dans le premier quadrant.

Preuve (Artin [3], prop. 2) : Ecrivons  $D = A - B$ ,  $A$  et  $B$  sans composante commune.  $D \cdot B \leq 0$ , donc  $A \cdot B \leq B \cdot B$ . Mais  $A \cdot B \geq 0$  ( $A$  et  $B$  n'ont pas de composante commune) donc  $B \cdot B \geq 0$ . Donc  $B = 0$ , et  $D$  est effectif.

Nous avons déjà vu que  $\underline{E}^+$  possède un plus petit élément  $Z$ . Nous allons maintenant en construire d'autres, d'après Tjurina [27].

Choisissons un  $E_{i_0}$ , et posons  $Y_1 = Z + E_{i_0}$ . Définissons  $Y_{j+1}$  récursivement : s'il existe  $E_{i_j}$  tel que  $Y_j \cdot E_{i_j} > 0$ , posons  $Y_{j+1} = Y_j + E_{i_j}$ . Sinon on s'arrête et on pose  $Z_{i_0} = Y_j$ .

Pour montrer que ce processus est fini, nous montrerons que

Lemme 1 : Pour tout  $j$ ,  $Y_j \leq 2Z$ . Donc  $Z_{i_0}$  existe et  $Z_{i_0} \leq 2Z$ .

La démonstration est la même que celle de la construction de la "séquence de calcul" du cycle fondamental au § 6. Soit  $j$  le plus grand entier tel que  $Y_j \leq 2Z$ .  $(2Z - Y_j) \cdot E_{i_j} < 0$ , car  $Z \cdot E_{i_j} < 0$  et  $Y_j \cdot E_{i_j} > 0$  par définition. Donc le diviseur positif  $2Z - Y_j$  contient  $E_{i_j}$ . Mais alors  $Y_{j+1} = Y_j + E_{i_j} \leq 2Z$ , une contradiction.

Montrons maintenant que  $Z_{i_0}$  ne dépend que de  $E_{i_0}$  et pas des  $E_{i_j}$  suivants :

Lemme 2 : Soit  $W \in \underline{E}^+$  tel que  $W - Z$  contient  $E_{i_0}$ . Alors  $Z_{i_0} \leq W$ . Donc  $Z_{i_0}$  ne dépend que de  $E_{i_0}$  (ce qui justifie la notation) et si  $Z_j - Z$  contient  $E_{i_0}$  alors  $Z_{i_0} \leq Z_j$ .

On utilise la même démonstration que pour le lemme 1.

Le lemme du § 7 donne

$$(*) \quad p(Y_{j+1}) \geq p(Y_j) \quad \text{et} \quad p(Y_1) = p(Z) + Z \cdot E_{i_0} - 1 = Z \cdot E_{i_0} - 1 .$$

Ecrivons  $Z_i = Z + nE_i + Y$ ,  $Y \geq 0$  et ne contient pas  $E_i$ .  $n \geq 1$  par définition de  $Z_i$ .

Alors

$$p(Z_i) = p(Z) + p(nE_i + Y) + Z \cdot (nE_i + Y) - 1 .$$

En combinant avec (\*) on obtient :

$$p(nE_i + Y) + (n-1)Z \cdot E_i + Z \cdot Y \geq 0 .$$

Mais  $p(nE_i + Y) \leq 0$  par la proposition du § 4 et les deux autres termes sont  $\leq 0$  par la définition de  $Z$ . Tous les termes sont donc nuls, et on a donc  $Z \cdot Y = 0$ , et soit  $n = 1$ , soit  $Z \cdot E_i = 0$ .

Proposition : i) Si  $Z \cdot E_i = 0$ , alors  $E_i + Y$  est le cycle fondamental de la singularité de résolution  $B$ , où  $B$  est la composante connexe, contenant  $E_i$ , des diviseurs  $E_j$  tels que  $Z \cdot E_j = 0$ . Donc  $Z_i < 2Z$ .

ii) Si  $Z \cdot E_i < 0$ , alors  $n = 1$ .  $Z_i < 2Z$  sauf si  $E$ , le diviseur exceptionnel, est irréductible.

Démonstration : i) est immédiat à partir du lemme 2. Démontrons la dernière assertion de ii). Elle est évidente sauf si  $Z$  contient une seule fois

$E_i$  :  $Z = E_i + \sum_{j \neq i} r_j E_j$ ,  $r_j > 0$ . Supposons par contradiction que  $Z_i = 2Z$ . Donc

$E_i + Y = Z$  et  $(E_i + Y) \cdot Z = -m$ , la multiplicité de la singularité. Mais  $Z \cdot Y = 0$  comme on a vu plus haut, donc  $E_i \cdot Z = -m$ . Par le corollaire du § 8,  $E_i \cdot E_i \geq -m$ , donc :

$$\sum_{j \neq i} r_j E_j \cdot E_i \leq 0 .$$

Mais  $E$  est connexe, donc cette somme est strictement positive sauf si elle est vide, d'où le résultat.

En conclusion nous voyons que sauf lorsque  $X$  est un cône (et est donc évidemment absolument isolée) tous les  $Z_i$  satisfont aux hypothèses du lemme du paragraphe précédent.

Remarque : Il serait peut être intéressant de pousser plus loin l'étude de  $\langle \underline{E}^+ \rangle$  à la "Toroidal embeddings, I" (Springer Lecture Notes 339 (1973)).

15.  $\theta_X$  ET  $\omega_X$

Soient  $(X,P)$  une singularité de surface,  $\pi : X' \rightarrow X$  la résolution minimale,  $U := X - P$  et  $i : U \rightarrow X$  l'inclusion. Nous considérons aussi  $U$  comme un sous-espace de  $X'$ . Nous voulons comparer  $\pi_*\theta_{X'}$ ,  $\theta_X$  et  $i_*\theta_U$  ;  $\pi_*\omega_{X'}$ ,  $\omega_X$  et  $i_*\omega_U$ . Nous examinerons plus en détail les singularités quotients pour lesquelles nous comparerons  $\pi_*\Omega_{X'}^1$ , et  $i_*\Omega_U^1$ .

Notons tout d'abord qu'on a  $\pi_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X = i_*\mathcal{O}_U$  puisque  $X$  est normal. Le lemme (facile) suivant nous servira plusieurs fois :

Lemme 1 : Soit  $F$  un faisceau cohérent sur  $X'$ . Si  $\pi_*F$  est de profondeur 2 au point  $P$ , i.e.  $H_P^i(\pi_*F) = 0$ ,  $i = 0, 1$ , on a  $\pi_*F = i_*(F|_U)$ .

On utilise la suite exacte ([15], §1) :

$$\begin{array}{ccccccc} H_P^0(\pi_*F) & \longrightarrow & H^0(X, \pi_*F) & \longrightarrow & H^0(U, \pi_*F|_U) & \longrightarrow & H_P^1(\pi_*F) \longrightarrow 0 \\ || & & & & || & & || \\ 0 & & & & H^0(X, i_*(F|_U)) & & 0 \end{array}$$

Cette suite montre aussi que :

Lemme 2 :  $H_P^1(\pi_*F)$  est l'obstruction au prolongement à  $X'$  de sections de  $F$  sur  $U$ .

Commençons notre étude par le faisceau tangent  $\theta$ . Comme  $\theta_X$  est le dual de  $\Omega_X^1$  et  $\mathcal{O}_X$  est de profondeur 2 au point  $P$ ,  $\theta_X$  est de profondeur 2 (Schlessinger [25] lemme 1). Donc  $\theta_X = i_*\theta_U$  (lemme 1).

Proposition 1 (Artin [5], 4.5 ; Burns-Wahl [10], 1.2) : Si  $k$  est de caractéristique 0, alors  $\pi_*\theta_{X'} = \theta_X$ .

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Comme  $\theta_X = i_*\theta_U$ , on peut reformuler la proposition de la façon suivante : toute section du faisceau tangent sur  $U$  se prolonge à  $X'$  (lemme 2).

Il est essentiel de supposer que  $X'$  est la résolution minimale. En effet, si  $Y$  est non singulier et  $g: Y' \rightarrow Y$  est l'éclatement d'un point  $P \in Y$ , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow g_*\theta_{Y'} \rightarrow \theta_Y \rightarrow N_P \rightarrow 0 ,$$

où  $N_P$  est le faisceau normal de  $P$  dans  $Y$ .

D'autre part la proposition est fautive en caractéristique  $p > 0$ .

D'après Artin ([5], 4.7) si  $k$  est de caractéristique 2 et  $X$  est l'hypersurface  $Z^2 + XY$  (= point double ordinaire), alors la dérivation  $\frac{\partial}{\partial Z}$  ne se relève pas à la résolution. Comme la résolution minimale s'obtient par un seul éclatement, on vérifie cette assertion par un calcul simple.

Considérons maintenant le faisceau dualisant  $\omega_X$  de  $X$ .

Lemme 3 (bien connu) :  $\omega_X$  est de profondeur 2 au point  $P$ , donc

$$\omega_X = i_*\omega_U = i_*\Omega_U^2 .$$

Démonstration : Soit  $A$  un anneau local de Cohen-Macaulay de dim  $r$ , quotient de l'anneau local régulier  $R$  de dimension  $n$ .  $\omega_A := \text{Ext}_R^{n-r}(A, R)$ . La suite spectrale des  $\text{Ext}$  :

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_A^p(k, \text{Ext}_R^q(A, R)) \implies \text{Ext}_R^{p+q}(k, R)$$

dégénère, car  $\text{Ext}_R^q(A, R) = 0$  sauf pour  $q = n-r$ , puisque  $A$  est Cohen-Macaulay de dimension  $r$ . Mais  $\text{Ext}_R^{p+q}(k, R) = 0$  pour  $p+q < n$ , car  $R$  est Cohen-Macaulay de dimension  $n$ . Donc  $\text{Ext}_A^p(k, \text{Ext}_R^{n-r}(A, R)) = 0$  pour  $p + n - r < n$ , ce qui dit que

$\omega_A = \text{Ext}_R^{n-r}(A, R)$  est de Cohen-Macaulay.

Lorsque  $X = \text{Spec } A$ ,  $\omega_X = \omega_A$  et on obtient donc le lemme.

Soit  $\omega_{X'} = \Omega_{X'}^2$ , le faisceau dualisant de  $X'$ , et posons  $K = \pi_*\omega_{X'}$ . Comme on verra,  $K$  n'est pas généralement le faisceau dualisant sur  $X$ . On a le célèbre

Théorème de Grauert-Riemenschneider ([14], voir [28], theorem A) :

$$R^1\pi_*\omega_{X'} = 0 \text{ pour tout } X .$$

La démonstration de [14] est analytique ; mais dans le cas particulier qui nous intéresse (dimension 2), il existe une démonstration algébrique [28], et nous pouvons donc prendre  $k$  de caractéristique quelconque. Esquisons la démonstration de Wahl. Il faut montrer que  $H^1(X', \omega_{X'}) = 0$ . Par le théorème de dualité "formelle" le long de  $E$  (Hartshorne [16], III.3.3 ; voir [17], proposition 2.2 pour éliminer l'hypothèse de propreté. Voir aussi [21], § 2, Appendice)

il revient au même de montrer que  $H_E^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0$ . Mais

$$H_E^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = \varinjlim_Y H^0(Y, \mathcal{O}_Y(Y))$$

où la limite est prise sur les cycles exceptionnels. Le fait que la matrice d'intersection soit négative non dégénérée donne facilement  $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(Y)) = 0$ ,  
c.q.f.d.

La suite spectrale de cohomologie locale (§ 2, (\*)) montre alors que  $H_P^1(\pi_* \omega_{X'}) = H_E^1(\omega_{X'})$ , et par la dualité le long de E ce dernier groupe est isomorphe au dual (dans l'enveloppe injective du corps résiduel) de  $H^1(X', \mathcal{O}_{X'})$ .  
Donc

Théorème 2 : K est de profondeur 2, et donc isomorphe à  $\omega_X = i_* \omega_U$  si et seulement si X est rationnelle ; autrement dit,  $H^0(X', \omega_{X'}) \rightarrow H^0(U, \omega_U)$  est surjectif si et seulement si X est rationnelle.

Pour les singularités rationnelles, on a donc  $\pi_* \omega_{X'} = \omega_X = i_* \omega_U$ .

Proposition 2 : Si X est un point double rationnel,  $\pi^* \omega_X = \omega_{X'}$ .

En effet X est Gorenstein, donc  $\omega_X = \mathcal{O}_X$  (X est local).  $\pi^* \omega_X$  et  $\omega_{X'}$  ne peuvent différer que par un diviseur à support le lieu exceptionnel ; mais comme les  $E_i$  sont des courbes rationnelles de self-intersection -2, la formule du genre montre que Y est trivial.

## 16. SINGULARITES QUOTIENTS : $\theta_X, \omega_X$ ET $\Omega_X^1$

Plaçons-nous en caractéristique 0 et même sur  $\mathbb{C}$ , et considérons les singularités X quotients de  $\mathbb{A}^2$  par un groupe fini G agissant librement en dehors de l'origine Q. Soient Y le germe de  $\mathbb{A}^2$  à l'origine, et  $f: Y \rightarrow X$  le morphisme quotient.  $V = Y - Q$ .

Proposition 1 :  $(f_* \theta_Y)^G = \theta_X$  ;  $(f_* \omega_Y)^G = \omega_X$  ;  $(f_* \Omega_Y^1)^G = i_* \Omega_U^1$ .

$f|_V: V \rightarrow U$  est étale ; les assertions de la proposition sont bien connues si l'on restreint les faisceaux dans l'énoncé à V et U, respectivement. Comme  $\theta_Y, \theta_X$  ;  $\omega_Y, \omega_X$  ;  $\Omega_Y^1, i_* \Omega_U^1$  ont profondeur 2 aux points Q et P respectivement, on obtient la proposition.



Proposition 2 (Steenbrink [26], 1.11) :  $\pi_* \Omega_{X'}^1$ , est de profondeur 2 au point P. Autrement dit  $\pi_* \Omega_{X'}^1 = i_* \Omega_U^1$ , donc toute 1-forme sur U se relève sur X'.

La démonstration de Steenbrink, que je ne reproduis pas, est analytique ; je ne connais pas de démonstration algébrique et je ne sais pas dans quel contexte ce résultat est vrai. Par exemple, est-ce vrai pour toutes les singularités rationnelles ?

Remarquons que la même démonstration montre que les singularités quotients sont rationnelles (on utilise le théorème 2 du § 15).

Résumons la situation pour les singularités quotients (en particulier pour tous les points doubles rationnels) :

Théorème : Soient  $(X,P)$  une singularité quotient (donc rationnelle) sur  $\mathbb{C}$ ,  $\pi : X' \rightarrow X$  la résolution minimale,  $i : U \hookrightarrow X$  l'inclusion de  $U : X - P$  dans  $X$  et  $f : (Y,Q) \rightarrow (X,P)$  la représentation de  $X$  comme quotient d'une variété lisse par un groupe fini  $G$  agissant librement en dehors du point  $Q$ . Alors :

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{O}_{X'} &= \mathcal{O}_X = i_* \mathcal{O}_U = (f_* \mathcal{O}_Y)^G \\ \pi_* \theta_{X'} &= \theta_X = i_* \theta_U = (f_* \theta_Y)^G \\ \pi_* \omega_{X'} &= \omega_X = i_* \omega_U = (f_* \omega_Y)^G \\ \pi_* \Omega_{X'}^1 &= i_* \Omega_U^1 = (f_* \Omega_Y^1)^G \end{aligned}$$

De plus, si  $X$  est Gorenstein, donc un point double rationnel,  $\pi^* \omega_X = \omega_{X'}$ .

## 17. SINGULARITES QUI N'AFECTENT PAS LA CONDITION D'ADJONCTION

Soient  $Y$  une variété lisse de dimension trois (par exemple  $\mathbb{P}^3$ ),  $X$  une surface normale dans  $Y$  et  $X'$  la résolution minimale de  $X$ . La "formule d'adjonction" permet de calculer  $\omega_X$  ([1], 2.4)

ou

$$\omega_X = \omega_Y|_X \otimes N_X,$$

où  $N_X$  est le faisceau normal de  $X$  dans  $Y$ . Par exemple si  $X$  est une surface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^3$ ,  $\omega_X = \mathcal{O}_X(d-3)$ , donc est le système linéaire complet des surfaces de degré  $d-3$ . La question qu'on se posait classiquement (en toute dimension : voir Walker [30] pour le cas des courbes dans  $\mathbb{P}^2$ ) est : quelles

conditions faut-il imposer à une section de  $\omega_X$  pour qu'elle soit une section de  $\omega_{X'}$  ? Si la réponse est : aucune, on dit que les singularités de  $X$  n'affectent pas les conditions d'adjonction. On savait classiquement :

Proposition (voir Du Val [12]) : Les points doubles rationnels n'affectent pas les conditions d'adjonction, i.e.  $H^0(X', \omega_{X'}) \simeq H^0(X, \omega_X)$ .

Par dualité il est équivalent de montrer que  $H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^2(X', \mathcal{O}_{X'})$ . Lorsque  $X$  n'a que des singularités rationnelles, on a  $R^1\pi_*\mathcal{O}_{X'} = 0$ , donc la suite spectrale de Leray dégénère, ce qui donne l'isomorphisme voulu.

On a toujours  $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = \chi(\mathcal{O}_X) - h^0(X, R^1\pi_*\mathcal{O}_{X'})$ , mais il est bien sûr possible que le genre géométrique de  $X'$   $p_g(X') := H^0(X', \omega_{X'})$  soit le même que celui de  $X$ , bien que  $X$  ait des singularités qui ne sont pas rationnelles : par exemple prendre dans  $\mathbb{P}^3$  le cône  $X$  sur une cubique lisse dans  $\mathbb{P}^2$ . On a  $p_g(X) = p_g(X') = 0$  bien que la singularité de  $X$  ait genre 1. Il n'y a donc pas de réciproque globale à la proposition. On peut cependant considérer le théorème 2 du § 15 comme une réciproque "locale" (cf. [19], bas de la première page et [12]).

## 18. CONTRACTIONS ALGÈBRIQUES

Nous signalons un théorème de Artin sur la contractibilité algébrique des "configurations rationnelles". Rappelons d'abord que le théorème de Grauert [13] implique qu'une famille connexe de courbes propres  $\{E_i\}$  sur une surface analytique  $X'$  lisse peut être "contractée en un point" (i.e. il existe une surface normale  $X$ , un morphisme analytique  $\pi : X' \rightarrow X$  et un point  $P \in X$  tel que  $\pi^{-1}(P) = \cup E_i$ ) si et seulement si la matrice d'intersection  $(E_i \cdot E_j)$  est négative non-dégénérée. Un résultat analogue existe dans la catégorie des espaces algébriques (voir Artin [4], § 6). Dans la catégorie des variétés algébriques la condition sur la matrice d'intersection est nécessaire, mais pas suffisante. On a cependant :

Théorème (Artin [2], 2.3) : Soient  $\{E_i\}$  une famille connexe de courbes propres sur une surface algébrique  $X'$  lisse au voisinage de  $\{E_i\}$  telle que

- la matrice d'intersection  $(E_i \cdot E_j)$  soit négative définie ;
- pour tout cycle  $Y > 0$  à support  $\cup E_i$ ,  $p(Y) \leq 0$ .

Alors il existe un morphisme  $\pi : X' \rightarrow X$  et un point normal  $P \in X$  tel que  $\pi^{-1}(P) = \cup E_i$ . D'après la proposition du § 4,  $(X, P)$  est une singularité rationnelle.

Remarque : Ce théorème permet de montrer que tous les graphes, qui sont des graphes de singularités rationnelles en caractéristique 0, sont des graphes de singularités rationnelles en caractéristique  $p > 0$ .

#### REFERENCES

- EGA III Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES, 8 (1961).
- [1] Altman, A., Kleiman, S., *Introduction to Grothendieck duality theory*, Springer Lecture Notes 146 (1970).
- [2] Artin, M., *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces*, Amer. J. Math. 84, 485-496 (1962).
- [3] Artin, M., *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. 88, 129-136 (1966).
- [4] Artin, M., *Algebraization of formal moduli : II. Existence of modifications*, Annals Math. 91, 88-135 (1970).
- [5] Artin, M., *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions*, J. Algebra 29, 330-348 (1974).
- [6] Artin, M., *Coverings of rational double points in characteristic  $p$ , to appear*.
- [7] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 4, 5 et 6, Hermann, Paris (1968).
- [8] Brieskorn, E., *Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen*, Math. Annalen 166, 77-102 (1966).
- [8'] Brieskorn, E., *Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorphen Abbildungen*, Math. Annalen 178, 255-270 (1968).
- [9] Brieskorn, E., *Rationale Singularitäten komplexer Flächen*, Inv. Math. 4, 336-358 (1968).
- [10] Burns, D., Wahl, J., *Local contributions to global deformations of surfaces*, Inv. Math. 26, 67-88 (1974).
- [11] Demazure, M., *Exposé sur les systèmes de racines*, Ecole Polytechnique, Séminaire sur les singularités des surfaces, Printemps 1977.
- [12] Du Val, P., *On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction, Part I*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30, 453-465 (1934).
- [12'] Du Val, P., *On absolute and non absolute singularities of algebraic surfaces*, Istanbul Univ. Fen. Fak. Mecmvasi 9 (A) 159-215 (1944).

- [13] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146, 331-368 (1962).
- [14] Grauert, H., Riemenschneider, O., Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Inv. Math. 11, 263-292 (1970).
- [15] Grothendieck, A., Local cohomology, Springer Lecture Notes 41. (1967).
- [16] Hartshorne, R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer Lecture Notes 156 (1970).
- [17] Hartshorne, R., Ogus, A., On the factoriality of local rings of small embedding codimension, Comm. in Alg. 1 (5), 415-437 (1974).
- [18] Kirby, D., The structure of an isolated multiple point of a surface, I, II, III, Proc. London Math. Soc. (3), 6, 597-609 (1956) et 7, 1-28 (1957).
- [19] Laufer, H., On rational singularities, Amer. J. Math. 94, 597-608 (1972).
- [20] Lipman, J., Rational singularities . . . ., Publ. Math. IHES 36, 195-279 (1969).
- [21] Lipman, J., Desingularization of two-dimensional schemes, to appear.
- [22] Mumford, D., The topology of normal singularities of an algebraic surface, Publ. Math. IHES 9, 5-22 (1961).
- [23] Pinkham, H., Normal surface singularities with  $\mathbb{C}^*$  action, Math. Ann. 227, 183-193 (1977).
- [24] Pinkham, H., Singularités de Klein, I, II, Ecole Polytechnique, Séminaire sur les singularités des surfaces, Automne 1976.
- [25] Schlessinger, M., Rigidity of quotient singularities, Inv. Math. 14, 17-26 (1971).
- [26] Steenbrink, J., Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, to appear.
- [27] Tjurina, G.N., Absolute isolatedness of rational singularities and rational triple points, Func. Anal. Appl. 2, 324-332 (1968).
- [28] Wahl, J., Vanishing theorems for resolutions of surface singularities, Inv. Math. 31, 17-41 (1975).
- [29] Wahl, J., Equations defining rational singularities, Ann. Sci. E.N.S. (4) 10, 231-264 (1970).
- [30] Walker, R., Algebraic curves, Dover, New York (1962).
- [31] Zariski, O., The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on a algebraic surface, Annals Math. 76, 560-615 (1962).