

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Cohomologie des coalgèbres

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. n° 5, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A7_0

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE DES COALGÈBRES

(Exposé de P. CARTIER, le 17.2.1956)

1.- Rappels sur les complexes.

Soit K un anneau commutatif avec unité. On rappelle qu'un K -module gradué est un module M muni d'une décomposition en somme directe de sous-modules M^p ($p \in \mathbb{Z}$); si M et N sont deux modules gradués, un homomorphisme f de M dans N est dit de degré s si l'on a $f(M^p) \subset N^{p+s}$ pour tout p . Les homomorphismes de degré s de M dans N forment un sous-module $\mathcal{L}_K(M, N)_s$ du module $\mathcal{L}_K(M, N)$ de toutes les applications linéaires de M dans N . On note $\mathcal{L}'_K(M, N)$ le sous-module de $\mathcal{L}_K(M, N)$ somme des $\mathcal{L}_K(M, N)_s$; ces derniers modules définissent alors une graduation de $\mathcal{L}'_K(M, N)$. Si $f \in \mathcal{L}'_K(M, N)$ et si $g \in \mathcal{L}'_K(N, P)$, alors $g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}'_K(M, P)$: plus précisément, si f est de degré s et g de degré t , alors $g \circ f$ est de degré $s + t$.

Un complexe $\mathcal{M} = (M, d)$ est un module gradué muni d'un opérateur d de degré 1 tel que $d \circ d = 0$ (d est la "différentielle" de \mathcal{M}). Les éléments de M^p annulés par d forment un sous-module $Z^p(\mathcal{M})$ de M^p , le groupe des "cycles"; l'image $d.M_{p-1}$ de d dans M_p est le groupe $B^p(\mathcal{M})$ des "bords". Le quotient $H^p(\mathcal{M}) = Z^p(\mathcal{M})/B^p(\mathcal{M})$ est le p -ème groupe d'homologie; on note $H^*(\mathcal{M}) = H^*(M, d)$ le module gradué somme directe des $H^p(\mathcal{M})$. Le complexe \mathcal{M} est dit acyclique si $H^*(\mathcal{M}) = 0$, ou, ce qui revient au même, si la suite des homomorphismes $d : M^p \rightarrow M^{p+1}$ est exacte.

Soient $\mathcal{M} = (M, d)$ et $\mathcal{M}' = (M', d')$ deux complexes; un homomorphisme de complexes de degré s de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' est une application linéaire f de degré s de M dans M' telle que $d' \circ f = (-1)^s f \circ d$; de plus, les homomorphismes f et g de degré s de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' seront dits homotopes s'il existe une application linéaire p de degré $s-1$ de M dans M' telle que $f - g = d' \circ p - (-1)^{s-1} p \circ d$. Un homomorphisme f de degré s de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' applique $Z^p(\mathcal{M})$ dans $Z^p(\mathcal{M}')$ et $B^p(\mathcal{M})$ dans $B^p(\mathcal{M}')$; par passage au

quotient f définit alors une application linéaire f^* de degré s de $H^*(\mathcal{M})$ dans $H^*(\mathcal{M}')$.

On aura $f^* = g^*$ si f et g sont homotopes ; de plus si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ et $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}''$ sont des homomorphismes de complexes, il en est de même de $g \circ f$ et l'on a $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. Pour toute suite exacte

$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}' \xrightarrow{g} \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ d'homomorphismes de degré 0 de complexes, on peut définir un opérateur de degré 1, soit ∂ , qui applique $H^*(\mathcal{M}'')$ dans $H^*(\mathcal{M})$. On a alors une suite exacte :

$$\rightarrow H^p(\mathcal{M}) \xrightarrow{f^*} H^p(\mathcal{M}') \xrightarrow{g^*} H^p(\mathcal{M}'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(\mathcal{M}') \xrightarrow{g^*}$$

appelée suite exacte d'homologie ; de plus si l'on a un diagramme commutatif dont les deux lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

alors on a : $\alpha^* \circ \partial = \partial \circ \gamma^*$.

Si M et N sont deux complexes, leur produit tensoriel est défini par le module $M \otimes N$ gradué par les sous-modules $\sum_{p+q=n} M^p \otimes N^q$ et par la différentielle d définie par $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy$ si x est de degré p .

Un complexe augmenté $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ est un complexe \mathcal{M} tel que $M^p = 0$ pour $p < 0$, muni d'un homomorphisme ε de K dans M^0 tel que $d \circ \varepsilon = 0$. Il sera dit acyclique si la suite $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d} M^1 \xrightarrow{d} \dots$ est exacte, ou ce qui revient au même, si $H^p(\mathcal{M}) = 0$ pour $p > 0$ et si ε induit un isomorphisme de K sur $H^0(\mathcal{M})$.

Une suite exacte $f^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ ($i \in [a, b[$) sera dite scindée si elle vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes :

- Pour tout i , le sous-module $f^i(M^i)$ est facteur direct dans M^{i+1}
- Pour tout module N , le foncteur $M \rightarrow \mathcal{L}_K(M, N)$ transforme la suite exacte donnée en une suite exacte.
- Idem que b) avec le foncteur $M \rightarrow \mathcal{L}_K(N, M)$.

c) Il existe une suite d'homomorphisme $s^i : M^i \rightarrow M^{i-1}$ ($i \in]a, b]$) tels que $s^{i+1} \circ f^i + f^{i-1} \circ s^i$ soit l'identité dans M^i pour $i \in]a, b[$.

Si pour tout i , le sous-module $f^i(M^i)$ est libre, la suite exacte formée par les f^i sera scindée; il en est en particulier ainsi lorsque les M^i sont des modules libres sur un anneau principal.

Un complexe augmenté $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ sera dit scindé si la suite $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d} M^1 \rightarrow \dots$ est une suite exacte scindée. Si les complexes augmentés $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ et $(\mathcal{M}', \varepsilon')$ sont scindés, il en sera de même du complexe augmenté $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}', \varepsilon \otimes \varepsilon')$ et du complexe augmenté déduit de $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ par toute extension de l'anneau des scalaires.

Un bicomplexe \mathcal{F} est un K -module F muni d'une décomposition en somme directe de sous-modules $F^{p,q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) et de deux opérateurs linéaires d_I et d_{II} jouissant des propriétés suivantes :

$$(1) \quad d_I d_I = d_I d_{II} + d_{II} d_I = d_{II} d_{II} = 0$$

$$(2) \quad d_I(F^{p,q}) \subset F^{p+1,q} \quad d_{II}(F^{p,q}) \subset F^{p,q+1}$$

A ce bicomplexe \mathcal{F} , on peut associer un certain nombre de complexes : tout d'abord $\mathcal{F}^{*,q}$ est le complexe défini par le module $\sum_p F^{p,q}$ gradué par les modules $F^{p,q}$ ($p \in \mathbb{Z}$), et par la différentielle d_I ; le complexe $\mathcal{F}^{p,*}$ est défini de manière symétrique; enfin si l'on pose $\hat{F}^s = \prod_{p+q=s} F^{p,q}$, le module gradué $\sum_s \hat{F}^s$ et la différentielle $d = d_I + d_{II}$ définissent un complexe $\hat{\mathcal{F}}$. Les éléments de \hat{F}^s sont donc les suites f d'éléments $f^p \in F^{p,s-p}$ et l'on a

$$(3) \quad (df)^p = d_I f^{p-1} + d_{II} f^p$$

Considérons un bicomplexe \mathcal{F} tel que l'on ait $F^{p,q} = 0$ pour $p > a$, a étant un entier fixé. L'image de l'application linéaire $d_I : \mathcal{F}^{a,*} \rightarrow \mathcal{F}^{a-1,*}$ est un sous-complexe de $\mathcal{F}^{a,*}$ puisque d_I et d_{II} anticommulent; nous appellerons \mathcal{O} le complexe $\mathcal{F}^{a,*}/d_I \mathcal{F}^{a-1,*}$ et π l'homomorphisme canonique de complexes de $\mathcal{F}^{a,*}$ sur \mathcal{O} . Dans ces conditions, l'application $\rho : h \rightarrow \pi(h^a)$ de $\hat{\mathcal{F}}$ dans \mathcal{O} est de degré $-a$, car pour $h \in \hat{F}^s$ on a $h^a \in F^{a,s-a}$ et $\rho(h) = \pi(h^a) \in G^{s-a}$; de plus, ρ commute aux différentielles

de $\hat{\mathcal{F}}$ et \mathcal{G} , car on a :

$$\rho(dh) = \pi((dh)^a) = \pi(d_I(h^{a-1})) + \pi(d_{II}(h^a)) = d(\pi(h^a)) = d(\rho(h))$$

étant donné que $\pi \circ d_I = 0$ par définition de π .

Nous allons alors prouver le lemme suivant :

LEMME 1.- Soit $\hat{\mathcal{F}}$ un bicomplexe et soient a et s deux entiers. On suppose :

a) $F^{p,q} = 0$ pour $p > a$.

b) $H^i(d_I, \hat{\mathcal{F}}^{*,q}) = 0$ pour $q > s-a$
 $i < a$

Dans ces conditions, l'application ρ de $\hat{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{G} = \hat{\mathcal{F}}^{a,*}/d_I \hat{\mathcal{F}}^{a-1,*}$ définit un isomorphisme de $H^s(\hat{\mathcal{F}})$ sur $H^{s-a}(\mathcal{G})$.

Nous gardons les notations introduites plus haut.

a) tout cycle de degré $s-a$ de G est l'image par ρ d'un cycle de degré s de $\hat{\mathcal{F}}$.

Soit $x \in G^{s-a}$ tel que $dx = 0$ et soit $h^a \in F^{a,s-a}$ tel que $x = \pi(h^a)$. Si l'on pose $h^i = 0 \in F^{i,s-i}$ pour $i > a$, l'égalité

$$(E_i) \quad d_I h^{i-1} + d_{II} h^i = 0$$

est trivialement vérifiée pour $i > a$ puisque le premier membre de (E_i) appartient à $F^{i,s-i+1}$ qui est réduit à 0 pour $i > a$ d'après a).

Soit alors b un entier $\leq a$ quelconque et supposons définis pour $i \geq b$ des éléments $h^i \in F^{i,s-i}$ tels que l'on ait (E_i) pour $i > b$. En particulier, on aura pour $i = b+1$

$$(4) \quad d_I h^b + d_{II} h^{b+1} = 0.$$

Si $b = a$, on a $\pi(d_{II}(h^a)) = d(\pi(h^a)) = dx = 0$ et par conséquent, comme le noyau de π est $d_I \hat{\mathcal{F}}^{a-1,*}$, il existe $h^{a-1} \in F^{a-1,s-a+1}$ tel que

$d_{II} h^a = -d_I h^{a-1}$ et la condition (E_a) est vérifiée. Si au contraire, on a

$b < a$, on aura $d_I(d_{II} h^b) = -d_{II} d_I h^b = d_{II} d_{II} h^{b+1} = 0$ d'après (4), autrement

dit $d_{II} h^b \in Z^b(\hat{\mathcal{F}}^{*,s-b+1})$; d'après l'hypothèse b) applicable car $s-b+1 > s-a$

et $b < a$, il existe un élément $h^{b-1} \in F^{b-1,s-b+1}$ tel que $d_{II} h^b = -d_I h^{b-1}$ et

la condition (E_b) est vérifiée.

Par récurrence, on construit alors une suite h d'éléments $h^i \in F^{i,s-i}$ vérifiant (E_i) pour tout i , donc telle que $dh = 0$, et telle que $\pi(h^a) = x$.

b) Tout cycle h de degré s de \hat{F} tel que $\pi(h^a)$ soit le bord d'un élément de G^{s-a-1} , est un bord.

On a donc $\pi(h^a) = dx$ avec $x \in G^{s-a-1}$; soit alors $p^a \in F^{a,s-a-1}$ tel que $\pi(p^a) = x$ et soit pour $i > a$, $p^i = 0 \in F^{i,s-i-1}$. Dans ces conditions, l'égalité :

$$(F_i) \quad h^i = d_I p^{i-1} + d_{II} p^i$$

sera vérifiée pour $i > a$, puisque les deux membres appartiennent à $F^{i,s-i}$ qui est réduit à 0 pour $i > a$.

Soit alors b un entier $\leq a$ et supposons construits pour $i \geq b$ des éléments $p^i \in F^{i,s-i-1}$ de sorte que les égalités (F_i) soient vérifiées pour $i > b$. Si $b = a$, on a $\pi(h^a) = d(\pi(p^a)) = \pi(d_{II}(p^a))$ et par suite π annule $h^a - d_{II} p^a$; il en résulte l'existence d'un élément p^{a-1} de $F^{a-1,s-a}$ tel que $h^a - d_{II} p^a = d_I p^{a-1}$. Si, au contraire, on a $b < a$, on aura :

$$d_I(h^b - d_{II} p^b) = -d_{II} h^{b+1} + d_{II} d_I p^b = -d_{II}(h^{b+1} - d_I p^b) = -d_{II} d_{II} p^{b+1} = 0$$

d'après la condition (F_{b+1}) . Autrement dit $h^b - d_{II} p^b$ appartient à $Z^b(\mathcal{F}^{*,s-b})$; comme on a $b < a$ et $s-b > s-a$, on peut appliquer l'hypothèse b) et on en déduit l'existence de $p^{b-1} \in F^{b-1,s-b}$ tel que $h^b - d_{II} p^b = d_I p^{b-1}$. Dans les deux cas envisagés, on a construit $p^{b-1} \in F^{b-1,s-b}$ vérifiant (F_b) ; par récurrence, on construit donc $p = (p^i) \in \hat{F}^s$ tel que toutes les égalités (F_i) soient satisfaites, ce qui signifie $h = dp$. C.Q.F.D.

2.- Définition des foncteurs Ext de modules sur une coalgèbre.

Nous supposons désormais fixée une coalgèbre A sur l'anneau K .

Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux complexes de A -modules (Exposé 4, numéro 7). On définit un bicomplexe $\hat{\mathcal{F}} = F(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ de la manière suivante :

$F^{p,q} = \text{Hom}_A(M^{-p}, M'^q)$ et pour $f \in F^{p,q}$, on pose $d_I f = f \circ d_{-p-1}$ et

$d_{II} f = (-1)^{p+q} d'_q \circ f$. Le module \hat{F}^s n'est alors autre que le module noté F_s dans l'exposé 4, numéro 7, et la différentielle d de \hat{F} n'est autre que l'opérateur noté δ dans l'exposé 4, numéro 7. Nous poserons alors $T^s(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = H^s(\hat{\mathcal{F}})$;

si \mathcal{M} , \mathcal{M}' et \mathcal{M}'' sont trois complexes de A -modules, pour tout $f \in \mathbb{F}^s(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ et $g \in \mathbb{F}^t(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$, on a $g \circ f \in \mathbb{F}^{s+t}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'')$ et

$$(5) \quad \delta(g \circ f) = (\delta g) \circ f + (-1)^t g \circ (\delta f)$$

Il en résulte immédiatement que si f et g sont des cycles, c'est-à-dire des homomorphismes de complexes de A -modules, il en est de même de $g \circ f$. Par passage au quotient, la composition définit une application bilinéaire de $T^s(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \times T^t(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$ dans $T^{s+t}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'')$ et l'on a une formule d'associativité pour le cas de 4 complexes.

Nous supposons désormais que les complexes envisagés sont nuls en degrés < 0 ; de plus, modifiant en apparence la définition de l'exposé 4, numéro 7, nous appellerons résolution d'un A -module M la donnée d'un complexe \mathcal{M} de A -modules (nul en degré 0) et d'un A -homomorphisme ξ de M dans M^0 tel que $d_0 \circ \xi = 0$.

Soient alors M et M' deux A -modules, (\mathcal{M}, ξ) une résolution ξ -acyclique de M et (\mathcal{M}', ξ') une résolution ξ' -injective de M' . Par définition même des A -modules ξ -injectifs, la suite :

$$\dots \rightarrow \mathbb{F}^{p,q} \rightarrow \mathbb{F}^{p+1,q} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{F}^{0,q} \rightarrow \text{Hom}_A(M, M'^q) \rightarrow 0$$

est exacte pour tout p , et l'on a $\mathbb{F}^{p,q} = 0$ pour $p > 0$. Appliquant alors le lemme 1, on voit que l'on peut identifier $T^s(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ au module

$H^s(\text{Hom}_A(M, \mathcal{M}'))$ (le groupe gradué $\text{Hom}_A(M, \mathcal{M}') = \sum_q \text{Hom}_A(M, M'^q)$ étant muni de la différentielle $f \rightarrow d' \circ f$). D'autre part, comme $d' \circ \xi' = 0$, l'image de l'application $f \rightarrow \xi' \circ f$ de $\text{Hom}_A(M, M')$ dans $\text{Hom}_A(M, M'^0)$ se compose de cycles de degré 0; comme $\text{Hom}_A(M, M'^{-1}) = 0$, on a défini une application linéaire π de $\text{Hom}_A(M, M')$ dans $T^0(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$; si la suite

$0 \rightarrow M' \rightarrow M'^0 \rightarrow M'^1$ est exacte, cette application est bijective. Interprétant le résultat obtenu, on peut énoncer :

LEMME 2.- Soient (\mathcal{M}, ξ) une résolution ξ -acyclique du A -module M et (\mathcal{M}', ξ') une résolution ξ' -injective du A -module M' . Pour tout A -homomorphisme f de M dans M' , il existe un homomorphisme h de degré 0 du complexe \mathcal{M} de A -modules dans le complexe \mathcal{M}' de A -modules tel que $\xi' \circ f = h^0 \circ \xi$, et, à une homotopie près, un seul.

Il résulte aussitôt de la définition de l'application $\pi : \text{Hom}_A(M, M') \rightarrow T^0(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ qu'elle est compatible avec la composition au sens suivant :

si $(\mathcal{M}', \varepsilon')$ est une résolution \mathcal{E} -acyclique et \mathcal{E} -injective de M' et si $(\mathcal{M}'', \varepsilon'')$ est une résolution \mathcal{E} -injective d'un troisième A -module M'' , on a $\pi(g \circ f) = \pi(g)\pi(f)$ pour $f: M \rightarrow M'$ et $g: M' \rightarrow M''$.

A tout A -module M , on a associé une résolution \mathcal{E} -acyclique et \mathcal{E} -injective $(\mathcal{R}(M), \varepsilon)$ (Exposé 4, numéro 7, lemme 2) : on a $R^0(M) = A \otimes M$ et $R^{i+1}(M) = A \otimes (R^i(M)/d^{i-1}(R^{i-1}(M)))$, ε étant l'application Δ_M et l'application d^i étant composée de l'application canonique $A \otimes R^i(M) \rightarrow A \otimes P$ et de Δ_P (où $P = R^i(M)/d^{i-1}(R^{i-1}(M))$).

Par définition, nous poserons :

$$\text{Ext}_A^i(M, M') = T^i(\mathcal{R}(M), \mathcal{R}(M'))$$

La composition $\text{Ext}_A^j(M, M') \times \text{Ext}_A^i(M', M'') \rightarrow \text{Ext}_A^{i+j}(M, M'')$ est définie par la composition entre les $T(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$. Cette composition est associative, en particulier, pour tout A -module M , $\text{Ext}_A^*(M, M) = \sum_i \text{Ext}_A^i(M, M)$ est une algèbre associative graduée.

Il résulte de ce qu'on a vu avant le lemme 2, que l'on peut identifier $\text{Ext}_A^i(M, M')$ à $H^i(\text{Hom}_A(M, \mathcal{R}(M')))$ et $\text{Ext}_A^0(M, M')$ à $\text{Hom}_A(M, M')$, cette dernière identification étant compatible avec la composition. De là et du lemme 2, on définit que si \mathcal{P} est une résolution \mathcal{E} -acyclique de M et \mathcal{Q} une résolution \mathcal{E} -acyclique et \mathcal{E} -injective de M' , et si l'on désigne par j (resp. j') l'image dans $T^0(\mathcal{P}, \mathcal{R}(M))$ de $1 \in \text{Hom}_A(M, M)$ (resp l'image dans $T^0(\mathcal{R}(M'), \mathcal{Q})$ de $1 \in \text{Hom}_A(M', M')$) (cf. lemme 2), l'application $f \rightarrow j'fj$ est un isomorphisme de $T^s(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ sur $\text{Ext}_A^s(M, M')$.

Comme on peut identifier $\text{Hom}_A(M, M')$ et $\text{Ext}_A^0(M, M')$, pour tout couple de A -homomorphismes $f: N \rightarrow M$ et $g: M' \rightarrow N'$, l'application $h \rightarrow ghf$ applique $\text{Ext}_A^i(M, M')$ dans $\text{Ext}_A^i(N, N')$; l'associativité et la bilinéarité de la composition entre les Ext montre alors que $\text{Ext}_A^i(M, M')$ est un foncteur covariant additif en M' et un foncteur contravariant additif en M .

Avant de définir la suite exacte des Ext , nous remarquerons que $\mathcal{R}(M)$ dépend fonctoriellement de M . De manière précise, soit donné un A -homomorphisme $f: M \rightarrow N$; nous poserons $R^0(f) = 1_A \otimes f$ d'où résulte par la définition des A -homomorphismes que l'on a $R^0(f) \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f$. Soient alors définies des

applications linéaires $R^i(f)$ de $R^i(M)$ dans $R^i(N)$ pour $i \leq p$ telles que $d^{i-1} \circ R^{i-1}(f) = R^i(f) \circ d^{i-1}$ pour $i \leq p$; si l'on pose $P = R^p(M)/d^{p-1}(R^{p-1}(M))$ et $Q = R^p(N)/d^{p-1}(R^{p-1}(N))$, l'application $R^p(f)$ applique $d^{p-1}(R^{p-1}(M))$ dans $d^{p-1}(R^{p-1}(N))$ donc passe au quotient et définit une application g de P dans Q qui est un homomorphisme de A -modules ; par suite l'application $1 \otimes g = R^{p+1}(f)$ de $A \otimes P = R^{p+1}(M)$ dans $A \otimes Q = R^{p+1}(N)$ vérifie la condition $d^p \circ R^p(f) = R^{p+1}(f) \circ d^p$. On a donc construit par récurrence les composantes d'un homomorphisme $\mathcal{R}(f)$ de degré 0 de $\mathcal{R}(M)$ dans $\mathcal{R}(N)$ tel que $R^0(f) \circ \xi = \xi \circ f$. De plus par récurrence sur p , on vérifie immédiatement que $R^p(g \circ f) = R^p(g) \circ R^p(f)$, que $R^p(1_M) = 1_{R^p(M)}$ et que le foncteur R^p transforme une suite ξ -exacte en une suite exacte "scindée".

Soit alors $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite ξ -exacte de A -modules ; pour tout A -module N et tout entier p , le A -module $R^p(N)$ étant ξ -injectif, on aura une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', R^p(N)) \rightarrow \text{Hom}_A(M', R^p(N)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, R^p(N)) \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte de complexes de K -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', \mathcal{R}(N)) \rightarrow \text{Hom}_A(M', \mathcal{R}(N)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \mathcal{R}(N)) \rightarrow 0$$

On en déduit immédiatement une suite exacte d'homologie (cf n° 1) :

$$(6) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M'', N) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Ext}_A^1(M', N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_A^i(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M', N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N) \rightarrow \\ &\dots \rightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(M'', N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

De plus, on a une suite exacte scindée $0 \rightarrow \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M') \rightarrow \mathcal{R}(M'') \rightarrow 0$ de complexes de A -modules d'après ce qui précède, d'où une suite exacte de complexes de K -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M)) \rightarrow \text{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M')) \rightarrow \text{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M'')) \rightarrow 0$$

pour tout A -module P . On en déduit alors une suite exacte analogue à la suite (6) et qui commence par :

$$(6') \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, M') \rightarrow \text{Hom}_A(P, M'') \rightarrow \text{Ext}_A^1(P, M) \rightarrow \text{Ext}_A^1(P, M') \rightarrow \dots$$

3.- Interprétation des Ext au moyen des suites ξ -exactes :

DÉFINITION 1.- Soient M et N deux A -modules. On appelle extension de M par N la donnée d'un A -module P et d'une suite ξ -exacte :

$$(E) \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

Deux extensions $(E_i) : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha_i} P_i \xrightarrow{\beta_i} M \longrightarrow 0$ avec $i=1, 2$, seront dites équivalentes s'il existe un A-homomorphisme f de P_1 dans P_2 tel que $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ et $\beta_1 = \beta_2 \circ f$.

On montre immédiatement qu'un homomorphisme f vérifiant la condition de la définition 1 est un isomorphisme, ce qui montre que la relation introduite ici entre extensions de M par N est une relation d'équivalence.

L'image de 1_N par l'application linéaire de $\text{Hom}_A(N, N)$ dans $\text{Ext}_A^1(M, N)$ définie par la suite \mathcal{C} -exacte (E) (cf. (6)) s'appelle la classe caractéristique de l'extension (E) et se note $j(E)$.

Soit pour $i = 1, 2$ une suite \mathcal{C} -exacte :

$$(E_i) \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha_i} P_i \xrightarrow{\beta_i} M_i \longrightarrow 0$$

et soient $f : P_1 \longrightarrow P_2$ et $g : M_1 \longrightarrow M_2$ des A-homomorphismes tels que $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$ et $g \circ \beta_1 = \beta_2 \circ f$. On en déduit un diagramme commutatif de complexes de K-modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(M_1, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(P_1, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(N, \mathcal{R}(N)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow g^* & & \uparrow f^* & & \uparrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(M_2, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(P_2, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A^1(N, \mathcal{R}(N)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et par suite d'après les résultats rappelés au n° 1 (suite exacte d'homologie), le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ext}_A^1(M_1, N) \\ & \searrow & \uparrow g^* \\ \text{Hom}_A(N, N) & & \text{Ext}_A^1(M_2, N) \end{array}$$

Ceci démontre la formule $j(E_1) = j(E_2)g$ et montre en particulier que $j(E)$ ne dépend que de la classe de l'extension (E) .

Soit Q un A-module quelconque ; nous allons expliciter au moyen de $j(E)$ l'application $\partial : \text{Ext}_A^1(N, Q) \longrightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(M, Q)$ associée à la suite \mathcal{C} -exacte (E) .

Tout élément $f \in \text{Ext}_A^1(N, Q)$ peut être représenté par un A-homomorphisme $f' : N \longrightarrow R^i(Q)$ tel que $d^i \circ f' = 0$; comme $R^i(Q)$ est \mathcal{C} -injectif et que la suite $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P$ est \mathcal{C} -exacte, on peut écrire $f' = g' \circ \alpha$ avec $g' : P \longrightarrow R^i(Q)$. On a alors $(d^i \circ g') \circ \alpha = d^i \circ f' = 0$ et comme $\alpha(N)$ est le noyau de β , il existe $h' : M \longrightarrow R^{i+1}(Q)$ tel que $d^i \circ g' = h' \circ \beta$.

Autrement dit, on a un diagramme commutatif :

$$(S') \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\ & & f' \downarrow & & \swarrow g' & & \searrow h' \\ & & R^i(Q) & \xrightarrow{d^i} & R^{i+1}(Q) & & \end{array}$$

Il résulte de la définition de ∂ , que pour tout diagramme commutatif tel que (S'), si f' représente $f \in \text{Ext}_A^i(N, Q)$, alors h' représente $\partial f \in \text{Ext}_A^{i+1}(M, Q)$.

En particulier, on aura un diagramme commutatif :

$$(S'') \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \alpha \nearrow & P & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & N & & \downarrow g'' & & \downarrow h'' \\ & & & \searrow \varepsilon & R^0(N) & \longrightarrow & R^1(N) \end{array}$$

où h'' représente $j(E)$.

Mais, on sait qu'il existe un homomorphisme (f^k) de degré i de complexes de A -modules de $\mathcal{R}(N)$ dans $\mathcal{R}(Q)$ tel que $f' = f^0 \circ \varepsilon$. On voit immédiatement que dans le diagramme (S'), on peut choisir $g' = f^0 \circ g''$ et $h' = f^1 \circ h''$ et la dernière de ces deux formules implique :

$$(7) \quad \partial f = f j(E)$$

PROPOSITION 1.— L'application qui à toute extension (E) de M par N associe la classe caractéristique $j(E)$ définit une bijection φ de l'ensemble des classes d'extension de M par N sur $\text{Ext}_A^1(M, N)$.

Il suffit de démontrer que pour tout A -homomorphisme h'' de M dans $R^1(N)$ tel que $d^1 \circ h'' = 0$, il existe à un isomorphisme près, une manière et une seule de compléter le diagramme commutatif (S''). Le lecteur vérifiera aisément que l'on y parvient par la construction suivante :

P est le noyau de l'application $(x, y) \longrightarrow d^0(x) - h''(y)$ de $R^0(N) \times M$ dans $R^1(N)$, les applications g'' et β sont respectivement les restrictions à P des projections canoniques de $R^0(N) \times M$ sur ses deux facteurs ; enfin on a pour $x \in N$ la formule $\alpha(x) = (\varepsilon(x), 0)$.

C.Q.F.D.

REMARQUES : 1) L'application de $\text{Ext}_A^1(Q, M)$ dans $\text{Ext}_A^{i+1}(Q, N)$ associée à la suite exacte (E) est l'application $f \longrightarrow \pm j(E)f$.

2) Les résultats précédents se généralisent au cas de $n > 0$ quelconque ; à toute suite \mathcal{E} -exacte :

$$(E) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on associe un élément $j(E)$ de $\text{Ext}_A^n(M, N)$. La composition entre les Ext correspond à la juxtaposition des suites \mathcal{C} -exactes ; l'application $(E) \rightarrow j(E)$ est surjective et l'on a $j(E_1) = j(E_2)$ si et seulement si l'on peut trouver une suite \mathcal{C} -exacte (E) et des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^n \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & & & M \longrightarrow 0 \\
 & & & X^1_{(i)} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^n_{(i)} \\
 & & & & & & & \nearrow \searrow \\
 & & & & & & & & i=1, 2.
 \end{array}$$

4.- Complexe standard.

On suppose désormais que la coalgèbre A possède une unité u , donc que l'on a $\Delta_A(u) = u \otimes u$ et $\varepsilon_A(u) = 1$ (cf exposé 4, numéro 1). Le module A est donc somme directe de A^+ et de $K.u$; de cette décomposition en somme directe, on déduit des décompositions des produits tensoriels $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ en somme directe de produits tensoriels dont les facteurs sont égaux à A^+ ou $K.u$.

On notera a^+ la composante de $a \in A$ selon A^+ et $\delta(a)$ la composante de $\Delta_A(a)$ selon $A^+ \otimes A^+$; on a donc :

$$(9) \quad a^+ = a - \varepsilon_A(a).u \quad (a \in A)$$

$$(10) \quad \delta(a) = \Delta_A(a) - a \otimes u - u \otimes a \quad (a \in A^+)$$

et la composante de $(\Delta_A \otimes 1)(\Delta_A(a))$ selon $A^+ \otimes A^+ \otimes A^+$ sera égale à $(\delta \otimes 1)(\delta(a))$; de là on déduira la formule :

$$(11) \quad (\delta \otimes 1) \circ \delta = (1 \otimes \delta) \circ \delta$$

On définit sur K une structure de A -module en posant $\Delta_K(\lambda) = u \otimes \lambda$ pour $\lambda \in K$; on posera alors :

$$H^i(A) = \text{Ext}_A^i(K, K) \quad H^*(A) = \sum_{i \geq 0} H^i(A)$$

L'algèbre graduée $H^*(A)$ se nomme l'algèbre de cohomologie de la coalgèbre A . Nous allons donner, dans le cas général, puis dans un cas particulier, des procédés de calcul de cette algèbre de cohomologie.

Soit donnée une algèbre différentielle (B, δ) , c'est-à-dire un complexe muni d'une loi de composition bilinéaire associative avec unité, telle que l'application $x \otimes y \rightarrow xy$ soit un homomorphisme de degré 0 du complexe $B \otimes B$ dans le complexe B ; autrement dit, on a $B^m \otimes B^n \subset B^{m+n}$ et

$$(12) \quad \delta(xy) = \delta(x)y + (-1)^m x \delta(y) \quad x \in B^m \quad y \in B$$

On suppose de plus donnée une application linéaire d^0 de A dans $B^1 \otimes A$.

Sur $C = B \otimes A$, on définit alors les structures suivantes :

a) une graduation, par les sous-modules $C^n = B^n \otimes A$

b) une structure de A -module par l'application diagonale $1_B \otimes \Delta_A$

c) une structure de B -module à gauche par la loi externe :

$$(13) \quad x.(y \otimes a) = xy \otimes a \quad a \in A, \quad x, y \in B$$

les homothéties $h_x : c \rightarrow x.c$ de C sont alors des A -endomorphismes.

d) un endomorphisme d de C par

$$(14) \quad d(x \otimes a) = \delta(x) \otimes a + (-1)^n x.d^0(a) \quad a \in A, \quad x \in B^n$$

e) un opérateur ξ de K dans C^0 par :

$$(15) \quad \xi(\lambda) = \lambda u \otimes 1 \quad \lambda \in K$$

L'opérateur d de C dans C est de degré $+1$, de plus pour $x \in B^n$ et $c \in C$, on a la relation :

$$(16) \quad d(x.c) = \delta(x).c + (-1)^n x.d(c)$$

Cette formule se déduit en effet par linéarité du cas où $c = y \otimes a$ ($y \in B^m$, $a \in A$), lui-même conséquence immédiate des formules (13) et (14). De plus, on a $d(\xi(\lambda)) = \lambda d^0(u)$ et

$$\begin{aligned} d(d(x \otimes a)) &= d(\delta(x) \otimes a) + (-1)^n d(x.d^0(a)) \\ &= \delta(\delta(x)) \otimes a + (-1)^{n+1} \delta(x).d^0(a) + (-1)^n \delta(x).d^0(a) + \\ &\quad + (-1)^{n+n} x.d(d^0(a)) \\ &= x.d(d^0(a)) \quad \text{pour } a \in A \text{ et } x \in B^n \end{aligned}$$

Par suite si $d \circ d^0 = 0$ et si $d^0(u) = 0$, on aura défini un complexe augmenté (C, d, ξ) .

L'opérateur d de C^n dans C^{n+1} est somme de l'application $\delta \otimes 1_A$ qui est un A -homomorphisme et de l'application $x \otimes a \rightarrow (-1)^n x.d^0(a)$, elle-même composée de l'application $x \otimes a \rightarrow (-1)^n x \otimes d^0(a)$ de $B^n \otimes A$ dans $B^n \otimes (B^1 \otimes A)$ et du A -homomorphisme $x \otimes y \otimes a \rightarrow xy \otimes a$ de $B^n \otimes B^1 \otimes A$ dans $B^{n+1} \otimes A$. Par suite si d^0 est un A -homomorphisme, d sera un A -homomorphisme et on aura défini une résolution \mathcal{C} -injective (C, d, ξ) de K (considéré comme A -module par Δ_K).

LEMME 3. Soient données une algèbre différentielle B et une application d^0 de A dans $B^1 \otimes A$. Supposons :

a) d^0 est un A -homomorphisme et $d \circ d^0 = 0$, $d^0(u) = 0$.

b) la résolution ξ -injective (C, d, ε) de K construite précédemment à l'aide de B et d^0 est ξ -acyclique.

Dans ces conditions $H^*(A)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(B, \delta)$ et cet isomorphisme est compatible avec les structures multiplicatives.

Soient P un K -module et $x \in P \otimes A$; munissons $P \otimes A$ de l'application diagonale $\Delta = 1_P \otimes \Delta_A$ qui en fait un A -module. Si $x = p \otimes u$ avec $p \in P$, on aura $\Delta(x) = p \otimes u \otimes u = x \otimes u$; inversement, supposons que l'on ait $\Delta(x) = x \otimes u$; posant $h = 1_P \otimes (P_A \circ (\xi_A \otimes 1_A))$, on en déduit au moyen de la formule (3) de l'exposé 4, la relation $x = h(1_P \otimes \Delta_A)(x) = h(x \otimes u)$ que x est de la forme $p \otimes u$, puisque les éléments de l'image de h sont de cette forme. De ceci, on déduit que les A -homomorphismes de K dans $P \otimes A$ sont les applications de la forme $\lambda \rightarrow \lambda p \otimes u$ avec $p \in P$.

D'après les hypothèses, le complexe augmenté (C, d, ε) est une résolution ξ -acyclique et ξ -injective de K considéré comme A -module par Δ_K . A tout endomorphisme f de degré s du A -module gradué C , associons le A -homomorphisme $f \circ \varepsilon$ de K dans C ; d'après ce qui précède, on a $f(\varepsilon(1)) = x \otimes u$ avec $x \in B^s$ bien déterminé. Comme l'application $f \rightarrow f \circ \varepsilon$ détermine un isomorphisme par passage à l'homologie et comme on a $d(x \otimes u) = \delta(x) \otimes u$, on voit en combinant que si à f on associe l'élément $\alpha(f) = x \in B^s$ défini par $f(1 \otimes u) = x \otimes u$, on obtient par passage à l'homologie un isomorphisme α^* de $H^s(A) = T^s(C, C)$ sur $H^s(B, \delta)$. Mais comme la formule (16) s'écrit

$h_\delta(x) = d \circ h_x - (-1)^s h_x \circ d$ pour $x \in B^s$, l'application $x \rightarrow h_x$ est un homomorphisme β du complexe (B, δ) dans le complexe $\hat{F}(C, C)$; il est clair que $h_x(1 \otimes u) = x \otimes u$, donc $\alpha(\beta(x)) = x$. Mais comme $h_x \circ h_{x'} = h_{xx'}$, l'isomorphisme β^* de $H^*(B, \delta)$ sur $H^*(A)$ inverse de α^* est compatible avec les structures multiplicatives.

C.Q.F.D.

On va appliquer ce lemme général à la construction du complexe standard. Nous prolongerons l'application linéaire δ de A^+ dans $A^+ \otimes A^+$ en une antidérivation de degré $+1$ de l'algèbre tensorielle $T(A^+)$ en posant : (*)

(*) Dans cette formule et celles qui suivent, on omet le signe \otimes de multiplication dans une algèbre tensorielle.

$$(17) \quad \delta(a_1 \dots a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_n \quad a_i \in A^+$$

La formule (11) exprime que la dérivation $\delta \circ \delta$ de $T(A^+)$ est nulle sur A^+ qui engendre $T(A^+)$ donc est identiquement nulle.

Posons $d^0(a) = \Delta_A(a) - u \otimes a$ pour $a \in A$; comme Δ_A est un A -homomorphisme de A muni de Δ_A dans $A \otimes A$ muni de $1_A \otimes \Delta_A$, il est immédiat que d^0 est un A -homomorphisme. Posant $B = T(A^+)$ et appliquant les constructions du début de ce numéro, on obtient un opérateur d sur $T(A^+) \otimes A$, qu'on explicitera en remarquant que $d^0(a) = \delta(a^+) + a^+ \otimes u$, d'où

$$(18) \quad d(a_1 \dots a_n \otimes a) = (-1)^n a_1 \dots a_n \cdot \delta(a^+) + (-1)^n a_1 \dots a_n a^+ \otimes u + \\ + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_n \otimes a$$

Comme $u^+ = 0$, on a $d^0(u) = 0$ et de plus,

$$d(d^0(a)) = d(\delta(a^+)) + d(a^+ \otimes u) = - (1 \otimes \delta)(\delta(a^+)) - \delta(a^+) \otimes u \\ + (\delta \otimes 1)(\delta(a^+)) + d(a^+ \otimes u) = 0$$

Soient $C^{-1} = K$, $d^{-1} = \varepsilon$ et C' le complexe ainsi défini à l'aide de C par $C^i = 0$ pour $i < -1$. On va montrer que l'opérateur s défini dans C' par

$$(19) \quad s(a_1 \dots a_n \otimes a) = (-1)^{n-1} \varepsilon_A(a) a_1 \dots a_{n-1} \otimes a_n$$

est une homotopie, c'est-à-dire que l'on a $sd + ds = 1$. Or :

$$s(d(a_1 \dots a_n \otimes a)) = (-1)^{n+n} a_1 \dots a_n \otimes a^+ + \varepsilon_A(a) (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \dots \\ \dots \delta(a_i) a_{n-1} \otimes a_n + (-1)^{n+n-1} \varepsilon_A(a) a_1 \dots a_{n-1} \cdot \delta(a_n) \\ d(s(a_1 \dots a_n \otimes a)) = (-1)^{n-1} \varepsilon_A(a) \left\{ (-1)^{n-1} a_1 \dots a_{n-1} \cdot \delta(a_n) \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} a_1 \dots a_n \otimes u + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_{n-1} \otimes a_n \right\}$$

et par suite :

$$(sd + ds)(a_1 \dots a_n \otimes a) = a_1 \dots a_n \otimes (a^+ + \varepsilon_A(a)u) = a_1 \dots a_n \otimes a$$

La formule $sd + ds = 1$ montre que le complexe C' de K -modules est scindé, donc que la suite $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \dots$ est ε -exacte, ce qui permet d'appliquer le lemme 3 :

PROPOSITION 2. - Soit A une coalgèbre avec une unité u . L'algèbre de cohomologie $H^*(A)$ de A s'identifie à l'algèbre d'homologie de $T(A^+)$ muni de la différentielle :

$$(20) \quad \delta(a_1 \dots a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_1 \dots a_{i-1} \delta(a_i) a_{i+1} \dots a_n$$

avec $\delta(a) = \Delta_A(a) - u \otimes a - a \otimes u$ pour $a \in A^+$.

Il en résulte en particulier que $H^1(A)$ est le sous-module des éléments primitifs de A^+ , c'est-à-dire des x tels que $\Delta_A(x) = x \otimes u + u \otimes x$. De même $H^2(A)$ est le quotient du noyau de l'application $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$ de $A^+ \otimes A^+$ dans $A^+ \otimes A^+ \otimes A^+$ par l'image de $\delta : A^+ \rightarrow A^+ \otimes A^+$.

REMARQUES : 1) Par une construction à celle qui conduit à la proposition 2, on démontre que l'on peut identifier $H^*(A)$ à l'algèbre d'homologie de $T(A)$ pour la différentielle :

$$d(a_1 \dots a_n) = u a_1 \dots a_n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_1 \dots \Delta_A(a_i) \dots a_n + (-1)^{n+1} a_1 \dots a_n u$$

2) De l'interprétation donnée plus haut de $H^2(A)$, on déduit facilement une correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2(A)$ et les classes d'équivalence de suites exactes scindées de K -modules $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$, où B est munie d'une structure de coalgèbre telle que α soit un homomorphisme de coalgèbre et que pour tout $x \in B^+$, on ait $\delta(x) \in \alpha(A^+) \otimes \alpha(A^+)$.

5.- Cohomologie de la coalgèbre $\Gamma(M)$.

Soit M un K -module ; on a défini (exposé 3) l'algèbre $\Gamma(M)$ comme l'algèbre commutative définie par les générateurs $m^{(h)}$ ($m \in M$, $h \in \mathbb{N}$) et les relations :

$$(21) \quad (m + m')^{(h)} = \sum_{i=0}^h m^{(i)} m'^{(h-i)}$$

$$(22) \quad (\lambda m)^{(h)} = \lambda^h m^{(h)}$$

$$(23) \quad m^{(h)} m^{(k)} = (h+k)! / h! k! m^{(h+k)} \quad m^{(0)} = 1$$

On a défini une application diagonale Δ de $\Gamma(M)$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$ par

$$(24) \quad \Delta(m^{(h)}) = \sum_{i=0}^h m^{(i)} \otimes m^{(h-i)}$$

Nous allons étudier la cohomologie de $\Gamma(M)$ considérée seulement comme coalgèbre. De la formule (24), résulte que si l'on pose $u = 1$, on a bien une unité au sens de l'exposé 4, numéro 1 et que les éléments $m^{(1)}$ sont primitifs.

De plus, on a $\delta(m^{(2)}) = m^{(1)} \otimes m^{(1)}$; par suite, l'application $m \rightarrow m^{(1)}$ de M dans $H^1(\Gamma(M))$ se prolonge en un homomorphisme φ de l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ dans $H^*(\Gamma(M))$.

PROPOSITION 3.- Si le module M est libre, l'application φ est un isomorphisme d'algèbre de $\Lambda(M)$ sur $H^*(\Gamma(M))$.

Munissons l'algèbre graduée de la différentielle nulle et soit p le projecteur de $\Gamma(M)$ sur $\Gamma^1(M) = M = \Lambda^1(M)$ qui associe à un élément de $\Gamma(M)$ sa composante de degré 1 . L'application $d^0 = (1_{\Gamma(M)} \otimes p) \circ \Delta$ de $\Gamma(M)$ dans $\Gamma(M) \otimes M$ est un homomorphisme de modules sur la coalgèbre $\Gamma(M)$ qui annule $u = 1$ puisque $d^0(1) = 1 \otimes p(1) = 0$. On définit à l'aide de d^0 un opérateur d de degré +1 dans $\mathcal{C}(M) = \Gamma(M) \otimes \Lambda(M)$ gradué par les sous-modules $\Gamma(M) \otimes \Lambda^i(M)$. Comme on a :

$$(25) \quad d^0(m_1^{(h_1)} \dots m_r^{(h_r)}) = \sum_{i=1}^r m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-1)} \dots m_r^{(h_r)} \otimes m_i$$

on aura :

$$\begin{aligned} d(d(m_1^{(h_1)} \dots m_r^{(h_r)})) &= \sum_{i,j} m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-1)} \dots m_j^{(h_j-1)} \dots \otimes (m_i \wedge m_j) \\ &\quad + \sum_i m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-2)} \dots m_r^{(h_r)} \otimes (m_i \wedge m_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $\mathcal{C}(M)$ est un complexe (cf. numéro 4).

Il résulte des propriétés connues des algèbres extérieures et des propriétés de $\Gamma(M)$ démontrées dans l'exposé 3 que l'on a $\mathcal{C}(M + M') = \mathcal{C}(M) \otimes \mathcal{C}(M')$ (produit tensoriel de complexes) à un isomorphisme canonique près.

Or, si le module M admet une base (m_i) , l'ensemble I d'indices étant totalement ordonné, le complexe $\mathcal{C}(M)$ admet pour base les éléments $Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}$ (avec $Z_\alpha = \prod_i m_i^{(\alpha_i)}$ pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{H}(I)$) lorsque α parcourt l'ensemble $\mathcal{H}(I)$ et que $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes d'éléments de I . De plus, on a :

$$(26) \quad d(Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}) = \sum_j (-1)^k Z_{\alpha - \varepsilon_j} \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_k} \wedge m_j \wedge \dots \wedge m_{i_n}$$

ε_j étant l'élément de $\mathcal{N}^{(I)}$ dont la j^{e} coordonnée est 1, les autres étant nulles, et la suite $\{i_1, \dots, i_k, j, i_{k+1}, \dots, i_n\}$ étant strictement croissante. La formule (26) étant indépendante de l'anneau K , le complexe $\mathcal{C}(M)$ s'obtient par extension des scalaires à partir d'un complexe \mathcal{C}_0 sur l'anneau \mathcal{L} des entiers correspondant au module libre $\sum_I \mathcal{L} m_i$.

Pour toute partie finie F de I , soit $\mathcal{C}_{0,F}$ le sous-complexe de \mathcal{C}_0 constitué par les combinaisons linéaires des $Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}$ où les i_k sont dans F et $\alpha_r = 0$ pour $r \notin F$; le complexe \mathcal{C}_0 est réunion des sous-complexes $\mathcal{C}_{0,F}$. De plus $\mathcal{C}_{0,F}$ est isomorphe au complexe $\mathcal{C}(\sum_{i \in F} \mathcal{L} m_i)$ lui-même isomorphe au produit tensoriel des complexes $\mathcal{C}(\mathcal{L} m_i)$ pour $i \in F$ d'après ce qu'on a vu.

Le complexe $\mathcal{Q}_i = \mathcal{C}(\mathcal{L} m_i)$ admet pour base les $u_n = Z_n \varepsilon_i \otimes 1$ et $v_n = Z_n \varepsilon_i \otimes m_i$ et l'on a $\partial(1) = u_0$ et $du_n = v_{n-1}$ ($n \geq 1$), $du_0 = 0$ et $dv_n = 0$ pour $n \geq 0$. On voit immédiatement que le complexe augmenté $(\mathcal{Q}_i, \varepsilon)$ est scindé; par passage au produit tensoriel, le complexe $(\mathcal{C}_{0,F}, \varepsilon)$ est donc scindé (cf. numéro 1) et comme le complexe \mathcal{C}_0 est réunion des complexes acycliques $\mathcal{C}_{0,F}$, le complexe augmenté $(\mathcal{C}_0, \varepsilon)$ est acyclique. Or les modules $(\mathcal{C}_0)^n$ sont des modules libres sur l'anneau des entiers et le complexe augmenté $(\mathcal{C}_0, \varepsilon)$ sera scindé (cf. numéro 1). Il en sera donc encore de même du complexe augmenté $(\mathcal{C}(M), \varepsilon)$ qui s'en déduit par extension des scalaires de \mathcal{L} à K .

On peut donc appliquer le lemme 3 et identifier $H^*(\Gamma(M))$ à l'algèbre d'homologie de $\wedge(M)$ muni de la différentielle nulle, c'est-à-dire à $\wedge(M)$ lui-même; on voit immédiatement que cette identification induit l'application $m \rightarrow m^{(1)}$ de M dans $H^1(\Gamma(M))$, donc se fait au moyen de φ puisqu'elle est multiplicative.

COROLLAIRE.— Soit M un module libre admettant une base (m_i) , l'ensemble I d'indices étant totalement ordonné. Tout élément u de $\Gamma(M)^+ \otimes \Gamma(M)^+$ annulé par $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = \sum_{i < j} a_{ij} m_i^{(1)} \otimes m_j^{(1)} + v$$

avec $v \in \delta(\Gamma(M))$.

Cela résolve immédiatement de l'identification de $\Lambda^2(M)$ à $H^2(\Gamma(M))$.

REMARQUES : 1) Nous allons donner, d'après Lazard, une démonstration directe du corollaire de la proposition 3. Le module $\Lambda^+ \otimes \Lambda^+$ admet pour base les éléments $Z_\alpha \otimes Z_\beta$ avec $\alpha, \beta \neq 0$ et l'on a $\delta(Z_\alpha) = \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta, \gamma \neq 0}} Z_\beta \otimes Z_\gamma$; on voit immédiatement que les cycles de degré 2 du complexe standard sont les

$$u = \sum_{\alpha, \beta \neq 0} c(\alpha, \beta) Z_\alpha \otimes Z_\beta \quad \text{avec} \quad (*) \quad c(\alpha + \beta, \gamma) = c(\alpha, \beta + \gamma) \quad \text{pour}$$

$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ et que les bords sont les éléments de la forme précédente où $c(\alpha, \beta)$ ne dépend que de $\alpha + \beta$. Supposons que c remplisse la condition (*) et soit γ avec $|\gamma| > 2$; soient i et j tels que $\gamma \geq \varepsilon_i, \varepsilon_j$; on aura

$$c(\gamma - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = c((\gamma - \varepsilon_i - \varepsilon_j) + \varepsilon_j, \varepsilon_i) = c(\gamma - \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j)$$

donc $c(\gamma - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = d(\gamma)$ ne dépend pas de l'indice i choisi pourvu que $\gamma \geq \varepsilon_i$. Si $\gamma \geq \delta$, on aura alors, avec i tel que $\delta \geq \varepsilon_i$, la formule

$$c(\gamma - \delta, \delta) = c(\gamma - \delta, (\delta - \varepsilon_i) + \varepsilon_i) = c(\gamma - \delta + \delta - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = d(\gamma)$$

De là on déduit $u = \delta \left(\sum_{|\alpha| > 2} d(\alpha) Z_\alpha \right) + \sum_{i,j} a_{ij} m_i \otimes m_j$; la formule $\delta(m_i m_j) = m_i \otimes m_j + m_j \otimes m_i$ achève immédiatement la démonstration.

2) Le corollaire montre en particulier que si $u \in \Gamma^+(M) \otimes \Gamma^+(M)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 annulé par $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$, il est de la forme $\delta(v)$. Inversement si une coalgèbre A vérifie cette propriété et si A_m désignant la filtration canonique (exposé 2) de A , on suppose que les modules

A_m/A_{m-1} sont libres et que Δ_A applique A dans les éléments symétriques de $A \otimes A$, alors A est, en tant que coalgèbre isomorphe à $\Gamma(A_1 \cap A^+)$. On procède par récurrence, supposant que A_m admet une base Z_α avec $|\alpha| \leq m$ telle que $\Delta_A(Z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} Z_\beta \otimes Z_\gamma$; si $|\alpha| = m+1$ l'élément $\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta, \gamma \neq 0}} Z_\beta \otimes Z_\gamma$ de

$A_m^+ \otimes A_m^+$ est de la forme $\delta(u)$ avec $u \in A_{m+1}^+ = A_m \cap A^+$ d'après l'hypothèse cohomologique faite sur A ; notant Z_α un tel élément, on a construit les α pour $|\alpha| \leq m+1$; si alors $x \in A_{m+1}^+$, $\delta(x) \in A_m^+ \otimes A_m^+$ est de la forme $\sum_{|\alpha| \leq m+1} \lambda_\alpha \delta(Z_\alpha)$ d'après ce qu'on a montré dans la remarque 1 ; il s'ensuit que

$x - \sum_{\alpha} \lambda_\alpha Z_\alpha$ est primitif donc dans A_1^+ et par suite que les Z_α avec

$|\alpha| \leq m+1$ sous-tendent A_{m+1}^+ ; l'indépendance linéaire des Z_α se démontre aisément par récurrence sur $|\alpha|$.