P. Cartier

Hyperalgèbres des variétés de groupes

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. nº 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire "Sophus LIE"
Année 1955/1956
-:-:-:-

HYPERALGÈBRES DES VARIÉTÉS DE GROUPES

(Exposé de P. CARTIER, le 20.1.56)

1.- Introduction.

Cette série est consacrée à l'étude des groupes de Lie formels d'après des travaux récents de Dieudonné (cf. la bibliographie) qui ont mis en évidence l'importance de la notion d'hyperalgèbre. La théorie des groupes formels sur un corps de caractéristique 0 se réduit essentiellement à celle des algèbres de Lie, et les méthodes exposées permettent de donner un exposé simplifié des trois théorèmes classiques de Lie. Mais sur un corps de caractéristique $p \neq 0$, on verra apparaître des phénomènes essentiellement nouveaux, même dans le cas des groupes à un paramètre ; il reste de nombreux problèmes ouverts dans cette direction, les résultats n'étant à peu près complets que dans le cas des groupes abéliens. En particulier, un problème fondamental est de trouver un analogue satisfaisant de la formule de Hausdorff dans le cas de caractéristique p.

Nous allons consacrer cet exposé à des notions globales sur les variétés de groupes : le but de ces considérations est essentiellement de montrer l'origine de la notion de groupe de Lie formel, et de ramener la théorie de Lie classique, aussi bien que celle des groupes algébriques en caractéristique 0 au même schéma algébrique, et de permettre l'application des résultats purement algébriques de l'exposé 3 à venir.

2.- Variétés.

Soit K un anneau commutatif, dit anneau des scalaires.

Nous appellerons structure de variété sur un ensemble X, la donnée

a) d'une topologie sur X

b) pour tout ouvert $U \subset X$, d'un ensemble $A(U)$ de fonctions définies sur U, à valeurs dans K.

Les axiomes auxquels sont soumises ces données sont les suivants :

(V 1) Soit f une fonction définie sur U (à valeurs dans K) ; pour que $f \in A(U)$, il faut et il suffit que pour tout $x \in U$, on puisse trouver un voisinage ouvert U_x de x contenu dans U tel que la restriction de f à U_x soit dans $A(U_x)$

(V 2) $A(U)$ contient les fonctions constantes ; si f , $g \in A(U)$, on a $f - g \in A(U)$ et $fg \in A(U)$.

Une fonction f définie sur une partie de X à valeurs dans K est dite régulière en $x \in X$ si elle est définie dans un voisinage ouvert U de x et si sa restriction à U appartient à $A(U)$. Si l'on identifie deux fonctions régulières en x qui coïncident dans un voisinage de x , on obtient l'algèbre $A(x)$ des germes de fonctions régulières en x , autrement dit $A(x) = \text{lim.ind. } A(U)$ la limite inductive étant prise selon l'ordonné filtrant des ouverts U contenant x . Les $A(x)$ forment donc un faisceau d'anneaux et $A(U)$ s'identifie aux sections sur U de ce faisceau.

Si U est un ouvert d'une variété X , U muni de la topologie induite et des ensembles $A(V)$ pour $V \subset U$ ouvert est une variété, dite sous-variété ouverte de X .

Enfin nous pouvons définir les applications régulières d'une variété X dans une variété Y ainsi : une application régulière φ est une application continue de X dans Y telle que pour $x \in X$ et f régulière en $\varphi(x) \in Y$ $f \circ \varphi$ soit régulière en x . Il est clair que la composée de deux applications régulières est régulière, etc...

Ceci dit, nous pouvons définir les variétés d'une espèce $\mathcal{M}$ particulière. Pour cela, donnons-nous un ensemble $\mathcal{M}$ de variétés "les modèles", satisfaisant à la condition suivante :

(M) Si X , $Y \in \mathcal{M}$, on s'est donné sur l'ensemble $X \times Y$ une structure de variété appartenant à $\mathcal{M}$, telle que pour qu'une application φ d'une variété $Z \in \mathcal{M}$ dans $X \times Y$ soit régulière, il faut et il suffit que ses projections sur X et Y soient régulières.

Une variété X est dite d'espèce $\mathcal{M}$ si elle vérifie les deux axiomes suivants :

(V 3) <u>Il existe un recouvrement de</u> X <u>par des ouverts</u> U_i , <u>et pour chaque indice</u> i <u>un ouvert</u> U'_i <u>d'une variété</u> $X_i \in \mathfrak{M}$ <u>et un isomorphisme</u> φ_i <u>de la variété</u> U'_i <u>sur la variété</u> U_i .

Un isomorphisme d'un ouvert U' d'une variété $X' \in \mathfrak{M}$ sur un ouvert U de X s'appelle une carte de l'ouvert U .

(V 4) <u>Si</u> (φ_i , U'_i) $(i = 1 , 2)$ <u>sont deux cartes d'ouverts</u> U_i <u>de</u> X , U'_i <u>étant un ouvert de</u> X_i , <u>l'ensemble des</u> $x = (x_1 , x_2) \in U'_1 \times U'_2$ <u>tels que</u> $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$ <u>est fermé pour la topologie induite sur</u> $U'_1 \times U'_2$ <u>par celle de la variété</u> $X_1 \times X_2 \in \mathfrak{M}$.

Noter que la topologie de la variété $X_1 \times X_2$ peut être <u>strictement plus fine</u> que la topologie produit des facteurs.

La condition (M) permet de définir <u>le produit de deux variétés</u> X_1 et X_2 <u>d'espèce</u> $\mathfrak{M}$ de la manière suivante : il existe sur $X_1 \times X_2$ une structure de variété et une seule telle que si (φ_i , U'_i) est une carte d'un ouvert U_i de X_i $(i = 1 , 2)$, alors $(\varphi_1 \times \varphi_2 , U'_1 \times U'_2)$ soit une carte de $U_1 \times U_2 \subset X_1 \times X_2$. $X_1 \times X_2$ est une variété d'espèce $\mathfrak{M}$ et on vérifie facilement qu'une application $\psi = (\psi_1 , \psi_2)$ d'une variété Y d'espèce $\mathfrak{M}$ dans $X_1 \times X_2$ est régulière si et seulement si ψ_1 et ψ_2 sont des applications régulières. D'autre part l'axiome (V 4) signifie évidemment que <u>la diagonale de</u> $X \times X$ <u>est fermée</u> dans la topologie de la variété $X \times X$.

Nous donnerons maintenant les exemples les plus courants d'espèces de variétés :

a) <u>Variétés analytiques sur un corps valué complet</u> K : les modèles sont les espaces vectoriels K^n , une fonction $f(x_1 , \dots , x_n)$ étant régulière en $a = (a_1 , \dots , a_n)$ si elle est analytique en a , i.e. développable en série entière en les $x_i - a_i$ au voisinage de a .

b) <u>Variétés différentiables</u> : les modèles sont les espaces euclidiens R^n , une fonction $f(x_1 , \dots , x_n)$ étant régulière dans un ouvert $U \subset R^n$ si elle est indéfiniment différentiable dans U . Ces variétés sont les variétés de classe C^∞ ; on définit de manière analogue les variétés de classe C^m ou les variétés différentiables sur une algèbre K de rang fini sur R .

Dans ces deux cas, la condition (M) est une conséquence du théorème des fonctions composées, le produit de K^m et K^n s'identifiant à K^{m+n} .

c) Variétés algébriques : soit A une algèbre de type fini sans éléments nilpotents sur le corps K algébriquement clos K et X l'ensemble des homomorphismes de A dans K ; chaque élément de A définit une fonction sur X et pour chaque $a \in A$ on désigne par X_a l'ensemble des $f \in X$ avec $f(a) \neq 0$ et par A_a l'algèbre de fonctions sur X_a engendrée par les restrictions des fonctions de A et par l'inverse de a (a ne s'annule pas dans X_a par définition). On définit alors la variété $X(A)$ en prenant les X_a comme base d'ouverts et les fonctions de A_a pour fonctions régulières dans X_a . Les variétés ainsi obtenues sont les variétés affines : elles peuvent servir de modèles car $X(A \otimes B)$ peut servir de produit $X(A) \times X(B)$. De plus on ne considère en général que les variétés recouvertes par un nombre fini de cartes.

N.B. La présentation suivie est inspirée de J.P. SERRE (Ann. of Maths, 61, 1955, p. 197-278).

3.- Structure des algèbres $A(x)$.

Puisque les fonctions constantes sont régulières, $A(x)$ est une algèbre avec unité notée 1 ; d'autre part si f est une fonction régulière en x sa valeur $f(x)$ en x ne dépend que du germe de f en x , d'où un homomorphisme, noté $f \longrightarrow f(x) = \varepsilon_x(f)$ de $A(x)$ dans K . $A(x)$ est donc somme directe de l'anneau des scalaires $K.1$ et de l'idéal $I(x) = I$ noyau de ε_x .

$A(x)$ est filtrée par les puissances $I^n(x)$ de l'idéal $I(x)$; nous désignerons par $G(x) = \sum_{n \geq 0} G_n(x)$ l'algèbre graduée associée : $G_n(x) = I^n/I^{n+1}$ si l'on pose $I^0 = A(x)$. On vérifie facilement que $G(x)$ est engendrée par les scalaires et l'ensemble $G_1(x)$ des éléments de degré 1 et l'application identique de $G_1(x)$ se prolonge donc en un homomorphisme φ_x de l'algèbre symétrique $S(G_1(x))$ sur $G(x)$.

Les éléments de $G_1(x) = I(x)/I^2(x)$ sont les différentielles en x . Si X est une variété algébrique, nous dirons que $x \in X$ est un point simple si la dimension de $G_1(x)$ est la plus petite possible dans un voisinage de x .

Théorème 1 : Soit X une variété analytique sur un corps valué complet ou une variété différentiable, x un point de X ; l'homomorphisme canonique φ_x de $S(G_1(x))$ sur $G(x)$ est un isomorphisme. Ceci est encore exact si, X étant une variété algébrique, x est un point simple.

Nous renverrons au Séminaire Cartan-Chevalley (1955/56) pour la démonstration dans le cas des variétés algébriques.

La question est évidemment locale et nous pouvons donc la démontrer sur un modèle : dans le cas analytique, nous devons donc étudier l'algèbre $A(U)$ des séries de puissances en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients dans le corps valué complet K convergeant dans un polydisque U : l'idéal $I(U) = I$ est formé des séries sans terme constant, d'où résulte que $f \in I^k$ n'a pas de termes non nuls de degré $< k$; réciproquement, si les termes de degré $< k$ de la série f sont nuls, appelons $M_1, \ldots, M_r$ les monômes distincts de degré k en $x_1, \ldots, x_n$; tous les termes de f sont divisibles par l'un des M_j puisqu'ils sont de degré $\geqslant k$, donc si l'on appelle A_i la somme des termes de f divisibles par M_i mais non par $M_1, \ldots, M_{i-1}$, il en résulte que $A_i = M_i f_i$ où f_i est une série convergente dans U, et que $f = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} M_i f_i \in I^k$. On peut donc prendre les polynômes homogènes de degré k comme représentants de I^k modulo I^{k+1} ; passant à la limite sur les polydisques U, on voit donc que $G(0)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ graduée par le degré total. Le théorème est donc prouvé dans ce cas, et l'on voit que si X est connexe, le rang de $G_1(x)$ est égal à n indépendant de $x \in X$.

Dans le cas différentiable, nous considérerons les fonctions différentiables dans l'ouvert $U \ni 0$ de R^n et nous montrerons d'abord que si I est l'idéal des f avec $f(0) = 0$ <u>que</u> I^k <u>est l'ensemble des</u> f <u>dont les dérivées d'ordre</u> $< k$ <u>sont nulles en</u> 0 : soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions différentiables nulles en 0, $D_1, \ldots, D_m$ des dérivations d'ordre 1 $(m < k)$. Alors $(D_1, \ldots, D_m)(f_1, \ldots, f_k)$ est somme de termes du type $D_1 f_{i_1} \ldots D_k f_{i_k} f_{i_{k+1}} \ldots f_{i_m}$ qui sont nuls en 0, donc les dérivées d'ordre $< k$ de $f \in I^k$ sont nulles en 0. Nous démontrerons la réciproque par récurrence sur le nombre n des variables : si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer ; soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ dont toutes les dérivées d'ordre $< k$ sont nulles en 0, et supposons démontré que pour $h = 0, 1, \ldots, k-1$, l'annulation en 0 des dérivées d'ordre $< h$ implique l'appartenance à I^h. On peut écrire $f(x_1, \ldots, x_n) = f'(x_1, \ldots, x_n) + f''(x_2, \ldots, x_n)$ avec $f'(0, x_2, \ldots, x_n) = 0$; comme les dérivées d'ordre $< k$ de f'' s'annulent en 0, $f'' \in I^k_n$ par l'hypothèse de récurrence sur n, et on se ramène

donc au cas où $f(0, x_2, \dots, x_n) = 0$. Mais c'est un résultat standard qui se déduit de la formule de Taylor que l'on peut alors écrire
$f''(x_1, \dots, x_n) = x_1 g(x_1, \dots, x_n)$ où g est indéfiniment différentiable ; on a alors en posant $D_i = \partial/\partial x_i$:

$$(1) \qquad D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n} f'' = D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n}(x_1 g) = x_1 D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n}(g) + m_1 D_1^{m_1 - 1} \dots D_n^{m_n} g$$

donc : $$(D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n} f'')(0) = m_1 (D_1^{m_1-1} \dots D_n^{m_n} g)(0)$$

ce qui prouve que g a ses dérivées d'ordre $< k - 1$ nulles en 0 et donc $g \in I^{k-1}$ $f'' = x_1 g \in I^k$.

Comme il y a un polynome de degré $< k$ et un seul ayant des dérivées d'ordre $< k$ données, il en résulte que les polynomes de degré $< k$ forment un système de représentants de $A(U)$ mod $I(U)^k$ et donc que les éléments de I^k/I^{k+1} sont représentés par les polynomes homogènes de degré k, donc par passage à la limite inductive selon les ouverts U que $G(0)$ est isomorphe à l'algèbre des polynomes en $x_1, \dots, x_n$, ce qui démontre le théorème.

C.Q.F.D.

Nous allons tirer quelques conséquences du théorème 1 : nous noterons $\hat{A}(x)$ l'algèbre obtenue en complétant l'algèbre $A(x)/\bigcap_{k \geq 0} I^k(x)$ pour la topologie définie en prenant les images des idéaux $I^k(x)$ comme système fondamental de voisinage de 0.

<u>Corollaire 1</u> : $\hat{A}(x)$ <u>est isomorphe à l'algèbre des séries formelles à</u> n <u>indéterminées</u>. $(n = \mathrm{rg}\ G_1(x))$

Soient $f_1, \dots, f_n$ n éléments de $I(x)$ dont les classes f'_i mod. $I^2(x)$ forment une base de $G_1(x)$ et B la sous-algèbre de $A(x)$ engendré par 1 et les f_i ; si $P = P_k + \dots + P_r$ est un polynome dont les P_j sont les composantes homogènes et tel que $P_k \neq 0$, alors $P(f_1, \dots, f_n) \in$ $\in I^k(x) \cap \complement I^{k+1}(x)$, car $P_k(f_1, \dots, f_n) \in I^k(x)$, mais $\notin I^{k+1}(x)$ puisque $G(x)$ est isomorphe à l'algèbre des polynomes en les f'_i : autrement dit B est isomorphe à l'algèbre des polynomes en les f_i et la topologie induite sur B par $A(x)$ est identique à la topologie induite sur les polynomes par celle des séries formelles. De plus B <u>est dense dans</u> $A(x)$ car si $f \in A(x)$ est donné on peut déterminer par récurrence sur k des polynomes P_k homogènes de degré k tels que $f - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(f_1, \dots, f_n) \in I^k(x)$ puisque les f'_i

engendrent $G(x)$. Il résulte donc de ce qu'on a démontré un isomorphisme de l'algèbre des séries formelles sur $\hat{A}(x)$.

Corollaire 2 : Si X et Y sont deux variétés de même espèce différentiable, analytique, ou algébrique et si $(x , y) \in X \times Y$ est donné (x et y étant supposés simples dans le cas algébrique), on peut définir un isomorphisme de $A(x) \otimes A(y)$ dans $A(x , y)$ tel que $A(x) \otimes A(y) \cap I^k(x , y) = \sum_{j=0}^{k} I^j(x) \otimes I^{k-j}(y)$. De plus $A(x) \otimes A(y)$ est dense dans $A(x , y)$.

Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux ouverts, $f \in A(U)$ et $g \in A(V)$ des fonctions régulières ; comme les projections de $X \times Y$ sur X et Y sont régulières, $U \times V = X \times V \cap U \times Y$ est ouvert dans $X \times Y$ et $f(x)\ g(y) \in A(U \times V)$. On peut donc définir un homomorphisme de $A(U) \otimes A(V)$ dans $A(U \times V)$ en faisant correspondre à $\sum_i f_i \otimes g_i$ la fonction $\sum_i f_i(x)\ g_i(y) \in A(U \times V)$; cet homomorphisme est injectif, car si on suppose les f_i linéairement indépendants, de $\sum_i f_i(x)\ g_i(y) = 0$, on tire $\sum_i f_i\ g_i(y) = 0$ donc $g_i(y) = 0$ et par suite $g_i = 0$ et $\sum_i f_i \otimes g_i = 0$. Puisque le produit tensoriel commute à la limite inductive, on définit par passage à la limite un isomorphisme de $A(x) \otimes A(y)$ dans $A(x , y)$. De plus, il est clair que $I(x) \otimes A(y) + A(x) \otimes I(y)$ qui est l'idéal de $A(x) \otimes A(y)$ engendré par $I(x)$ et $I(y)$ est contenu dans $I(x , y)$, donc que $\sum_{j=0}^{k} I^j(x) \otimes I^{k-j}(y)$ qui est la puissance k^e de cet idéal est contenu dans $I^k(x , y)$. Nous achèverons la démonstration dans le cas analytique ou différentiable, le cas algébrique reposant sur des techniques plus subtiles d'anneaux de fractions.

Supposons donc X et Y analytiques et ramenons-nous, ce qui est licite au cas où $X = K^m$ $Y = K^n$ $x = 0$, $y = 0$; $A(x) \otimes A(y)$ contenant les polynomes par rapport aux variables $x_1 , \dots , x_m$, $y_1 , \dots , y_n$ est donc dense dans $A(x , y)$; d'autre part comme les polynomes homogènes forment un système de représentants pour $G(x)$ et $G(y)$, et comme $K[x_1 , \dots , y_n] \simeq K[x_1 , \dots , x_m] \otimes K[y_1 , \dots , y_n]$, il en résulte que l'isomorphisme canonique de $G(x) \otimes G(y)$ dans $G(x , y)$ obtenu à partir des homomorphismes $G(x) \longrightarrow G(x , y)$ et $G(y) \longrightarrow G(x , y)$ déduits de $A(x) \longrightarrow A(x , y)$ et $A(y) \longrightarrow A(x , y)$ respectivement, est bijectif. Or, il résulte d'une technique élémentaire de produits tensoriels que $G(x) \otimes G(y)$ est l'algèbre graduée associée à $A(x) \otimes A(y)$ filtrée par les idéaux $\sum_{j=0}^{k} I^j(x) \otimes I^{k-j}(y)$, d'où résulte par les théorèmes d'isomorphie de E. Noether que $I^k(x, y)$ coupe $A(x) \otimes A(y)$ suivant l'idéal $\sum_{j=0}^{k} I^j(x) \otimes I^{k-j}(y)$.

4.- Distributions ponctuelles sur les variétés.

Soit X une variété (différentiable, analytique ou algébrique) et $x \in X$; nous appellerons distribution d'ordre $\leq k$ en x une forme linéaire sur $A(x)$ nulle sur $I^{k+1}(x)$; l'ensemble de ces distributions se note $\mathcal{D}'_k(x)$; $\mathcal{D}'(x)$ est la réunion des $\mathcal{D}'_k(x)$ pour $k \geq 0$ et $\mathcal{D}'_X$ est la somme directe des espaces $\mathcal{D}'(x)$: un élément de $\mathcal{D}'_X$ s'appelle une distribution (ponctuelle) sur X . Nous allons d'abord étudier les distributions sur une variété $X \times Y$

Théorème 2 : Si X et Y sont deux variétés de même espèce et si $(x, y) \in X \times Y$, on peut définir un isomorphisme de $\mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(y)$ sur $\mathcal{D}'(x, y)$ par lequel $\mathcal{D}'_k(x, y)$ correspond à $\sum_{j=0}^{k} \mathcal{D}'_j(x) \otimes \mathcal{D}'_{k-j}(y)$. On peut de même identifier $\mathcal{D}'_{X \times Y}$ et $\mathcal{D}'_X \otimes \mathcal{D}'_Y$.

D'après le corollaire 2 du théorème 1, une distribution d'ordre $\leq k$ en (x, y) est bien définie par sa restriction à $A(x) \otimes A(y)$ et elle doit être nulle sur $I^{k+1}(x, y) \cap A(x) \otimes A(y) \supset A(x) \otimes I^{k+1}(y) + I^{k+1}(x) \otimes A(y) = P_k(x,y)$. Or $A(x) \otimes A(y)/P_k(x, y)$ est isomorphe à l'espace de dimension finie $A(x)/I^{k+1}(x) \otimes A(y)/I^{k+1}(y)$, dont le dual est $\mathcal{D}'_k(x) \otimes \mathcal{D}'_k(y)$, d'où résulte que si l'on définit une application φ de $\mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(y)$ dans $\mathcal{D}'(x, y)$ par

$$(2) \qquad \langle \varphi(S \otimes T), f \otimes g \rangle = \langle S , f \rangle \langle T , g \rangle$$

φ est surjective ; elle est injective car si les S_i sont linéairement indépendantes, et $\varphi(\sum_i S_i \otimes T_i) = 0$, on a $\sum_i \langle S_i , f \rangle \langle T_i , g \rangle = 0$ donc $\sum_i S_i \langle T_i , g \rangle = 0$ d'où $\langle T_i , g \rangle = 0$ et par suite $T_i = 0$ et $\sum_i S_i \otimes T_i = 0$.

L'assertion sur $\mathcal{D}'_k(x, y)$ réxulte de la formule $I^k(x, y) \cap A(x) \otimes A(y) = \sum_{j=0}^{k} I^j(x) \otimes I^{k-j}(y)$ par les techniques tensorielles standard. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant définir sur les distributions un certain nombre d'opérations :

a) augmentation : on pose $\varepsilon(T) = \langle T , 1 \rangle$ pour $T \in \mathcal{D}'(x)$ et on le prolonge par linéarité sur $\mathcal{D}'_X$

b) image par une application régulière : si φ est une application régulière de X dans Y , st si f est régulière en $\varphi(x)$, $f \circ \varphi$ est régulière en x

par définition même, et le germe de $f \circ \varphi$ ne dépend que du germe de f, d'où un homomorphisme, noté encore $f \to f \circ \varphi$ de $A(\varphi(x))$ dans $A(x)$ qui envoie $I^k(\varphi(x))$ dans $I^k(x)$. On en déduit une application φ^* de $\mathcal{D}'_k(x)$ dans $\mathcal{D}'_k(\varphi(x))$ en posant :

(3) $$\langle \varphi^*(T) , f \rangle = \langle T , f \circ \varphi \rangle$$

Cette formule montre immédiatement que $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ et que $i^* = I$ si i est l'application identique de X et I l'application identique de $\mathcal{D}'(x)$. Soit $\psi = (\psi_1 , \psi_2)$ une application régulière en $x=(X_1,X_2)$ de $X_1 \times X_2$ dans $Y_1 \times Y_2$; on a si $h = (f_1 \otimes f_2) \circ \psi$,
$h(x_1 , x_2) = f_1(\psi_1(x_1))\, f_2(\psi_2(x_2))$ donc $h = (f_1 \circ \psi_1) \otimes (f_2 \circ \psi_2)$ et donc d'après les formules (2) et (3), on a

(4) $$\psi^*(T_1 \times T_2) = \psi_1^*(T_1) \otimes \psi_2^*(T_2)$$

Enfin si φ_1 désigne la projection de $X \times Y$ sur X, on aura pour f régulière sur X $f \circ \varphi_1 = f \otimes 1$, d'où immédiatement :

(5) $$\varphi_1^*(S \otimes T) = S\, \varepsilon(T)$$

et une formule analogue pour la projection sur Y.

c) <u>application diagonale</u> : appliquons le b) à l'application régulière δ : $x \to (x , x)$ de X dans $X \times X$; on posera $\Delta = \delta^*$; on a alors les propriétés suivantes :

1) Δ est une application linéaire de $\mathcal{D}'(x)$ dans $\mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(x)$ qui envoi $\mathcal{D}'_k(x)$ dans $\sum_{j=0}^{k} \mathcal{D}'_j(x) \otimes \mathcal{D}'_{k-j}(x)$.

2) les applications $(\Delta \otimes I) \circ \Delta$ et $(I \otimes \Delta) \circ \Delta$ de $\mathcal{D}'(x)$ dans $\mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(x)$ sont égales, autrement dit :

(6) $$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$$

en effet ces deux applications proviennent de l'application $x \to (x , x , x)$ de X dans $X \times X \times X$. La formule (5) montre de même que l'on a, car $\varphi_1(\delta(x)) = x$:

(7) $$(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I$$

Enfin, comme la diagonale de $X \times X$ est invariante dans la symétrie $(x , y) \to (y , x)$ il en résulte qu'en notant S la symétrie $a \otimes b \to b \otimes a$ dans $\mathcal{D}'(x) \otimes \mathcal{D}'(x)$, on a :

(8) $$S \circ \Lambda = \Delta$$

d) <u>intégration des fonctions vectorielles</u> : si V est un espace vectoriel de dimension finie sur K, on appellera fonction régulière en $x \in X$ une fonction f définie au voisinage de x et telle que $x \longrightarrow \langle f(x), v' \rangle$ soit régulière en x pour toute forme linéaire v' sur V, ou ce qui revient au même si l'on peut écrire $f(x) = \sum_i f_i(x) v_i$ $(v_i \in V$, f_i régulière en $x)$. Faisant correspondre à $f \otimes v \in A(U) \otimes V$ la fonction $x \longrightarrow f(x)v$, on voit qu'on identifie $A(U) \otimes V$ à l'espace des fonctions à valeurs dans V et régulières en tout point de U, et par suite qu'on peut identifier $A(x) \otimes V$ à l'espace des germes de fonctions régulières en x à valeurs dans V. On définit un accouplement entre $\mathcal{D}'(x)$ et $A(x) \otimes V$ en posant $\langle T, f \otimes v \rangle = T(f)v$ et toute application φ de X dans V régulière en x définit une application $T \longrightarrow \varphi^*(T) = \langle T, \varphi \rangle$ de $\mathcal{D}'(x)$ dans V, qu'on pourra aussi noter $\int \varphi \, dT$ si l'on veut.

Donnons quelques exemples de distribution pour terminer : tout d'abord $\varepsilon_x : f \longrightarrow f(x)$ est une distribution en x, "la masse $+1$ en x" ; ensuite il est immédiat de vérifier qu'il y a identité entre les distributions $T \in \mathcal{D}'_1(x)$ telles que $\varepsilon(T) = 0$ et les vecteurs tangents en x à X, i.e. les distributions T qui vérifient : $T(fg) = T(f)\, g(x) + f(x)\, T(g)$, ce qui s'écrit aussi $\Delta(T) = T \otimes \varepsilon_x + \varepsilon_x \otimes T$.

5.- <u>Hyperalgèbres des variétés de groupes.</u>

On appelle <u>variété de groupe</u> une variété G dont l'ensemble des points est muni <u>d'une loi de groupe telle que les applications</u> $(x, y) \longrightarrow xy$ et $x \longrightarrow x^{-1}$ <u>de</u> $G \times G$ <u>dans</u> G <u>et de</u> G <u>dans</u> G <u>respectivement soient des applications régulières</u>.

L'application $\mu : (x, y) \longrightarrow xy$ étant régulière, définit une application μ^* de $\mathcal{D}'_X \otimes \mathcal{D}'_X \simeq \mathcal{D}'_{X \times X}$ dans $\mathcal{D}'_X$, i.e. une loi de composition dans $\mathcal{D}'_X$ qu'on appelle produit de convolution et qu'on note $S * T$: cette loi est bilinéaire et elle est associative : en effet l'associativité dans G, soit $(xy)z = x(yz)$ s'écrit $\mu \circ (\mu, i) = \mu \circ (i, \mu)$ d'où $\mu^* \circ (\mu, i)^* = \mu^* \circ (i, \mu)^*$ ce qui s'écrit $(T * T') * T'' = T * (T' * T'')$; la commutativité de G implique de même celle de $\mathcal{D}'_X$. Enfin si f est un homomorphisme de G dans G', ce qui s'écrit $f(xy) = f(x)\, f(y)$ ou

$f \circ \mu = \mu' \circ (f , f)$, on en déduit $f^* \circ \mu^* = \mu'^* \circ (f^* \otimes f^*)$ i.e. $f^*(T * T') = f^*(T) * f^*(T')$, donc f^* est un homomorphisme de $\mathcal{O}'_G$ dans $\mathcal{O}'_{G'}$.

Si <u>e</u> est l'élément neutre, il est clair que ε_e est unité dans $\mathcal{O}'_G$ et que $\mathcal{O}'(e)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}'_G$ qu'on appelle <u>l'hyperalgèbre de</u> G et qu'on note $U(G)$. De plus comme l'application $x \longrightarrow (x , x)$ est un homomorphisme de groupes, Δ est un homomorphisme d'algèbres. $U(G)$ est donc munie des structures suivantes :

1) <u>Une structure d'algèbre sur</u> K avec élément unité $1 = \varepsilon_e$

2) <u>Un homomorphisme</u> Δ <u>de</u> $U(G)$ <u>dans</u> $U(G) \otimes U(G)$ <u>et un homomorphisme</u> ε <u>de</u> $U(G)$ <u>dans</u> K vérifiant les formules

(9) $$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$$

(10) $$S \circ \Delta = \Delta$$

(11) $$(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I$$

3) Une filtration croissante $U_k(G)$ telle que Δ envoie $U_k(G) \longrightarrow \sum_{j=0}^{k} U_j(G) \otimes U_{k-j}(G)$ et que

(12) $$U_k(G)\, U_\ell(G) \subset U_{k+\ell}(G)$$

Les seuls points non évidents sont que ε est un homomorphisme et la formule (12) . Or $\varepsilon(S * T) = \langle S * T , 1 \rangle = \langle S \otimes T , 1 \otimes 1 \rangle = \varepsilon(S)\, \varepsilon(T)$. Quant à la formule (12) elle résulte de ce que μ^* est compatible avec les filtrations et que $\mathcal{O}'_k(e , e) \simeq \sum_{j=0}^{k} \mathcal{O}'_j(e) \otimes \mathcal{O}'_{k-j}(e)$.

Enfin notons que toute représentation linéaire régulière (U_x , V) de G dans un espace vectoriel V définit une représentation linéaire de $U(G)$ en posant $U(T) = \int U_x \, dT(x)$ pour $T \in U(G) = \mathcal{O}'(e)$: en effet on voit immédiatement en prenant une base dans V et utilisant la formule (4) que $U(S * T) = U(S)\, U(T)$. Il en serait de même si U_x était définie pour x voisin de <u>e</u> et si l'on avait $U_{xy} = U_x U_y$ pour x , y assez voisins de <u>e</u> ("germe de représentation linéaire").