Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Compléments à la cohomologie

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 5 bis, p. 8-10
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A8_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 5 Bis

COMPLÉMENTS A LA COHOMOLOGIE.

Nous allons donner une autre démonstration de l'interprétation du 2e groupe de clhomologie d'une algèbre de Lie qui n'utilise pas la forme explicite des cochaînes.

$U(\mathfrak{g})$ désigne comme toujours l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $U'(\mathfrak{g})$ l'idéal formé des éléments sans terme constant de $U(\mathfrak{g})$, et K_0 le corps K considéré comme $\mathfrak{g}$-module trivial, les opérateurs de $\mathfrak{g}$ dans K_0 étant nuls. Munissons $U(\mathfrak{g})$ de la représentation régulière gauche, à $x \in \mathfrak{g}$ correspondant ainsi l'opérateur $u \longrightarrow xu$ de $U(\mathfrak{g})$; $\mathcal{E}$ étant l'augmentation de $U(\mathfrak{g})$ on a alors la suite exacte suivante de $\mathfrak{g}$-modules :

(S) $$(0) \longrightarrow U'(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathcal{E}} K_0 \longrightarrow (0)$$

d'où M étant un $\mathfrak{g}$-module quelconque, la suite exacte :

(S') $$(0) \to \mathcal{L}(K_0,M) \simeq M \to \mathcal{L}(U(\mathfrak{g}),M) \to \mathcal{L}(U'(\mathfrak{g}),M) \to (0)$$

D'après le lemme 2 et la proposition 1 de l'exposé 4, les groupes de cohomologie de $\mathfrak{g}$ dans le module $\mathcal{L}(U(\mathfrak{g}),M)$ sont nuls à l'exception du groupe de dimension 0 . Si l'on applique la suite exacte de cohomologie à la suite exacte (S') et qu'on tienne compte de ce résultat, on en déduit un homomorphisme canonique de $H^2(\mathfrak{g}, M)$ sur $H^1(\mathfrak{g},\mathcal{L}(U'(\mathfrak{g}),M))$ et d'après le théorème 1 de l'exposé 4, on établit une correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2(\mathfrak{g}, M)$ et les extensions de $U'(\mathfrak{g})$ par M .

Soit donc un $\mathfrak{g}$-module V extension de $U'(\mathfrak{g})$ par M et π la projection de V sur $U'(\mathfrak{g})$; $U'(\mathfrak{g})$ est évidemment une algèbre (sans unité) et un $\mathfrak{g}$-module est aussi un $U'(\mathfrak{g})$-module : on notera $u.v$ le transformé de $v \in V$ par $u \in U'(\mathfrak{g})$. On va alors définir une multiplication sur V par la formule $v_1 * v_2 = \pi(v_1).v_2$; comme $\pi(v_1) \in U'(\mathfrak{g})$ et que π est un $\mathfrak{g}$-homomorphisme, on a $\pi(v_1 * v_2) = \pi(\pi(v_1).v_2) = \pi(v_1)\,\pi(v_2)$ donc π est un homomorphisme d'algèbre de V dans $U'(\mathfrak{g})$, et de plus la multiplication dans V est associative car $v_1 * (v_2 * v_3) = \pi(v_1)\,\pi(v_2).v_3$ $= \pi(v_1 * v_2).v_3 = (v_1 * v_2) * v_3$. Enfin il est clair sur la définition que $m * v = 0$ si $m \in M$.

Soit $\mathfrak{h} \subset V$ l'image réciproque dans V de $\mathfrak{g} \subset U'(\mathfrak{g})$; comme $\mathfrak{g}$ est fermé pour l'opération $[a,b] = ab - ba$, il en est de même de $\mathfrak{h}$ qui devient une algèbre de Lie pour cette opération. π est un homomorphisme de V dans $U'(\mathfrak{g})$ et sa restriction π' à $\mathfrak{h}$ sera donc un homomorphisme d'algèbre de Lie ; le noyau de π' est évidemment M et on a défini une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par M . Enfin si $m \in M$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a $[h,m] = -m*h + h*m = \pi'(h).m$ ce qui prouve que M est un idéal abélien de $\mathfrak{h}$ et que la représentation adjointe induit dans M la structure de $\mathfrak{g}$-module donnée.

Donc à toute 2-classe de cohomologie, on a fait correspondre une algèbre de Lie extension de $\mathfrak{g}$ par l'idéal abélien M , la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ induisant la structure de $\mathfrak{g}$-module donnée dans M .

Nous allons maintenant démontrer qu'on obtient ainsi toute extension de $\mathfrak{g}$ par M une fois et une seule (à une équivalence près). Pour cela remarquons que V est une algèbre associative sans unité contenant $\mathfrak{h}$, donc que l'injection de $\mathfrak{h}$ dans V se prolonge en un homomorphisme bien défini de $U'(\mathfrak{h})$ dans V ; la formule $m*v = 0$ montre que cet homomorphisme s'annule sur $MU'(\mathfrak{h})$ qui est évidemment un idéal à droite de $U'(\mathfrak{h})$ mais qui est aussi un idéal à gauche car M est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (cf. exp. 1 et 8). Comme $U'(\mathfrak{g})$ est engendrée comme algèbre par $\mathfrak{g}$, V est engendrée par $\mathfrak{h}$, ce qui montre que nous avons défini un homomorphisme de l'algèbre $U'(\mathfrak{h})/MU'(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h})$ <u>sur</u> V . D'autre part la représentation régulière gauche de $\mathfrak{h}$ dans $U'(\mathfrak{h})$ définit $U'(\mathfrak{h})$ comme $\mathfrak{h}$-module donc $E(\mathfrak{h})$ comme $\mathfrak{h}/M$-module , i.e. comme $\mathfrak{g}$-module ; en vertu de la formule $h*v = \pi(h).v$, l'application de $E(\mathfrak{h})$ dans V est un $\mathfrak{g}$-homomorphisme ; il en est de même de l'application de $E(\mathfrak{h})$ sur $U'(\mathfrak{g})$ déduite de l'homomorphisme canonique de $U'(\mathfrak{h})$ dans $U'(\mathfrak{g})$ par passage au quotient mod. $MU'(\mathfrak{h})$ car les homomorphismes en question sont des homomorphismes d'algèbre et on a affaire aux représentations régulières. Enfin l'application identique de M dans $\mathfrak{h}$ se prolonge en une application de M dans $U'(\mathfrak{h})$ puis en une application de M dans $E(\mathfrak{h})$ qui est un $\mathfrak{g}$-homomorphisme car $\pi(h).m = [h,m] = hm - mh = hm \bmod MU'(\mathfrak{h})$.

Autrement dit on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & E(\mathfrak{h}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & & U'(\mathfrak{g}) \\ & V \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

qui démontre que l'extension de $U'(\mathfrak{g})$ par M est bien-définie par $\mathfrak{h}$

puisqu'elle est équivalente à l'extension $E(\mathfrak{h})$.

Partons maintenant d'une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par M . On peut construire $E(\mathfrak{h}) = U'(\mathfrak{h})/MU'(\mathfrak{h})$, le munir d'une structure de $\mathfrak{g}$-module et définir des homomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules de M dans $E(\mathfrak{h})$ et de $E(\mathfrak{h})$ sur $U'(\mathfrak{g})$ respectivement en procédant comme plus haut. Reste à voir que la suite :

(S") $$(0) \longrightarrow M \longrightarrow E(\mathfrak{h}) \longrightarrow U'(\mathfrak{g}) \longrightarrow (0)$$

est exacte ou encore puisque d'après l'exposé 1 , $U'(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $U'(\mathfrak{h})/MU(\mathfrak{h})$ et $MU(\mathfrak{h}) = M + MU'(\mathfrak{h})$ que l'intersection de M et de $MU'(\mathfrak{h})$ est réduite à (0). C'est ce qui va résulter du théorème de Birkhoff-Witt :

Soit $m_1 , m_2 , \dots , m_r , n_1 , \dots , n_s$ une base de $\mathfrak{h}$, les m_i formant une base de M . D'après le théorème de Birkhoff-Witt les monômes $M(\alpha , \beta) = m_1^{\alpha_1} \dots m_r^{\alpha_r} \; n_1^{\beta_1} \dots n_s^{\beta_s}$ forment une base de $U(\mathfrak{h})$ pour tous les systèmes $\alpha = (\alpha_i)$ $\beta = (\beta_j)$. $U'(\mathfrak{h})$ a pour base les $M(\alpha,\beta)$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0 , 0)$; par ailleurs M est une algèbre abélienne, donc si $\varepsilon_i = (0 , 0 , \dots , 1 , \dots , 0)$ (un seul 1 à la i-ième place), on a $m_i M(\alpha , \beta) = m_1^{\alpha_1} \dots m_i^{\alpha_i+1} \dots m_r^{\alpha_r} n_1^{\beta_1} \dots n_s^{\beta_s} = M(\alpha + \varepsilon_i , \beta)$ et il en résulte que $MU'(\mathfrak{h})$ a pour base les $M(\alpha,\beta)$ avec $\alpha \neq 0$ et de plus $\alpha \neq \varepsilon_i$ si $\beta = 0$. Comme M a pour base les $M(\varepsilon_i , 0)$, il est bien clair que M et $MU'(\mathfrak{h})$ ont une intersection réduite à (0) .

On a donc retrouvé la <u>correspondance entre les éléments de</u> $H^2(\mathfrak{g}, M)$ <u>et les classes d'extension équivalentes de</u> $\mathfrak{g}$ <u>par</u> M .

N.B. Rien n'affirme a priori que la correspondance qu'on vient d'établir soit la même que celle qui est établie dans l'exposé 5 , ce qui est pourtant exact au signe près.