A. BLANCHARD

Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 2, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A4_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55.
-:-:-:-

Exposé n° 2

ALGÈBRES de LIE NILPOTENTES et RÉSOLUBLES.

(Exposé de A. Blanchard, le 16 novembre 1954)

Conventions, notations.

Tous les espaces vectoriels considérés seront essentiellement de dimension finie sur le corps de base K ; K sera quelconque dans le I, mais de caractéristique 0 et algèbriquement clos dans le II.

θ désignera une représentation linéaire $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie de corps de base K, dans V. On posera $\theta(x) = X$, $\theta(y) = Y, \ldots$. Un vecteur v de V sera dit annulé par $\mathfrak{g}$, si $\theta(x).v = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

I. Représentations nilpotentes. Algèbres de Lie nilpotentes.

Définition 1.- Une représentation linéaire θ de $\mathfrak{g}$ dans V est nilpotente si, quel que soit $x \in \mathfrak{g}$, $\theta(x)$ est nilpotent (i.e. il existe p, entier positif, tel que $(\theta(x))^p = 0$.

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède une représentation nilpotente fidèle, alors sa représentation adjointe est nilpotente. En effet, cette représentation adjointe peut être définie à l'aide de θ par $\mathrm{ad}(X).Y = XY - YX$. Alors : $(\mathrm{ad}(X))^n = \sum_0^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} X^p Y X^{n-p}$. Donc, si $X^q = 0$, $(\mathrm{ad}(X))^{2q} = 0$.

Définition 2.- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite nilpotente si sa représentation adjointe est nilpotente.

Il est clair sur cette définition que toute sous-algèbre et toute algèbre quotient d'une algèbre nilpotente sont aussi nilpotentes. De plus si $\mathfrak{h}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit nilpotente $\mathfrak{g}$ est nilpotente : en effet, soit $x, y \in \mathfrak{g}$ $\bar{x}\ \bar{y}$ leurs classes mod $\mathfrak{h}$. On a pour un certain entier $p > 0$ $\mathrm{ad}^p\ \bar{x}.\bar{y} = 0$ d'où $z = \mathrm{ad}^p\ x.y \in \mathfrak{h}$ mais alors comme $z \in \mathfrak{h}$ est dans le centre

$ad^{p+1} x.y = [x,z] = 0$. Il en résulte que ad x est nilpotent.

Cette définition ne préjuge pas que $\mathfrak{g}$ admette des représentations nilpotentes fidèles. De plus, une algèbre de Lie nilpotente possède des représentations qui ne sont pas nilpotentes. Nous allons étudier la structure d'une algèbre de Lie nilpotente à l'aide du :

Théorème 1 (Engel).- Si θ est une représentation nilpotente de $\mathfrak{g}$ dans $V \neq \{0\}$ il existe un vecteur non nul de V annulé par $\mathfrak{g}$.

On n'a pas supposé la représentation fidèle, mais on peut s'y ramener en considérant $\mathfrak{g}/n = \mathfrak{g}'$ (n noyau de la représentation). Alors la représentation adjointe de $\mathfrak{g}'$ est nilpotente et θ définit par passage au quotient une représentation de $\mathfrak{g}'$.

Démonstration.

a) Le théorème est évident si $\dim \mathfrak{g}' = 1$. En effet soit X tel que $X^p = 0$; $\dim(X^p.V) < \dim V$ entraîne $\dim X.V < \dim V$ et le noyau de X n'est donc pas nul. Nous démontrerons le théorème par récurrence avec l'hypothèse de récurrence suivante : pour toute vraie sous-algèbre $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{g}'$ et toute représentation nilpotente de $\mathfrak{K}$ dans S , il existe $s \in S$ annulé par $\mathfrak{K}$.

b) $\mathfrak{g}'$ admet un idéal $\mathfrak{h}$ de codimension 1. Soit $\mathfrak{b}$ une vraie sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (de dimension 1 par exemple) ; on va déterminer $\mathfrak{c}$ telle que : $\dim \mathfrak{c} = \dim \mathfrak{b} + 1$ et $\mathfrak{b}$ est idéal dans $\mathfrak{c}$; on en déduira b) au bout d'un nombre fini de constructions analogues puisque $\dim \mathfrak{g}' < +\infty$. A cet effet, considérons la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}'$. $\mathfrak{b}$ est stable pour cette représentation car c'est une sous-algèbre ; on en déduit une représentation ψ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}$; cette représentation est nilpotente, d'où (hypothèse de récurrence) l'existence de $u \in \mathfrak{g}'/\mathfrak{b}$, annulé par $\mathfrak{b}$. Il existe par suite dans $\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}$ un sous-espace U de dimension 1 annulé par $\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{c}$ l'image inverse de U . On a $\dim \mathfrak{c} = \dim \mathfrak{b} + 1$ et si $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{c}$: $[b,c] \in \mathfrak{b}$ par définition de $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{c}$ est donc un idéal dans $\mathfrak{b}$ qui répond à la question.

c) $\mathfrak{g}'$ est engendré par $\mathfrak{h}$ et $y \in \complement \mathfrak{h}$. Soit W le sous-espace des vecteurs de V annulés par $\mathfrak{h}$: $\dim W > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. W est stable par $\mathfrak{g}'$. En effet si $x \in \mathfrak{g}'$ et $a \in \mathfrak{h}$ $[x_0\, a] \in \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal. Alors pour tout $V \in W$ on a

$$\theta(a)\, \theta(x) v = \theta(x)\, \theta(a)\, v + \theta([a,x])\, v = 0$$

puisque $\theta(a).v = 0$ $\theta([a,x]).v = 0$. Donc $\theta(x).v$ est annulé par tous les $\theta(a)$ et il est donc dans W. Si l'on prend alors dans W un vecteur v_0 annulé par $\theta(y)$ (ce qui est possible puisque $\theta(y)$ est nilpotent et laisse W stable), v_0 sera annulé par $\mathfrak{g}$.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1</u>. - <u>Le centre $\mathfrak{c}$ d'une algèbre nilpotente n'est pas réduit à zéro</u>.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 1 à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$; un élément annulé par $\mathfrak{g}$ est un élément du centre $\mathfrak{g}$.

Mais $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est nilpotente, d'où, de proche en proche :

<u>Corollaire 2</u>. - <u>Une algèbre de Lie nilpotente peut s'obtenir par extensions centrales à partir de l'algèbre à zéro dimensions. En particulier, elle est résoluble</u>.

Soit W_0 le sous-espace des vecteurs annulés par $\mathfrak{g}$. Si $W_0 \neq V$ définissons $V_1 = V/W_0$. Soit W_1' le sous-espace de V_1 formé des vecteurs annulés par $\mathfrak{g}$ et W_1 l'image réciproque de W_1' dans V . Il est clair que W_1 est invariant. Si donc $W_1 \neq V$ on pose $V_2 = V/W_1$ et W_2' est le sous-espace des vecteurs de V_2 annulés par $\mathfrak{g}$, etc ... Il revient au même de dire que W_{i+1} est défini comme le sous-espace des vecteurs $v \in V$ tels que $\theta(x).v \in W_i$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. En vertu du théorème d'Engel, si $W_i \neq V$, $W_i \neq W_{i+1}$ et au bout d'un nombre fini de pas on s'arrête. On a donc une suite $\{W_i\} (0 \leq i \leq p)$ de sous-espaces tels que $\theta(x).W_{i+1} \subset W_i$. Mais $\theta(x_1) \ldots \theta(x_{p+1}) W_p = \{0\}$ donc le produit de $q = p+1$ opérateurs $\theta(x_k)$ est nul.

<u>Corollaire 3</u>. - Si tous les $\theta(x)$ sont nilpotents, il existe un entier q tel que le produit de q opérateurs $\theta(x)$ soit nul.

Appliquons ceci à la suite centrale descendante $\mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}$: comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_{n+1}$ et que le produit de q opérateurs $\operatorname{ad} x$ est nul, il en résulte que $\mathfrak{g}_{q+1} = 0$. Réciproquement si $\mathfrak{g}_{q+1} = 0$ $\operatorname{ad}^q x = 0$ donc :

<u>Corollaire 4</u>. - Pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, il faut et il suffit que la série centrale descendante se termine par $\{0\}$.

Enfin en choisissant une base adaptée à la suite ascendante des W_i on voit que les $\theta(x)$ sont représentés par des matrices X_{ij} avec $X_{ij} = 0$ si $i \geq j$.

II. Algèbres de Lie résolubles.

Définition 3.- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si la suite $\mathfrak{g}^{(n)}$ de ses algèbres dérivées successives se termine par l'algèbre réduite à zéro.

Définition 3'.- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si elle admet une suite de composition à quotients abéliens.

Il est immédiat que ces deux définitions sont équivalentes. Il est évident que toute sous-algèbre et toute algèbre quotient d'une algèbre résoluble sont résolubles. On notera $\mathfrak{g}^{(p)}$ l'algèbre de Lie dérivée $p^{\text{ème}}$ de $\mathfrak{g}$. Nous allons étudier la structure d'une algèbre résoluble à l'aide du :

Théorème 2(Lie).- Toute représentation θ irréductible d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ résoluble, dans un espace vectoriel V sur un corps K de caractéristique nulle et algèbriquement clos, est de dimension 1.

a) Il revient au même de montrer que, pour une telle représentation, il existe un vecteur de V qui est propre pour tous les opérateurs de θ. Le théorème est donc vrai pour $\dim \mathfrak{g} = 1$ car K est algèbriquement clos. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en utilisant un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, de codimension 1 ; un tel idéal existe, car toute sous-algèbre contenant $\mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathfrak{g}$ (inclusion stricte puisque $\mathfrak{g}$ est résoluble) est un idéal ; un hyperplan contenant $\mathfrak{g}^{(2)}$ répond donc à la question.

b) Soit $y_0 \notin \mathfrak{h}$, c'est-à-dire que y_0 et $\mathfrak{h}$ engendrent $\mathfrak{g}$. Posons $Y_0 = \theta(y_0)$ et soit, grâce à l'hypothèse de récurrence, $v_0 \in V$ tel que $Xv_0 = \lambda(X)\, v_0$ pour tout $X \in \theta(\mathfrak{h})$; $\lambda(x)$ est une forme linéaire sur $\theta(\mathfrak{h})$. Posons aussi $Y_0^n . v_0 = v_n$; puisque $\dim V < +\infty$, il existe p tel que $v_0, v_1, \ldots, v_p$ soient linéairement indépendants, mais non $v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}$.

Le sous-espace W engendré par les v_n est stable pour Y_0. Montrons par récurrence sur q que l'on a

$$(1) \qquad X v_q \equiv \lambda(X) v_q \quad (\text{mod. } v_0\ v_1 \ldots v_{q-1})$$

En effet on a $Xv_0 = \lambda(X)\, v_0$ et si (1) est vraie pour q,

$$X v_{q+1} = X Y_0 v_q = [X, Y_0]\, v_q + Y_0 X v_q$$
$$\equiv \lambda([X,Y_0])v_q + Y_0 \lambda(X) v_q \quad (\text{mod } v_0 \ldots v_{q-1},\ Y_0 v_0 \ldots Y_0 v_{q-1})$$

soit

$$Xv_{q+1} \equiv \lambda(X)v_{q+1} \pmod{v_0 \dots v_q}$$

Donc W est stable pour $\theta(\mathfrak{h})$; comme il l'est pour Y_0 , il l'est pour $\theta(\mathfrak{g})$.

c) W étant stable par $\theta(\mathfrak{g})$, on peut définir la trace de $X \in \theta(\mathfrak{g})$ sur W , soit $Tr_W(X)$. Les formules (1) entraînent $Tr_W(X) = \lambda(X).\dim W$. D'autre part, si $Z = ST - TS$, $Tr_W(Z) = 0$; nous avons supposé K de caractéristique nulle, on a donc $\lambda(Z) = 0$ si $Z \in \theta(\mathfrak{g}^{(2)})$. Refaisant le même calcul qu'en b) on démontre par récurrence que

$$Xv_q = \lambda(X)\, v_q$$

ceci est vrai pour $q = 0$. Puis

$$\begin{aligned} Xv_{q+1} = X\, Y_0\, v_q &= [X,Y_0]\, v_q + Y_0\, Xv_q \\ &= \lambda([X,Y_0])\, v_q + Y_0\, \lambda(X)\, v_q \\ &= \lambda(X)\, v_{q+1} \end{aligned}$$

puisque λ s'annule sur $\theta(\mathfrak{g}^{(2)})$.

Tous les vecteurs de W sont des vecteurs propres pour $\theta(\mathfrak{h})$. Il existe $w \in W$ qui est propre pour Y_0 ; w est propre pour $\theta(\mathfrak{g})$ ceci démontre le théorème.

<u>Corollaire</u>.- <u>Pour que $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}^{(2)}$ soit nilpotente</u>. (K <u>vérifiant toujours les hypothèses du théorème 2</u>) .

La suffisance découle du corollaire 2 du théorème 1 . Pour une représentation θ quelconque de $\mathfrak{g}$, la démonstration du théorème 2 a montré que W est annulé par $\theta(\mathfrak{g}^{(2)})$; en passant successivement aux quotients comme dans la démonstration du corollaire 3 , on voit que θ est nilpotente dans V pour $Z\,\mathfrak{g}^{(2)}$. D'où le corollaire en prenant pour θ la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

<u>Structure des matrices représentant une algèbre résoluble</u>.

Le corps K satisfait toujours les hypothèses du théorème 2 . Les formules (2) et la définition des v_i montrent que θ , sur W , a la forme : $X_{ij} = 0$ pour $i > j$, $X_{ii} = \lambda(X)$. Par passages aux quotients, on obtient pour $\theta(x) = X$, $x \in \mathfrak{g}$, les conditions :

$$\begin{aligned} &X_{ij} = 0 \quad \text{pour } i > j \\ &X_{ii} = \lambda_K(X) \text{ pour } p_K \leq i < p_{K+1} \\ &X_{ij} \text{ quelconque pour } i < j . \end{aligned}$$

Appendice. Démonstration globale du théorème 2 .

Soit G un groupe connexe opérant dans V , espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. D^pG désignera le $p^{\text{ième}}$ groupe dérivé de G ; DG est le groupe des commutateurs de G , i.e. le sous-groupe engendré par les $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ quand x et y parcourent G . G connexe entraîne DG connexe (car l'ensemble S des commutateurs est connexe : tout d'abord, $G \times G$ est connexe et l'application $(x,y) \dashrightarrow xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ continue. Ensuite si S_n est l'ensemble des produits de n éléments de S il est connexe comme image de G^n par $(x_1 --- x_n) \dashrightarrow x_1\,x_2 \dots x_n$. Enfin $e \in S_n$ pour tout n et S est la réunion des S_n donc S est connexe). S'il existe un entier p tel que $D^pG = \{e\}$ G est dit résoluble et p s'appelle la hauteur de G . Si G est de hauteur 0 c'est-à-dire réduit à $\{e\}$ le théorème est vrai. Raisonnons par récurrence sur la hauteur de p autrement dit supposons qu'il existe $v \in V$ tel que $h.v = \chi(h).v$ pour tout $h \in DG$; $\chi(h)$ est alors un caractère de DG . Soit V_χ l'espace des v tels que $h.v = \chi(h).v$. On a, si $v \in V_\chi$ et $g \in G$, en posant $w = g.v$: $hw = hgw = g(g^{-1}hg).v = g(\chi(g^{-1}hg)).v = \chi(g^{-1}hg).w$ ce qui peut s'écrire $g.V_\chi = V_{\chi_g}$ Les caractères intervenant sont en nombre fini, χ_g dépend continûment de g et G est connexe, donc $g.V_\chi = V_\chi$. Comme la représentation est irréductible $V = V_\chi$ et donc DG n'agit que par homothètie ; on a $\det(h) = \chi(h)^n$ (n , dimension de V) et , puisque $h \in DG$, $\det(h) = 1$. $\chi(h)$ est donc une racine de l'unité qui ne peut être que 1 , DG étant connexe, tout $v \in V$ étant invariant par DG , on en déduit une représentation de G/DG dans V , or G/DG est de hauteur 1 , c'est-à-dire abélien et le théorème est vrai dans ce cas.

C.Q.F.D.