Séminaire "Sophus Lie"

J. P. Serre

Tores maximaux des groupes de Lie compacts

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 23, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A25_0>

Exposé n° 23

TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE COMPACTS.

(Exposé de J.F. SERRE, le 31.5.55)

1.- Le théorème de conjugaison.-

Soit G un groupe de Lie compact connexe, et A un sous-groupe abélien connexe de G (il en existe, par exemple les sous groupes à un paramètre). Son adhérence $\bar{A}$ est aussi un sous-groupe abélien connexe, et de plus c'est un groupe de Lie : étant compact, c'est un tore. S'il n'est contenu dans aucun tore plus grand, on dit que c'est un tore maximal. Soit A un tore maximal de G ; son algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une sous-algèbre abélienne maximale τ de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{a}$ et $\neq \mathfrak{a}$. Le sous-groupe T correspondant à τ serait un sous-groupe abélien connexe de G, contenant A, et dont l'adhérence serait identique à A. Donc $T = A$ et $\tau = \mathfrak{a}$. Inversement le même raisonnement montre que toute sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ correspond à un tore maximal (et engendre donc un sous groupe fermé). G étant compact, la représentation adjointe de G est semi-simple, donc $\mathfrak{g}$ est produit direct (au sens de sa structure d'algèbre de Lie) d'algèbres simples et d'algèbres abéliennes ; en regroupant ces dernières entre elles, on voit qu'on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} * \mathfrak{g}'$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{g}'$ est semi-simple compacte (en effet, le groupe G étant compact, la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}'$ laisse invariante une forme quadratique f définie positive ; on peut donc trouver une base de $\mathfrak{g}'$ par rapport à laquelle les matrices des $\operatorname{ad} g$ soient orthogonales et comme l'algèbre de Lie du groupe orthogonal se compose des matrices antisymétriques, pour $x \neq 0$ dans $\mathfrak{g}'$, $\operatorname{ad} x$ est représenté par la matrice $\|a_{ij}\|$ avec $a_{ji} = -a_{ij}$. Donc $B(x,x) = \operatorname{Tr}((\operatorname{ad} x)^2) = \sum_{i,j} a_{ij}\, a_{ji} = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 < 0$ ce qui montre que la forme de Killing de $\mathfrak{g}'$ est définie négative). Il en résulte qu'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre de Cartan : en effet, c'est d'abord une sous-algèbre contenant $\mathfrak{z}$, et il suffit de regarder sa composante dans $\mathfrak{g}'$; alors le critère de l'exposé 11, p.11 s'applique, la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ étant semi-simple puisque G est compact. Toutes les sous algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{g}$ ont donc même dimension r = rang de G , et sont conjuguées dans $\mathfrak{g} \otimes C$. En fait on va voir qu'elles sont conjuguées dans $\mathfrak{g}$.

Dans la suite, G sera supposé connexe et T désignera un tore maximal donné de G .

Théorème 1 : Soit T un tore maximal de G . Alors, si G est connexe, tout élément de G est contenu dans un gTg^{-1} , $g \in G$.

Avant de démontrer ce théorème, donnons d'abord quelques conséquences.

Corollaire 1 : Tout x de G appartient à un sous-groupe à un paramètre de G (car c'est évident dans un tore).

Corollaire 2 : Tout sous-groupe abélien connexe A de G est contenu dans un tore maximal, conjugué de T .

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où A est un tore (remplacer A par $\bar{A}$ qui est un tore). Dans ce cas, on sait qu'il existe un élément x dans A tels que les x^n soient partout denses dans A (Kronecker) : nous dirons que x engendre A . Si donc $x \in gTg^{-1}$, les x^n aussi, l'adhérence de l'ensemble des x^n aussi ; bref $A \subset gTg^{-1}$.

Corollaire 3 : Deux tores maximaux sont conjugués.

Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à un tore maximal T' et de remarquer que le conjugué d'un tore est un tore.

On remarquera d'ailleurs que les corollaires 1 et 3 entraînent le théorème 1 auquel leur conjonction est donc équivalente.

2.- La démonstration de A.Weil du théorème de conjugaison.

Soit V une variété compacte de dimension n et f une application de V en elle-même. La topologie algébrique permet d'attacher à f un nombre L(f) dit nombre de Lefschetz qui jouit des propriétés suivantes (cf Alexandroff-Hopf pour ce qui suit) :

a) si f et g sont homotopes, L(f) = L(g) .

b) si $L(f) \neq 0$, f a au moins un point fixe.

c) si f n'a que des points fixes isolés a_i , on peut attacher à chacun des a_i un nombre k_i "son indice" tel que $L(f) = (-1)^n \sum k_i$

d) si a est un point fixe isolé de f , si f est différentiable en a et que l'application linéaire tangente df en $\underline{a}$ n'a pas de valeur propre égale à 1 , l'indice de $\underline{a}$ est égal au signe de $\det(df - I)$.

Nous allons prendre pour V l'espace homogène à gauche G/T et pour f la transformation $p(x)$ associée à l'élément x de G ; les éléments de G/T sont les classes $\bar{a} = aT$ et $p(x)\bar{a} = \overline{(xa)} = xaT$ et les points fixes de $p(x)$ sont donc les classes aT telles que $xaT = aT$ soit $x \in aTa^{-1}$. Si donc $p(x)$ a un point fixe $\bar{a}$, x est dans le tore aTa^{-1} conjugué de T ; pour démontrer l'existence d'un point fixe, il suffit d'après b) de démontrer que $L(p(x)) \neq 0$. On peut alors remarquer que G étant connexe par arcs, $p(x)$ est homotope à toute transformation $p(y)$ et que $L(p(x)) = L(p(y))$ et il va nous suffire de calculer $L(p(y))$ pour un y particulier dans G .

Nous prendrons pour y un <u>générateur</u> de T (cf. démonstration du cor. 2) ; si $\bar{a}$ est un point fixe de $p(y)$, on a $y \in aTa^{-1}$ donc $T \subset aTa^{-1}$ et comme T est un tore maximal $T = aTa^{-1}$ ce qui signifie par définition que a appartient au normalisateur N de T dans G . Faisons opérer N dans T par les automorphismes intérieurs $t^n = ntn^{-1} (t \in T , n \in N)$; le groupe des automorphismes de T est discret car il est isomorphe au groupe des matrices inversibles à coefficients entiers, donc l'homomorphisme de N dans le groupe des automorphismes de T est constant sur la composante connexe N^0 de N . N est fermé, donc N^0 est un groupe de Lie ; dire que N^0 agit trivialement sur T signifie que T qui est contenu dans N^0 commute à N^0 ; si N^0 était différent de T , on pourrait trouver un sous-groupe à un paramètre de N^0 qui engendrerait avec T un tore plus grand que T donc ceci est absurde et $T = N^0$. Par suite N/T est discret et compact donc fini ce qui prouve que les points fixes de $p(y)$ sont isolés et en nombre fini égal à l'ordre de $\Phi = N/T$.

Reste à calculer l'indice d'un point fixe de $p(y)$. Soit $n \in N$, pour que $p(g)\bar{n} = \bar{n}$, il faut et il suffit que $g \in nTn^{-1} = T$, donc T est le stabilisateur de $\bar{n}$ donc si $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de T , l'espace tangent en $\bar{n}$ à G/T s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ et la transformation linéaire tangente M correspondant à $p(y)$ à l'opérateur déduit de $\operatorname{ad} y$ par passage au quotient. Soit f une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{g}$ invariante par le groupe adjoint et $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{t}$ pour f ; $\operatorname{ad} y$ conserve la forme f et laisse invariant le sous-espace $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$; donc aussi le sous-espace $\mathfrak{p}$ et l'on peut identifier $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ M devenant

alors la restriction de ad y à $\mathfrak{p}$. Or ad y n'a pas de valeur propre égale à 1 dans $\mathfrak{p}$, car ceci signifierait qu'il existe $X \in \mathfrak{p}$ avec ad $y.X = X$, d'où ad $t.X = X$ pour $t \in T$ puisque y engendre T et finalement X commuterait à $\mathfrak{t}$, ce qui contredirait le fait que $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. Par suite les valeurs propres de ad y dans $\mathfrak{p}$ sont -1 avec la multiplicité α et des couples de racines conjuguées $\lambda_i \; \bar{\lambda}_i$ d'où $\det(M - I) =$
$(-1)^n \det(I - M) = 2^{\alpha} \prod_i (1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda}_i)(-1)^n$ qui a le signe de $(-1)^n$; il en résulte que $L(p(y)) = (-1)^n \sum k_i$ est égal à l'ordre du groupe $\Phi = N/T$ puisque les points fixes de $p(y)$ sont les classes nT.

C.Q.F.D.

Remarque. $p(x)$ étant homotope à l'identité, nous avons au fond démontré que la caractéristique d'Euler-Poincaré de G/T était égale à $[\Phi]$, et il nous suffisait de savoir qu'elle était différente de 0, ce qui résulte du fait que les nombres de Betti de G/T sont nuls en dimension impaires (ce dernier fait se prouve par récurrence sur dim.G en utilisant la théorie des espaces symétriques, -cf. thèse de A.Borel, lemme 26-1,- ou en utilisant une décomposition cellulaire analytique de G/T).On peut encore montrer que cette caractéristique est > 0 par un raisonnement de géométrie différentielle (courbure).

3.- Autres démonstrations.

a) On en trouvera une dans Chevalley, t.III, utilisant sa caractérisation des sous-groupes de Cartan.

b) Comme tous les conjugués de T par les éléments d'une même classe à gauche gN de G/N, sont égaux entre eux, introduisons le quotient P de $G \times T$ par la relation d'équivalence $(g,t) \sim (gn, n^{-1}tn)$ pour $n \in N$. P est un espace fibré de fibre T et de base G/N. Tout revient à montrer que l'application φ de P dans G déduite par passage au quotient de l'application $(g,t) \longrightarrow gtg^{-1}$ de $G \times T$ dans G applique P sur G. Comme P et G sont deux variétés compactes de même dimension (puisque N/T est fini), φ possède un degré homologique (mod.2) et il suffit de voir que ce degré est $\neq 0$. Or si x est un générateur de T, $x = gtg^{-1}$ équivaut à $g^{-1}xg \in T$, donc $g^{-1}Tg = T$, c'est-à-dire $g \in N$. Autrement dit, $\varphi^{-1}(x)$ est la classe dans P du point (e, x) de $G \times T$. Comme il suffit de voir que le degré local en ce point est $+1$, i.e. que φ est un homéomorphisme local au voisinage de ce point, ou que l'application linéaire tangente est un isomorphisme, (ce qui équivaut à dire qu'elle est surjective pour des raisons de dimension), on voit qu'il suffit de constater que tout vecteur tangent en x à G est image par l'application $(g\ ,\ t) \longrightarrow gtg^{-1}$ d'un vecteur tangent à $G \times T$. Si X est un vecteur tangent générique à G en e et Y un vecteur tangent générique à T en e , le vecteur $(X\ ,\ \delta_x * Y)$ est un vecteur tangent générique à $G \times T$ en $(\ e\ ,\ x\ )$; l'image de ce vecteur est $X * \delta_x + \delta_x * Y - \delta_x * X$ $= \delta_x * (\mathrm{ad}\ x^{-1}.X - X + Y)$. ad x^{-1} est une transformation orthogonale pour la forme quadratique f , donc $\mathfrak{g}$ est somme directe du sous-espace image de ad $x^{-1} - I$ et du sous-espace des invariants de ad x^{-1} qui n'est autre que $\mathfrak{t}$ puisque tout ce qui commute à x est dans T .

c) Si on veut seulement prouver le corollaire 1, on procède ainsi. Munissons G d'une structure d'espace de Riemann biinvariante. Une symétrie par rapport à un point a (i.e. la transformation $x \longrightarrow ax^{-1}a$) est un automorphisme de la structure Riemannienne, et deux points symétriques par rapport à a (et suffisamment voisins de a) sont sur une géodésique passant par a . Prenons 2 points a et b sur un même sous-groupe à un paramètre, b étant équidistant de a et de l'origine e ; la symétrie par rapport à b conserve le sous-groupe, donc échange e et a : b se trouve sur la géodésique passant par e et a , et de même tous les points du sous-groupe qui divisent $\overline{e.a}$ dans le rapport $q/(2^n)$. Donc cette géodésique est confondue avec le sous-groupe à un paramètre. Donc toutes les géodésiques sont des translatées des sous-groupes à un paramètre ; or il y a une géodésique joignant e et x quelconque de G (Hilbert) ; donc tout point se trouve sur un sous-groupe à un paramètre, donc dans un tore maximal.

4.- Compléments au théorème 1.

Théorème 2 : Soit G *compact connexe,* T *un tore maximal de* G , M *un sous-ensemble quelconque de* T , *et soit* $g \in G$ *tel que* $gMg^{-1} \subset T$. *Alors il existe un* $n \in N$ *tel que* $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ *pour tout* m *dans* M .

Corollaire : Si deux éléments de T *sont conjugués, ils sont transformés l'un de l'autre par un élément* $\sigma \in \Phi = N/T$.

(Il suffit de prendre pour M l'un de ces éléments).

En d'autres termes, soit $\mathcal{C}$ l'espace des classes d'éléments conjugués, et soit Ω le quotient de T par la relation d'équivalence définie par Φ . On a alors $\Phi \simeq \mathcal{C}$. En particulier, l'espace des fonctions continues

<u>centrales</u> sur G est <u>identique</u> (par restriction) à l'espace des <u>fonctions</u> <u>continues sur</u> T, <u>invariantes par</u> Φ. En particulier, il y a une mesure unique ν sur T, invariante par Φ, et telle que l'on ait $\int_G \varphi(x)\, dx = \int_T \varphi(t)\, d\nu(t)$ (dx mesure de Haar de G) (La détermination explicite de $d\nu$ est importante pour la théorie des caractères, cf. exp. 21).

<u>Démonstration du théorème 2</u>. Soit G' le sous-groupe de G formé des éléments qui commutent à M (i.e. tels que $gm = mg$ pour tout m de M), G'' sa composante connexe de l'élément neutre. G'' est un groupe de Lie compact, connexe, contenant T ; si $x \in g^{-1}Tg$, $(x = g^{-1}tg)$ on a $xm = mx$ car gmg^{-1} commute à t $(m \in M)$. Donc G'' contient T et $T' = g^{-1}Tg$, qui sont des tores maximaux de G et a fortiori de G'', et qui par suite sont conjugués <u>dans</u> G'' qui est connexe : il existe donc $g'' \in G''$ avec $g''g^{-1}Tgg''^{-1} = T$; $gg''^{-1} = n \in N$, et $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ car $g'' \in G'$ et commute à m, c.q.f.d.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> A <u>un tore quelconque, et</u> $x \in G$ <u>connexe, commutant à</u> A. <u>Alors il y a un tore maximal</u> T <u>contenant</u> A <u>et</u> x.

En effet, soit A' l'adhérence du sous-groupe engendré par A et x. A' est compact et abélien. Soit A'_0 sa composante connexe de l'élément neutre (qui est un tore). On sait que $A' \approx A'_0 \oplus$ un groupe abélien fini. On en conclut que x est dans un sous-groupe A'' de A' du type $A'_0 \oplus$ sous-groupe cyclique, soit $A'' = A'_0 \oplus Z_n$. Mais un tel groupe est topologiquement monogène (i.e. a un élément dont les puissances sont partout denses) : il suffit de prendre un générateur θ de A'_0, un générateur z de Z_n, de choisir un $y \in A'_0$ tel que $ny = \theta$ (notation additive), et de considérer l'élément (y,z). D'après le corollaire 1 du th. 1, ce générateur est dans un tore maximal T, donc A'' aussi, et aussi x et A (puisque $A \subset A'_0$), cqfd.

<u>Corollaire 1</u> : Tout élément de G commutant avec un tore maximal T appartient à T.

<u>Corollaire 2</u> : Le centre de G est contenu dans tout tore maximal de G. (car le centre commute à tout tore maximal).

<u>Corollaire 3</u> : Le groupe $\Phi = N/T$ opère fidèlement sur T (car $n^{-1}tn = t$ pour tout $t \in T$ signifie que n commute à T, donc est dans t d'après le corollaire 1).

<u>Corollaire 4</u> : Un tore maximal est en même temps un sous-groupe abélien maximal.

<u>Corollaire 5</u> : Le commutant d'un tore est connexe.
(car ce commutant est réunion des tores maximaux de G contenant A).

<u>Corollaire 6</u> : Si G est semi-simple, $\Phi = N/T$ est isomorphe au groupe de Weyl de $\mathfrak{G}$.

D'après le corollaire 3, le groupe Φ est représenté fidèlement comme groupe d'automorphismes T par les automorphismes intérieurs. Si $\mathfrak{G}_C$ est l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}_C$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}_C$; soit $\mathfrak{J}'$ le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{G}_C$ induits par les automorphismes intérieurs de N , $\mathfrak{J}$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{G}_C$ induits par les éléments de Int $\mathfrak{G}_C$ qui conservent $\mathfrak{h}_C$ (cf. exp. 16) . Il est clair que $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$ et d'autre part d'après les résultats de l'exp. 16 , $\mathfrak{J}'$ contient les symétries S_α donc le groupe de Weyl $\mathfrak{S}$; comme on a vu à l'exp. 16 que $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}$ et qu'on vient de voir que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$, on a bien $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}'$.

Nous allons pour terminer montrer comment à l'aide de ces résultats on peut calculer le centre d'un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe G ; soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, T le tore correspondant, C le centre de G . D'après le corollaire 2 , $C \subset T$; d'autre part, tout caractère de T (i.e. tout homomorphisme de T dans le groupe des nombres complexes de module 1) s'obtient par restriction d'une représentation de dimension finie de G (T.L.G. prop.4 p.191) donc l'ensemble des caractères de T est identique à l'ensemble des poids des représentations de G . On sait par les exposés 17 et 21 que ces poids sont les caractères e^{λ} pour les formes linéaires λ sur $\mathfrak{h}_C$ qui vérifient $2 < \lambda , \alpha_i / < \alpha_i , \alpha_i >$ entier pour toute racine simple α_i . Le groupe des caractères de T est donc le groupe abélien discret ayant pour générateurs les e^{λ_i} où l'on rappelle que $2 < \lambda_i , \alpha_j > / < \alpha_j , \alpha_j > = \delta_{ij}$.

Les caractères de T constants sur C sont évidemment les poids des représentations de G constantes sur C ; or la représentation adjointe de G/C dans $\mathfrak{G}$ est fidèle donc d'après T.L.G. p.190 Prop.3 , toutes les représentations de G constantes sur C , i.e. les représentations de G/C s'obtiennent à partir de la représentation adjointe par produit tensoriel, somme directe, réduction, et passage à la contragrédiente, en particulier les poids de ces représentations sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines. Comme tout caractère de C se prolonge en un caractère de T , le groupe des caractères de C est isomorphe au quotient du groupe des caractères de T par le sous-groupe des caractères constants sur C , autrement dit au groupe quotient du groupe engendré par les e^{λ_i} par le sous-groupe engendré par les e^{α_i} . Or $\alpha_i = -\sum_j a_{ji} \lambda_j$ où les a_{ij} sont les entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ et adoptant une notation additive, on voit que le groupe des caractères de C (et donc aussi C qui lui est isomorphe) admet des générateurs m_i soumis aux seules relations $\sum_i a_{ij} m_i = 0$

Les entiers de Cartan sont déterminés par les schémas de Dynkin et en désignant par Z_n le groupe cyclique à n éléments, on a le tableau suivant :

Type	Groupe C
A_n	Z_{n+1}
B_n	Z_2
C_n	Z_2
D_{2n}	$Z_2 + Z_2$
D_{2n+1}	Z_4
E_6	Z_3
E_7	Z_2

les groupes C des autres types sont réduits à l'élément neutre.