P. Cartier

Théorie des caractères III. Caractères des groupes compacts

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 21, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A23_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 21

THÉORIE DES CARACTÈRES III.

CARACTÈRES DES GROUPES COMPACTS.

(Exposé de P. CARTIER, le 17.5.55)

1.- Produit de convolution des distributions.

Une distribution sur une variété indéfiniment différentiable orientable V est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(V)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact. On sait définir le support d'une telle distribution et prolonger de manière bien définie une distribution à support compact en une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{E}(V)$ des fonctions de classe C^∞ quelconques. Deux exemples de distributions à support compact sont les suivants : si $p \in V$, on pose $\langle f , \delta_p \rangle = f(p)$ pour $f \in \mathcal{E}(V)$; si X est un vecteur tangent en p à V, c'est par définition une forme linéaire sur $\mathcal{E}(V)$ vérifiant $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$; δ_p et X ont leur support réduit au point p.

Soient V_1, V_2 et W trois variétés de classe C^∞ et φ une application de classe C^∞ de $V_1 \times V_2$ dans W ; si T_1 et T_2 sont des distributions à support compact situées respectivement sur V_1 et V_2, on définit une distribution $S = T_1 * T_2$ sur W appelée produit de convolution des T_i par la formule :

$$(1) \qquad \int f(w) \, dS(w) = \iint f(\varphi(v_1 , v_2)) \, dT_1(v_1) \, dT_2(v_2)$$

On voit tout de suite que δ_{v_1} et δ_{v_2} ont $\delta_{\varphi(v_1 , v_2)}$ pour produit de convolution et que la convolution de X (vecteur tangent) et de δ_{v_2} est le vecteur tangent à W image de X par l'application $v_1 \longrightarrow \varphi(v_1 , v_2)$ de V_1 dans W.

Une forme linéaire continue C sur l'espace des formes différentielles extérieures de degré p s'appelle un courant de dimension p ; on peut alors comme plus haut définir le produit de convolution des courants, $C_1 * C_2$ étant de dimension $p_1 + p_2$ si C_i est de dimension p_i ; une fonction f de classe C^∞ définit un courant de dimension n égale à la dimension de V par $\langle f , \omega \rangle = \int f \omega$ donc on peut définir le produit de convolution d'une fonction f de classe C^∞ sur V_2 et d'une distribution sur V_1 , le résultat étant un courant sur W .

Soit G un groupe de Lie et V une variété sur laquelle G agit à gauche de manière différentiable ; on notera $g.v$ le transformé par g du point $v \in V$. Les applications $(g , h) \longrightarrow gh$ et $(g , v) \longrightarrow gv$ de $G \times G$ dans G et $G \times V$ dans V respectivement permettent de définir deux sortes de produit de convolution. On vérifie immédiatement la bilinéarité et l'associativité de la convolution de sorte que l'ensemble $C(G)$ des courants à support compact de G devient une algèbre et $C(V)$ un module à gauche sur $C(G)$. Si T est un courant, $\check{T}$ désigne l'image de T par la symétrie $x \longrightarrow x^{-1}$ de G . L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est l'espace tangent à l'élément neutre e de G , muni de la loi de composition $[X , Y] = X*Y - Y*X$ (convention différente de celle de Chevalley, elle permet de démontrer que l'algèbre de Lie du groupe linéaire se compose des matrices d'ordre n avec la loi $[X , Y] = XY - YX$ et non $= YX - XY$) Si $X \in \mathfrak{g}$, on a $\check{X} = - X$: en effet, on a $xx^{-1} = e$ donc la composée des applications $x \longrightarrow (x , x^{-1})$ et $(x , y) \longrightarrow xy$ est constante et les applications infinitésimales correspondantes sont $X \longrightarrow (X , \check{X})$ et $(X , Y) \longrightarrow X + Y$ donc $X + \check{X} = 0$.

Soit $g \in G$ et f une fonction de classe C^∞ sur la variété V où opère G ; pour toute forme différentielle ω sur V de degré maximum, on a $\langle \delta_g * f , \omega \rangle = \int f(v)\, \omega(g.v) = \int f(g^{-1}.v)\, \omega(v)$ donc $\delta_g * f$ est la fonction $v \longrightarrow f(g^{-1}.v)$. Par un calcul analogue, on voit que si $X \in \mathfrak{g}$, $(X * f)(v) = \langle X_g , f(g^{-1}.v) \rangle = \langle \check{X}_g , f(gv) \rangle$; en particulier si $V = G$, la valeur en e de $X * f$ est égale à $\langle \check{X} , f \rangle = -\langle X , f \rangle$ et $\delta_g * f$ est la translatée à gauche de f par g ; on a des résultats analogues pour les convolutions à droite. En vertu de l'associativité, $f \longrightarrow X * f$ est un opérateur de dérivation invariant par les translations à droite donc définit un champ de vecteurs tangents invariant à droite dont la valeur en e est $- X$. Revenant au cas où $G \neq V$, $f \longrightarrow X * f$ est encore un opérateur de dérivation donc définit un champ de vecteurs sur V , champ dont la valeur au point v est le vecteur tangent image de X par la différentielle de l'application $g \longrightarrow g^{-1}.v$.

Enfin, si $f \in \mathcal{E}(G)$ on a $\langle \delta_h * X * \delta_{h^{-1}}, f \rangle = \iiint f(g_1 g_2 g_3)\, d\delta_h(g_1)$

$dX(g_2)\, d\delta_{h^{-1}}(g_3) = \int f(hgh^{-1})\, dX(g) = \langle \mathrm{ad}\, h \,.\, X \,,\, f \rangle$ donc $\mathrm{ad}\, h \,.\, X = \delta_h * X * \delta_{h^{-1}}$.

2.- Formules d'intégration de H. Weyl.

Soit G un groupe de Lie connexe compact semi-simple, i.e. dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et H le sous-groupe de G correspondant ; nous anticipons ici les résultats suivants qui seront démontrés à l'exposé 23 :

H est un <u>sous-groupe abélien fermé (donc compact) maximal de</u> G ; <u>tout élément de</u> G <u>est conjugué par un automorphisme intérieur à un élément de</u> H <u>et si</u> N <u>est le normalisateur de</u> H <u>dans</u> G , N/H <u>est isomorphe au groupe de Weyl de</u> $\mathfrak{g}$.

H est un groupe de Lie abélien compact connexe, il est donc isomorphe au tore T^r ($r = \dim \mathfrak{h}$) et par suite l'exponentielle est un homomorphisme de $\mathfrak{h}$, considéré comme groupe abélien, sur H ; tout caractère de H i.e. tout homomorphisme continu de H dans T est alors de la forme $e^{\lambda}(h) = e^{\lambda(H)}$ si $h = \exp H$. On a $e^{\lambda} \,.\, e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$ et $\overline{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}$ comme on le voit tout de suite ; de plus si (ρ , V) est une représentation linéaire de H de dimension finie et $d\rho$ la représentation de $\mathfrak{h}$ correspondante, ρ et $d\rho$ sont complètement réductibles puisque H est compact et toute représentation irréductible est de dimension 1 puisque H est abélien ; donc V est somme directe des V_{λ} , $v \in V_{\lambda}$ signifiant $d\rho(H)v = \lambda(H)v$ ou encore puisque $\rho(\exp H) = \exp d\rho(H)$, $\rho(h)v = e^{\lambda}(h)v$ ($h \in H$ et $H \in \mathfrak{h}$) . En particulier si $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a $\mathrm{ad}\, h.E_{\alpha} = e^{\alpha}(h)E_{\alpha}$.

Puisque tout élément de G est conjugué à un élément de H , l'application $(g , h) \longrightarrow ghg^{-1}$ de $G \times H$ dans G a G tout entier pour image ; si on remplace g par gh' , on ne change pas ghg^{-1} donc on peut définir une application f de $G/H \times H$ dans G par $f(p,h) = ghg^{-1}$ si p est la classe de g modulo H . Un élément de G est dit régulier si la multiplicité de la valeur propre 1 de $\mathrm{ad}\, g$ vaut r ; pour un élément h de H ceci signifie $e^{\alpha}(h) \neq 1$ pour toute racine α non nulle, par suite l'ensemble des invariants de $\mathrm{ad}\, h$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{h}$, donc H est la composante connexe de e dans le centralisateur de h . Enfin, l'ensemble des éléments réguliers de G est invariant par les automorphismes intérieurs de G (et même par tous les automorphismes de G).

Un élément régulier de G est donc conjugué à un élément régulier de

H et comme les éléments réguliers de H sont denses dans H, les éléments réguliers de G sont denses dans G. Soit $p = ghg^{-1}$ régulier ; pour que $p = g'h'g'^{-1}$, il faut et il suffit que si $k = g'^{-1}g$, on ait $khk^{-1} = h' \in H$; comme h et h' sont réguliers, ad k conserve H qui est la composante de l'unité du centralisateur de h ou de h', donc $k \in N$; N/H est isomorphe à W qui est d'ordre w, donc il y a exactement w classes mod. H telles que $ghg^{-1} \in H$ et $G/H \times H_r$ est un revêtement d'ordre w de G_r (G_r ensemble des éléments réguliers, $H_r = H \cap G_r$) ; enfin, pour qu'une fonction sur H_r soit la trace d'une fonction sur G_r invariante par les automorphismes intérieurs (ou comme on dit "centrale") il faut et il suffit qu'elle soit invariante par le groupe de Weyl.

$P = G/H$, p est la classe H ; l'application canonique $g \longrightarrow g.p$ de G sur P applique $\mathfrak{g}$ sur l'espace $T(p)$ tangent à p, le noyau se composant de $\mathfrak{h}$, par suite si $\{E_\alpha, H_i\}$ est une base de Weyl de l'algèbre $\mathfrak{g}_c$ complexifiée de $\mathfrak{g}$, les images T_α des E_α dans $T(p)$ forment une base de $T(p)$. Comme $-\alpha$ est racine en même temps que α et que $\mathrm{ad}\, h\, E_\alpha = e^\alpha(h)E_\alpha$, il en résulte que le multivecteur tangent $\bigwedge_\alpha T_\alpha$ en p est invariant par les opérations de H dans P, donc comme H est le stabilisateur de p dans G il existe un champ S de multivecteurs tangents à P et un seul invariant par les opérations de G, à savoir si $q = g.p$ on lui fait correspondre le multivecteur $\delta_g * \bigwedge_\alpha T_\alpha$.

Soit $k = ghg^{-1}$ et $T_i(h)$ le vecteur $\delta_h * H_i$ tangent en h à G, $q = g.p$ et $\delta_g * T_\alpha$ une base de l'espace tangent $T(q)$. $\delta_g * T_\alpha$ est l'image de $\delta_g * E_\alpha$ par la projection de G sur P, donc l'image par f de ce vecteur considéré comme vecteur tangent à $P \times H$ en (q,h) vaut alors :

$$(2) \qquad \delta_g * E_\alpha * \delta_h * \delta_{g^{-1}} + \delta_g * \delta_h * (\widehat{\delta_g * E_\alpha})^{\vee}$$

$$= \delta_k * (\delta_{gh^{-1}} * E_\alpha * \delta_{hg^{-1}}) - \delta_k * \delta_g * E_\alpha * \delta_{g^{-1}}$$

$$= \delta_k * (\mathrm{ad}gh^{-1}\, E_\alpha - \mathrm{ad} g\, E_\alpha) = (e^{-\alpha}(h)-1)\, \delta_k * (\mathrm{ad} g\, E_\alpha)$$

et de même l'image par f de $T_i(h)$ considéré comme vecteur tangent à $P \times H$ vaut $\delta_g * \delta_h * H_i * \delta_{g^{-1}} = \delta_k * (\mathrm{adg.}\, H_i)$. Soit R le multivecteur tangent en (q,h) à $P \times H$ produit extérieur des $\delta_g * T_\alpha$ et des $T_i(h)$; l'image de R par f vaut donc

$\delta_k * (\bigwedge_\alpha E_\alpha \wedge \bigwedge_i H_i) \prod_\alpha (e^{-\alpha}(h) - 1) \ldots$ car ad g est unimodulaire.
Si l'on prend la base de $\mathfrak{g}^*$ duale de $\{E_\alpha, H_i\}$ soit $\{E'_\alpha, H'_i\}$, $g \longrightarrow \delta_g * (\bigwedge_\alpha E'_\alpha \wedge \bigwedge_i H'_i)$ est une forme différentielle de rang maximum invariante à gauche et d'après la forme de l'image de R par f, l'image réciproque de cette forme différentielle vaut
$\prod (e^{-\alpha}(h) - 1)\, S' \wedge (\delta_h * \bigwedge_i H'_i)$ (S' forme différentielle avec $\langle S, S'\rangle \equiv 1$ sur tout P) d'où les formes différentielles invariantes définissant des mesures de Haar, à un facteur constant multiplicatif près (nécessaire si l'on normalise dg et dh de sorte que $\int dg = \int dh = 1$,)

$$(3) \qquad \int f(g)\, dg = w^{-1} \int_H \prod_\alpha (e^\alpha(h) -1)\, dh \int_P f(ghg^{-1})\, d(g.p)$$
$$= w^{-1} \int_H \prod_\alpha (e^\alpha(h) -1)\, dh \int_G f(ghg^{-1})\, dg$$

La dernière intégrale prise sur P ou sur G a même valeur d'après la théorie des espaces homogènes car $\int dh = 1$.

Pour calculer la constante restée indéterminée, on fait $f(g) = 1$; donc cette constante vaut $w(\int \prod_\alpha (e^\alpha(h) -1)\, dh)^{-1}$. Or :

$$(4) \qquad \prod_\alpha (e^\alpha(h) -1) = \prod_{\alpha > 0} (e^\alpha(h) -1)(e^{-\alpha}(h) -1) = D(h)\, \overline{D(h)}$$

si $D = \prod_{\alpha > 0} e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}$ car $e^{-\alpha}(h) = \overline{e^\alpha(h)}$; d'après les résultats de l'exposé 19 (applicables parce que $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda . e^\mu$), on a $D = \sum_\sigma \det\sigma\, e^{\sigma \cdot \rho}$.
tenant compte des relations d'orthogonalité des e^λ, on voit que $\int |D(h)|^2 dh = w$ et que la constante de normalisation dans (3) vaut 1 .

Dans le cas d'une fonction centrale, la formule (3) se simplifie :

$$(5) \qquad \int f(g) = \int D(h)\, \overline{D(h)}\, f(h)\, dh \,/w$$

3.- La méthode de H. Weyl pour la recherche des caractères.

Nous allons exposer d'après H. Weyl comment on peut retrouver les principaux résultats de la théorie des représentations linéaires des groupes de Lie compacts semi-simples par voie globale. Pour le reste de ce paragraphe, nous n'assumerons aucun des résultats des exposés 17 à 20 sauf les lemmes des 2 premiers paragraphes de l'exposé 19 .

Soit P_G l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ qui se prolongent en caractères e^{λ} de H ; si (ρ, V) est une représentation linéaire de dimension finie de G, sa restriction à H se décompose $V = \sum_{\lambda} V_{\lambda}$ et $\lambda \in P_G$; réciproquement, si $\lambda \in P_G$, e^{λ} définit une représentation de dimension 1 de H et une telle représentation est contenue dans une représentation de G d'après T.L.G. prop. 4 page 191. Donc P_G est l'ensemble des poids de G par rapport à H.

Si $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a $d\rho(E_{\alpha})V_{\lambda} \subset V_{\lambda+\alpha}$ donc le sous-espace $\sum_{k} V_{\lambda+k\alpha}$ (somme étendue à tous les entiers) est invariant par $d\rho(X)$ si $X = \frac{\Pi}{\sqrt{2}|\alpha|}(E_{\alpha} + E_{-\alpha})$ et aussi par $\rho(\exp X) = \exp d\rho(X)$. On a vu à l'exposé 16 que

(6) $$e^{\operatorname{ad} X}.H = H - 2\alpha(H)H'_{\alpha}/\langle \alpha, \alpha \rangle = S_{\alpha}.H$$

par suite si $x = \exp X$ et $h \in H$, on a $\operatorname{ad} x = e^{\operatorname{ad} X}$ et $xhx^{-1} = S_{\alpha} h$ d'où si v appartient au poids λ, $\rho(h)\rho(x)v = \rho(x)\rho(S_{\alpha}^{-1}h)v =$ $= e^{S_{\alpha}\lambda}(h)\rho(x)v$ donc $\rho(x)v$ est de poids $S_{\alpha}\lambda$ et <u>l'ensemble des poids de V est invariant par le groupe de Weyl</u> ; mais de plus $\rho(x)v \in \sum_{k} V_{\lambda+k\alpha}$ donc $S_{\alpha}\lambda$ est de la forme $\lambda + k\alpha$ et on a prouvé que $2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ <u>est un entier</u>. Il en résulte que P_G est contenu dans l'ensemble P des formes λ sur $\mathfrak{h}$ telles que $2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ soit un entier (cf. exp. 19).

Posons $\chi(g) = \operatorname{Tr}(\rho(g))$ et $m_{\lambda} = \dim V_{\lambda}$; comme $\rho(h)$ est un scalaire dans V_{λ}, on a $\chi(h) = \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda}(h)$. D'après ce qu'on a vu plus haut $\rho(x)$ échange les sous-espaces de poids λ et $S_{\alpha}\lambda$ donc $m_{\lambda} = m_{S_{\alpha}\lambda}$ et par suite $\sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} = \chi$ est une série trigonométrique à coefficients entiers positifs invariante par le groupe de Weyl. $D.\chi$ est alors antisymétrique et l'on a $D.\chi = \sum a_{\mu} Q.e^{\mu}$; les séries $Q.e^{\mu}$ distinctes n'ont aucun terme en commun donc a_{μ} est le coefficient de e^{μ} dans $D.\chi$ donc un entier puisque D et χ sont à coefficients entiers.

Par ailleurs (T.L.G. page 188 prop.2), on sait que $\int |\chi(g)|^2 dg = 1$ soit d'après la formule (6) :

(7) $$1 = \int |\chi(g)|^2 dg = 1/w \int |D\chi|^2 \, dh = \int |\sum a_{\mu} Q.e^{\mu}|^2 \, dh$$

Les séries $Q.e^{\mu}$ distinctes n'ont pas de terme en commun et les e^{μ} sont deux à deux orthogonaux car ce sont les caractères du groupe compact H,

donc ces séries sont deux à deux orthogonales et comme
$Q.e^{\mu} = \sum_{\sigma} \det\sigma\ e^{\sigma\mu}$ $\int |Q.e^{\mu}|^2 dh = \sum_{\sigma} (\det\sigma)^2 = w$. Finalement de (7) on tire $\sum_{\mu} |a_{\mu}|^2 = 1$. Comme les a_{μ} sont des entiers il en résulte qu'un des a_{μ} est égal à ± 1 et les autres sont nuls. Ceci a les conséquences suivantes : χ est égal à $Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$ au signe près, mais ce signe doit être + car le plus haut terme de $Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$ est e^{Λ} (si l'on suppose, ce qui est loisible, que $\Lambda(H_i) \geq 0$ pour tout i) et son coefficient est positif ainsi que le coefficient de e^{Λ} dans χ . De plus sur la formule donnant χ , on voit que $m_{\Lambda} = 1$ donc que <u>le plus haut poids est de multiplicité 1</u> et comme les formes linéaires $\sigma(\Lambda+\rho)$ sont de la forme $\Lambda + \rho + \sum p_i \alpha_i$ où les p_i sont des entiers et que les formes $\sigma\cdot\rho$ sont du type $\rho + \sum q_i \alpha_i$ avec des entiers q_i , il en résulte que <u>les poids de V sont de la forme $\Lambda + \sum m_i \alpha_i$ où les m_i sont entiers</u>. Enfin il résulte des relations d'orthogonalité des caractères que deux représentations irréductibles inéquivalentes ne peuvent avoir le même caractère, donc que <u>les représentations irréductibles de G sont caractérisées par leur plus haut poids</u>.

Nous allons montrer que <u>pour toute $\Lambda \in P_G \cap P^+$, il existe une représentation de dimension finie de G admettant Λ pour poids maximal</u> ; supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi pour une certaine Λ ; le quotient de $Q.e^{\Lambda+\rho}$ par $Q.e^{\rho}$ est une série trigonométrique finie d'après l'exposé 19 et représente donc une fonction invariante sur H , donc se prolonge en une fonction ψ sur G continue et invariante par les automorphismes intérieurs. Mais il résulte de ce qui a été dit plus haut que $Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$ et $Q.e^{\Lambda'+\rho}/Q.e^{\rho}$ sont orthogonales si $\Lambda \neq \Lambda'$, donc que $Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$ est orthogonale à tous les caractères ; mais d'autre part, d'après la proposition 2 page 212 de T.L.G. il existe une combinaison linéaire finie de caractères χ_i tels que $|\psi(g) - \sum a_i \chi_i(g)| < \varepsilon$. Multipliant par $\overline{\psi(g)}$ et intégrant, il vient que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int |\psi(g)|^2 dg < \varepsilon$ d'où finalement $\psi(g) = 0$, ce qui est absurde.

Finalement, nous avons retrouvé la plupart des résultats de la théorie infinitésimale.

4.- <u>Formule de Plancherel pour les groupes compacts semi-simples</u>.

Nous allons démontrer une formule qui joue un rôle analogue à la formule de Plancherel dans la théorie de la transformation de Fourier.

Pour $\Lambda \in P_G \cap P^+$, posons $d_\Lambda = \prod_{\alpha>0} \langle \Lambda + \rho , \alpha \rangle / \langle \rho , \alpha \rangle$ et $\chi_\Lambda = Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$. Si f est une fonction de classe C^∞ sur G, nous nous proposons de démontrer la formule suivante (χ_Λ est prolongée en une fonction centrale sur G)

(8) $$f(e) = \sum_\Lambda d_\Lambda \int f(g)\ \chi_\Lambda(g)\ dg$$

d'où résultera que si χ_Λ est le caractère de la représentation (ρ, V_Λ) dim $V_\Lambda = \chi_\Lambda(e) = d_\Lambda$ en vertu des relations d'orthogonalité des caractères de G.

Les χ_Λ sont invariants par les automorphismes intérieurs, donc l'intégrale $\int f \chi_\Lambda\ dg$ ne change pas si l'on remplace f par $f'(g) = \int f(kgk^{-1})\ dk$ car $\int f' \chi_\Lambda\ dg = \iint f(kgk^{-1})\ \chi_\Lambda(g)\ dk\ dg = \iint f(g)\ \chi_\Lambda\ (k^{-1}gk)\ dg\ dk = \int f\ \chi_\Lambda\ dg$ et f' est invariante par les automorphismes intérieurs et de classe C^∞ $f(e) = f'(e)$; on peut donc supposer que f elle-même est centrale. Dans ce cas :

(9) $$\int f(g)\ \chi_\Lambda(g)\ dg = 1/w \int f(h)\ \overline{D(h)} \sum_\sigma \det\sigma\ e^{\sigma(\Lambda+\rho)}(h)\ dh$$

D'autre part dans l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{h}^*$, l'élément $\prod_{\alpha>0} \alpha$ est antisymétrique par rapport au groupe de Weyl d'après le lemme 1 de l'exposé 19 donc :

(10) $$\det\sigma \prod_{\alpha>0} \langle \Lambda+\rho , \alpha \rangle = \prod_{\alpha>0} \langle \Lambda + \rho , \sigma^{-1}\alpha \rangle = \prod_{\alpha>0} \langle \sigma(\Lambda+\rho) , \alpha \rangle$$

De plus soit $\lambda \in P_G$ telle que $\langle \lambda , \alpha \rangle \neq 0$ pour toute racine $\alpha \neq 0$; comme le groupe de Weyl est simplement transitif sur les chambres de Weyl λ est conjuguée à une et une seule μ telle que $\mu(H_i) > 0$. P_G est invariant par le groupe de Weyl donc $\mu \in P_G \cap P^+$, ce qui prouve que $\mu(H_i)$ est un entier > 0 donc $\geqslant 1$, i.e. $(\mu-\rho)(H_i) \geqslant 0$ (car $\rho(H_i) = 1$). En résumé toute $\lambda \in P_G$ qui n'annule aucun des H'_α s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sigma(\Lambda+\rho)$ $\Lambda \in P_G \cap P^+$.

On a donc :

(11) $$\sum_\Lambda d_\Lambda \int \chi_\Lambda(g)\ f(g)\ dg = 1/w \prod_{\alpha>0} \langle \rho,\alpha \rangle \sum_{\Lambda,\sigma} \int f(h)\ \overline{D(h)} \prod_{\alpha>0} \langle \Lambda + \rho , \alpha \rangle\ e^{\sigma(\Lambda+\rho)}(h)dh$$
$$= 1/w \prod_{\alpha>0} \langle \rho,\alpha \rangle \sum_\lambda \int f(h)\ \overline{D(h)} \prod_{\alpha>0} \langle \lambda , \alpha \rangle e^{\lambda}(h)dh$$

car la contribution d'un terme en λ est nulle si $\langle \lambda , \alpha \rangle = 0$ et sinon chaque terme de la somme en Λ , σ intervient une fois et une seule. D'autre part, la suite des coefficients $\prod_{\alpha>0} \langle \lambda , \alpha \rangle$ est à croissance lente donc $f\overline{D}$ étant de classe C^∞ sur H, la série en λ est absolument convergente et la transformation de la sommation est licite. Il nous reste à étudier la distribution $T = \bar{D}(h)dh \sum_{\mu} e^{\mu}(h) \prod_{\alpha>0} \mu(H'_{\alpha})$ sur H ; d'après l'expression de D, on a :

(12)
$$T = \sum_{\lambda,\sigma} e^{\lambda-\sigma.\rho} \det\sigma \prod_{\alpha>0} \lambda(H'_{\alpha})\, dh$$
$$= \sum_{\mu} \Big(\sum_{\sigma} \det\sigma \prod_{\alpha>0}(\mu+\sigma.\rho)(H'_{\alpha})\Big)\, e^{\mu}\, dh$$

Soit n le nombre des racines positives de $\mathfrak{g}$; on a alors

(13) $$\prod_{\alpha>0} \langle \mu+\sigma.\rho, H'_{\alpha}\rangle = 1/n!\ \langle (\mu+\sigma.\rho)^n, \prod_{\alpha>0} H'_{\alpha}\rangle$$

Le produit scalaire exprimant la dualité entre $S(\mathfrak{h})$ et $S(\mathfrak{h}^*)$. Dans $S(\mathfrak{h}^*)$ le terme $1/n! \sum_{\sigma} \det\sigma\ (\mu+\sigma.\rho)^n$ vaut $\sum_{p} \mu^{n-p}/(n-p)! \sum_{\sigma} \det\sigma\, \sigma(\rho^p/p!)$ et $\sum_{\sigma} \det\sigma\,\sigma(\rho^p)/p!$ est antisymétrique par rapport au groupe de Weyl donc divisible par $\prod_{\alpha>0}\alpha$ qui est de degré n ; ceci permet de conclure que le seul terme non nul correspond à $p = n$ et que (13) est indépendant de μ et vaut $\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha\rangle$. Enfin $\sum e^{\mu}(h)dh = \delta_e(h)$ en vertu de la formule de Fourier sur H.

Donc $T = w\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha\rangle\delta_e$ et la formule (11) montre que $\sum_{\Lambda} d_{\Lambda} \int \chi_{\Lambda}(g) f(g)dg$ qui est égal à $1/w\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha\rangle \int f(h)dT(h)$ vaut bien $f(e)$ conformément à la formule (8) qui se trouve ainsi complètement démontrée: De la formule (8) on déduit alors les conséquences usuelles : tout d'abord, on remplace f par $f * \widetilde{f'}$ $(\widetilde{f'}(g) = f'(g^{-1}))$ d'où

(14)
$$\int f(g)\overline{f'(g)}dg = \sum_{\Lambda} d_{\Lambda} \int \chi_{\Lambda}(g_1 g_2^{-1})\, f(g_1)\overline{f'(g_2)}\, dg_1\, dg_2$$
$$= \sum_{\Lambda} d_{\Lambda}\ \mathrm{Tr}\Big(\int \rho_{\Lambda}(g_1) f(g_1)\, dg_1\Big)\Big(\int \rho_{\Lambda}(g_2^{-1})\overline{f'(g_2)}\, dg_2\Big)$$
$$= \sum_{\Lambda} d_{\Lambda}\ \mathrm{Tr}(\rho_{\Lambda}(f)\,\rho_{\Lambda}(f')^*)$$

$(\rho_{\Lambda}, V_{\Lambda})$ est une représentation unitaire de dimension finie de G de caractère χ_{Λ} et $\rho_{\Lambda}(f) = \int \rho_{\Lambda}(g)f(g)\, dg$ est une intégrale vectorielle. La formule (14) valable pour f et f' de classe C^{∞} s'étend au cas où f et f' sont de carré sommable pour dg car les deux membres sont des fonctions continues de f et $f' \in L^2(G)$. Enfin f' étant une fonction de classe C^{∞} quelconque sur G, on tire de la formule (14) la formule d'inversion suivante valable pour f de classe C^{∞} :

(15) $$f(g) = \sum_{\Lambda} d_{\Lambda}\ \mathrm{Tr}(\rho_{\Lambda}(f)(\rho_{\Lambda}(g)^*)) \quad .$$
