M. Berger

Construction des algèbres de Lie simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 14, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A17_0>

Exposé n° 14

CONSTRUCTION DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

(Exposé de M. BERGER, le 22.2.1955).

Le but de cet exposé est de construire explicitement des algèbres de Lie simples dont le système des racines simples corresponde aux schémas de type A_n , B_n , C_n , D_n et G_2 respectivement.

1.- Algèbres de type A_n .

Soit V un espace vectoriel de dimension m sur le corps K algébriquement clos de caractéristique 0 et V^* son dual. $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}\ell(V)$ désigne l'algèbre de Lie des opérateurs de V avec $[A,B] = AB - BA$ et $\mathfrak{g}$ l'idéal de $\mathfrak{a}$ formé des opérateurs de trace nulle. On va montrer que $\mathfrak{a}$ est semi-simple en calculant sa forme de Killing. Or on a vu (exposé 4) que si l'on identifie $V \otimes V^*$ à l'espace des opérateurs de V , la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$ est le produit tensoriel de la représentation identique de $\mathfrak{a}$ dans V et de sa duale, donc $\operatorname{ad} X = X \otimes 1 - 1 \otimes {}^tX$ par suite $(\operatorname{ad} X)^2 = X^2 \otimes 1 + 1 \otimes {}^tX^2 - 2\ X \otimes {}^tX$. Donc $\operatorname{Tr}((\operatorname{ad} X)^2) = 2 \operatorname{Tr}(X^2)$ $\operatorname{Tr}(1) - 2 \operatorname{Tr}(X)^2$ (se rappeler que X et ${}^tX$ ont même trace) et par polarisation, on en déduit

$$(1) \qquad B(X,Y) = 2m \operatorname{Tr}(XY) - 2 \operatorname{Tr}(X) \operatorname{Tr}(Y)$$

De plus, comme $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est induite par celle de $\mathfrak{a}$; si alors, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ était dégénérée, il existerait $X \in \mathfrak{g}$ tel que $B(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, ce qui signifie $\operatorname{Tr}(XY) = 0$ pour tout Y de trace 0 , donc $X = a.1$, mais comme $0 = \operatorname{Tr}(X) = ma$, on en déduit $a = 0$ et $X = 0$: $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Soit v_i une base de V , w_i la base duale de V^* et E_{ij} l'opérateur correspondant à $v_i \otimes w_j$; $\mathfrak{h}$ désignera la sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ formée des opérateurs diagonaux. Si $h_{ii} = e_i(H)$ est le coefficient d'indice (i,i) de la matrice de H , on a donc $Hv_i = e_i(H)v_i$, puis ${}^tHw_i = e_i(H)w_i$, et finalement $\operatorname{ad} H.E_{ij} = Hv_i \otimes w_j - v_i \otimes {}^tHw_j = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij}$. Ce dernier résultat montre que $\operatorname{ad} H$ est semi-simple et que $\operatorname{ad} H.E_{ij} \neq 0$ pour $i \neq j$ dès que H n'annule aucun des $e_i(H) - e_j(H)$,(il existe de tels H, car il existe une matrice diagonale de trace 0 dont deux termes de rang donné sont distincts), donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et le système des racines se compose des $e_i - e_j$.

Posons $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ et $H_i' = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$. Sur $\mathfrak{g}$, on a $B(X,Y)$ $2m\,Tr(XY)$ d'après la formule (1), donc $\alpha_i(H) = Tr(HH_i') = \frac{1}{2}m^{-1}\,B(H,H_i')$ et par suite $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \frac{1}{4}B(H_i',H_j')\,m^{-2} = \frac{1}{2}m^{-1}\,Tr(H_i'H_j')$

$$
(2) \qquad \begin{aligned} \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle &= 0 && \text{si} \quad |i-j| > 1 \\ &= -\,1/2m && |i-j| = 1 \\ &= \;\;2/2m && |i-j| = 0 \end{aligned}
$$

Comme de plus toute racine est combinaison linéaire des α_i à coefficients tous de même signe ($e_i - e_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} \cdots + \alpha_{j-1}$ si $i < j$ et $e_i - e_j = -(e_j - e_i) = -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-1})$ si $j < i$), il résulte du lemme démontré en appendice que les α_i forment un système de racines simples et les formules (2) montrent que ce système est de type A_n pour $m = n+1$. $(n \geq 1)$.

2.- Algèbres de type C_n.

Soit donnée sur V une forme bilinéaire alternée non dégénérée (x,y). Toute forme linéaire sur V est du type $x \to (x,y)$ d'où un isomorphisme Q de V sur V^* ; par Q correspond à l'opérateur ${}^tX$ sur V^* l'opérateur X^* sur V défini par $(Xx,y) = (x,X^*y)$. Mais Q définit un isomorphisme de $V \otimes V$ sur $V \otimes V^*$ donc sur $\mathfrak{gl}(V)$ qui est donné en associant à $x \otimes y$ l'opérateur $U : a \to x.(a,y)$, donc $(a,U^*b) = (Ua,b) = -(a,y)(b,x)$ et par suite $U^*b = -y\ (b,x)$ qui est associé à $-y \otimes x$. En résumé à l'opération $U \to -U^*$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ correspond la symétrie canonique S dans $V \otimes V$.

L'ensemble des X tels que $X^* = -X$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ qui correspond donc au sous-espace symétrique de $V \otimes V$ que l'on notera W. $\frac{1}{2}(1+S)$ est un projecteur de $V \otimes V$ sur W et à ad X correspond l'opérateur $X \otimes 1 - 1 \otimes X^* = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ si $X \in \mathfrak{g}$. Si A est un opérateur de $V \otimes V$ qui conserve W, la trace de A dans W est égale à la trace de $\frac{1}{2}(1+S)A$ dans $V \otimes V$, donc

$$
(3) \qquad B(X,X) = Tr(\tfrac{1}{2}(1+S)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)^2 = \tfrac{1}{2}(2m\,Tr(X^2) + 2\,Tr(X)^2)
$$
$$
+ \tfrac{1}{2}(Tr(S(X^2 \otimes 1)) + Tr(S(1 \otimes X^2)) + 2\,Tr(S(X \otimes X)))
$$

Or on a de manière générale $Tr_{V \otimes V}(S(A \otimes B)) = Tr(AB)$ commme on le voit en prenant $A = x \otimes x^*$ et $B = y \otimes y^*$ décomposés

(4) $\quad A\bar{B} = Ay \otimes y^* = x \otimes y^* < y,x^* > \qquad Tr(AB) = < x,y^* > < y,x^* >$

$$A \otimes B = (x \otimes y) \otimes (x^* \otimes y^*) \qquad S \circ (A \otimes B) = S(x \otimes y) \otimes (x^* \otimes y^*)$$
$$= (y \otimes x) \otimes (x^* \otimes y^*)$$

$$Tr(S(A \otimes B)) = < y \otimes x, x^* \otimes y^* > \; = \; < y,x^* > < x,y^* > \; = Tr(AB)$$

Finalement, il vient $B(X,X) = (m+2)\ Tr(X^2) + Tr(X)^2$; or $Tr(X^*) = Tr({}^tX) =$ $= Tr(X)$, mais $X = -X^*$, donc $Tr(X) = 0$; finalement en polarisant, il vient

(5) $$B(X,Y) = (m+2)\ Tr(XY)$$

On peut maintenant montrer que B est non dégénérée : en effet si $B(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, on a $Tr(X(A - A^*)) = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{gl}(V)$, d'où $Tr(X - X^*)A) = 0$ et $X = X^*$; comme par ailleurs $X = -X^*$, on en déduit $X = 0$. $\mathfrak{g}$ <u>est une algèbre semi-simple</u>.

On va maintenant exhiber une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Pour cela, on considère une base $\{v_i, v_{-i}\}$ avec $(v_i, v_{-i}) = 1$, les autres produits scalaires étant tous nuls. $\mathfrak{h}$ se compose des H tels que $Hv_i = a_i v_i$ $Hv_{-i} = -a_i v_{-i}$ et l'on pose $a_i = e_i(H)$. $\mathfrak{g}$ a une base F_{IJ} correspondant à la base $v_I \otimes v_J + v_J \otimes v_I$ de W (I désigne un indice générique de la forme $\pm i$) et si l'on pose $e_{-i} = -e_i$, on a $Hv_I = e_I(H)v_I$ d'où immédiatement $ad\ H.F_{IJ} = (e_I(H) + e_J(H))F_{IJ}$. Il en résulte que $ad\ H$ est semi-simple et que les seuls F_{IJ} annulés par tous les $ad\ H$ sont les $F_{I,-I}$ qui sont dans $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan et les racines sont les $e_I + e_J =$ $\pm e_i \pm e_j$. Si l'on prend $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ $\alpha_n = 2e_n$ toute racine est combinaison linéaire des α_i avec des coefficients de même signe car $e_i - e_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$ (si $i < j$) , $= -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-j})$ (si $j < i$) et $e_i + e_j = (e_i - e_n) + (e_j - e_n) + 2e_n$. Donc les α_i forment un système fondamental de racines simples. Or à une homothétie près, la forme de Killing est $Tr(XY)$. Comme $e_i(H) = \frac{1}{2}Tr(HF_{i,-i})$ et que $Tr(F_{i,-i}\ F_{j,-j}) = 2\ \delta_{ij}$, il en résulte que les e_i sont orthogonaux 2 à 2 et de même longueur et il suffit de se reporter au tableau final de l'exposé 13 pour constater que $\mathfrak{g}$ est de type C_n $(C_1 = A_1 , C_2 = A_2)$.

3.- <u>Algèbres de type</u> B_n <u>et</u> D_n .

Nous allons maintenant introduire sur V une <u>forme bilinéaire symétrique</u> (x,y) . Les calculs sont les mêmes que dans le paragraphe précédent, sauf aux points suivants :

$(a,U^*b) = (Ua,b) = +\ (a,y)(b,x)$ car $(\ ,\ )$ est symétrique, donc U^*

correspond à $y \otimes x$ et $\mathfrak{g}$ s'identifie au sous-espace A des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 . $\frac{1}{2}(1-S)$ est un projecteur de $V \otimes V$ sur A , donc $B(X,X) = \mathrm{Tr}_{V \otimes V}(\frac{1}{2}(1-S)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)^2) = (m-2)\mathrm{Tr}(X^2)$ (si $\mathfrak{g}$ désigne la sous-algèbre des X tels que $X = -X^*$). Noter que $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Il n'y a rien à changer à la démonstration du fait que B est non dégénérée, donc $\mathfrak{g}$ <u>est semi-simple</u>. (si $m > 2$)

Pour construire une sous-algèbre de Cartan, on prend une base de V , soit $\{v_I\}$ telle que tous les produits scalaires soient nuls à l'exception de $(v_I, v_{-I}) = 1$. $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des matrices telles que $Hv_I = e_I(H)v_I$; c'est une sous-algèbre de Cartan et les racines sont les $e_I + e_J$ $(I \neq J)$. Enfin $\mathfrak{g}$ a une base G_{IJ} correspondant à la base $v_I \otimes v_J - v_J \otimes v_I$ de $V \otimes V$.

a) si la dimension de V est paire $m = 2n$, I est l'un des indices ± 1 , ± 2 , ... , $\pm n$ $e_{-i} = -e_i$ et les racines sont les $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$. Si l'on pose $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$, toute racine est combinaison linéaire à coefficients de même signe car $e_i - e_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$ si $i < j$ $e_i - e_j = -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-1})$ si $j < i$, $e_i + e_j = (e_i - e_{n-1}) + (e_j - e_n) + (e_{n-1} + e_n)$ si $i < j$ cas auquel on se ramène toujours. Donc c'est un système fondamental de racines simples. Les e_i sont deux à deux orthogonaux et de même longueur comme on le voit par un raisonnement identique à celui du paragraphe 2. Donc $\mathfrak{g}$ est de type D_n ;

b) V est de dimension impaire $m = 2n+1$: alors il faut prendre pour I l'un des indices 0 , ± 1 , ... , $\pm n$; $e_0 = 0$ et les racines sont $\pm e_i$ $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$. Un système de racines simples est formé par les α_i que voici $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$ $\alpha_n = e_n$ car $e_i - e_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$ si $i < j$ $e_i - e_j = -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-1})$ si $j < i$ $\pm e_i = \pm((e_i - e_n) + e_n)$ $e_i + e_j = (e_i - e_n) + (e_j - e_n) + 2e_n$.

Ici encore les e_i sont 2 à 2 orthogonaux et de même longueur donc on a un système de type B_n .

4.- <u>Algèbres de type</u> G_2 .

L'algèbre $\mathfrak{g}$ de type B_3 a une base formée des G_{0I} , $G_{IJ} = -G_{JI}$. La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ a pour base les $H_i = G_{i,-i}$ (i,j désigne un indice variant de 1 à 3 ; I , J ... désigne un indice prenant les valeurs ± 1 , ± 2 , ± 3). On sait que si l'on pose $e_i(H) = \lambda_i$ pour $H = \sum \lambda_i H_i$ et $e_{-i} = -e_i$ on a $[H, G_{0I}] = e_I(H)G_{0I}$ $[H, G_{IJ}] = (e_I(H) + e_J(H))G_{IJ}$.

Soit $\mathfrak{h}'$ la sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ définie par la condition $\sum e_i(H) = 0$ autrement dit $e_I(H) + e_J(H) + e_K(H) = 0$ lorsque I,J,K sont distincts et de même signe. Par suite $G_{0,-I}$ et G_{JK} ont même poids par rapport à $\mathfrak{h}'$ soit $-e_I$, donc $G_I = \sqrt{2}\, G_{0,-I} + G_{JK}$ a le poids $-e_I$ par rapport à $\mathfrak{h}'$. D'autre part, $G_{i,-j}$ appartient au poids $e_i - e_j$ par rapport à $\mathfrak{h}'$. On va montrer que si $\mathfrak{g}'$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}'$, les G_I et les $G_{i,-j}$ $(i \neq j)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Cartan. Cela résulte des formules suivantes :

(1) $$[G_{i,-j}\ ,\ G_{k,-\ell}] = \delta_{jk}\, G_{i,-\ell} - \delta_{i\ell}\, G_{k,-j} \in \mathfrak{g}'$$

(2) $$[G_{i,-j}\ ,\ G_k] = -\delta_{ik}\, G_j$$

$$[G_{i,-j}\ ,\ G_{-k}] = \delta_{jk}\, G_{-i}$$

(3) $$[G_i\ ,\ G_{-j}] = G_{j,-i} \qquad i \neq j$$

$$[G_i\ ,\ G_{-i}] = 3\, H_i - (H_1 + H_2 + H_3)$$

(4) $$[G_i\ ,\ G_j] = 2\, G_{-k}$$

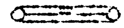
$$[G_{-i}\ ,\ G_{-j}] = -\,2\, G_k$$

Les ad H sont semi-simples d'après ce qu'on a vu et les G_I et $G_{i,-j}$ appartiennent à des poids $\neq 0$ donc $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre abélienne maximale. D'autre part $\mathfrak{h}'$ est formée de matrices diagonales, v_I appartenant au poids e_I et v_0 au poids e_0. Un sous-espace de V invariant par $\mathfrak{g}'$ et $\neq 0$ sera invariant par $\mathfrak{h}'$ donc contiendra un des vecteurs de base. Or $G_I\, v_0 = v_{-I}$ $G_I\, v_{-J} = \mp v_K$ (IJK distincts de même signe et le signe dépendant de la parité de la permutation $|I|\ |J|\ |K|$ de $1\ ,\ 2\ ,\ 3$) $G_{i,-j}\, v_j = v_i$ $G_{i,-j}\, v_{-i} = -\, v_{-j}$. De ces formules résulte que le sous-espace invariant contiendra tous les vecteurs de base. Donc la représentation identique de $\mathfrak{g}'$ dans V est irréductible et par suite $\mathfrak{g}'$ est réductive ; mais si X appartient au centre de $\mathfrak{g}'$, il commute à $\mathfrak{h}'$ donc est dans $\mathfrak{h}'$. Comme X doit commuter aux autres vecteurs de base de $\mathfrak{g}'$, il doit annuler tous les poids en particulier $[X, G_I] = e_I(X) G_I = 0$ donc $e_I(X) = 0$ $X = 0$. Finalement $\mathfrak{g}'$ est semi-simple.

On a vu que les racines sont les $\pm e_i$, $e_i - e_j$ $(i \neq j)$. Montrons que $e_1 - e_2$ et e_2 forment un système fondamental de racines. En effet $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ donc les racines sont

$$\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 - e_2), \pm (2e_1 + e_2), \pm (e_1 + 2e_2), \pm (e_1 + e_2)$$

et l'on a $e_1 = (e_1 - e_2) + e_2 \quad 2e_1 + e_2 = 2(e_1 - e_2) + e_2$

$e_1 + 2e_2 = (e_1 - e_2) + 3e_2$ et on peut donc appliquer le lemme de l'appendice. D'autre part les racines de la forme $(e_1 - e_2) + ke_2$ sont $e_1 - e_2$, e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + 2e_2$ donc $k = 0, 1, 2, 3$ et les entiers de Cartan sont $a_{11} = a_{22} = -2 \quad a_{12} = 3$ ce qui correspond visiblement au schéma  de type G_2.

On peut démontrer que $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre des dérivations de l'algèbre non associative V dont la table de multiplication est

$$e_I * e_{-I} = \operatorname{sgn} I \; e_0$$

$$e_0 * e_I = - e_I * e_0 = e_I$$

$$e_I * e_J = - e_J * e_I = e_{-K}$$ I J K de même signe, $1\ 2\ 3 \rightarrow |I|\,|J|\,|K|$ étant permutation paire

les autres produits étant nuls.

Si l'on ajoute un élément de base e à V et qu'on pose

$$(\lambda e + x)(\mu e + y) = (\lambda\mu - (x,y))e + \lambda y + \mu x + x * y$$

on obtient une algèbre de rang 8 sur K isomorphe à l'algèbre des octaves de Cayley et $\mathfrak{g}'$ apparait comme l'ensemble des dérivations de cette algèbre.

Résumons les résultats obtenus :

<u>Théorème</u> : <u>l'algèbre de Lie des opérateurs de trace nulle d'un espace vectoriel</u> V <u>de dimension</u> $(n+1)$ <u>est de type</u> A_n pour $n \geqslant 1$.

<u>L'algèbre de Lie des opérateurs qui vérifient</u> $(Xx,y) + (x,Xy) = 0$ <u>est une algèbre de type</u> C_n si $(x,y) = -(y,x)$ <u>et si la dimension de</u> V <u>est</u> $2n$, $(n \geqslant 3)$, <u>elle est de type</u> B_n si $(x,y) = (y,x)$ <u>et la dimension est</u> $2n+1$ $(n \geqslant 2)$, <u>de type</u> D_n si $(x,y) = (y,x)$ <u>et la dimension est</u> $2n$ $(n \geqslant 4)$.

<u>L'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre des octaves de Cayley est de type</u> G_2.

APPENDICE.

Lemme : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan $r = \dim \mathfrak{h}$. Si $\{\alpha_i\}$ est un système de r racines telle que toute racine soit de la forme $\alpha = \pm \sum m_i \alpha_i$ où m_i est un entier $\geqslant 0$, alors les α_i forment un système de racines simples.

Mettons sur $\mathfrak{h}_0^*$ l'ordre lexicographique correspondant à la base $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Pour cet ordre les α_i sont positifs, donc les racines positives sont celles de la forme $\alpha = \sum_i m_i \alpha_i$ $(m_i \geqslant 0)$. D'autre part l'ensemble des racines est de rang r sur Q , donc les α_i qui engendrent le système des racines, sont linéairement indépendantes.

Les α_i sont des racines simples car si on avait $\alpha_i = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \succ 0$ on aurait $\beta = \sum m_j \alpha_j$ $\gamma = \sum n_j \alpha_j$ $\alpha_i = \sum_j (m_j + n_j) \alpha_j$ donc $m_j + n_j = 0$ si $j \neq i$ et $m_i + n_i = 1$ donc $\beta = \alpha_i$ ou 0 $\gamma = 0$ ou α_i ce qui prouve que α_i est simple. Comme il y a exactement r racines simples, le lemme est démontré.