Séminaire "Sophus Lie"

F. Bruhat

Poids et racines, I

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A13_0>

Exposé n° 9

POIDS ET RACINES , I

(Exposé de F. BRUHAT, le 18.1.55)

Dans tout l'exposé, K désigne un corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique nulle ; tous les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels de dimension finie sur K.

1.- Représentations des algèbres de Lie nilpotentes.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, et soit ρ une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel V ; une fonction λ sur $\mathfrak{h}$ est dite un poids de ρ s'il existe $a \in V$, $a \neq 0$, tel que $\rho(H)\, a = \lambda(H)\, a$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$; λ est alors une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. D'après le théorème de Lie, si $\mathfrak{h}$ est résoluble, et si $V \neq 0$, il existe au moins un poids de ρ.

D'autre part, si A est un endomorphisme d'un espace vectoriel V, et si λ est un scalaire, on notera $V(A,\lambda)$ le sous-espace vectoriel de V formé des $a \in V$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ avec

(1) $$(A - \lambda)^n\, a = 0$$

On sait que l'on a alors

(2) $$(A - \lambda)^{\dim . V(A,\lambda)}\, a = 0 \quad .$$

De même, si ρ est une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$ dans V, et si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, on notera $V(\mathfrak{h},\lambda)$, ou simplement V^{λ}, le sous-espace vectoriel de V formé des $a \in V$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ avec

(3) $$(\rho(H) - \lambda(H))^n\, a = 0 \quad \text{pour tout} \quad H \in \mathfrak{h}$$

Autrement dit, on a :

(4) $$V(\mathfrak{h},\lambda) = \bigcap_{A \in \mathfrak{h}} V(\rho(A),\lambda(A)) \quad .$$

On démontre aisément que l'on a :

(5) $$(\rho(H) - \lambda(H))^{\dim . V(\mathfrak{h},\lambda)}\, a = 0 \quad \text{pour} \quad a \in V(\mathfrak{h},\lambda) \quad \text{et} \quad H \in \mathfrak{h}$$

Théorème 1 - Soit (ρ,V) une représentation linéaire d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$. Alors :

1) <u>Les sous-espaces</u> V^λ <u>sont stables par</u> $\mathfrak{h}$.

2) <u>Si</u> $V^\lambda \neq 0$, λ <u>est un poids de</u> ρ , <u>et c'est le seul poids de</u> ρ dans V^λ.

3) V <u>est somme directe des sous-espaces</u> V^λ.

Pour prouver la première assertion, il suffit, d'après la formule (4), de montrer que, si $A \in \mathfrak{h}$, $V(A,\lambda(A)) = V(\rho(A),\lambda(A))$ est stable par $\mathfrak{h}$. Soit donc $B \in \mathfrak{h}$ et $a \in V(A,\lambda(A))$, et montrons que $\rho(B)\, a \in V(A,\lambda(A))$; puisque $\mathfrak{h}$ est <u>nilpotente</u>, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $(\mathrm{ad} A)^k B = 0$; nous raisonnerons par récurrence sur k , le cas $k = 0$ étant trivial.

De la formule :

$$(6) \qquad (\rho(A) - \lambda(A))\, \rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A)) + \rho([A,B])$$

on tire, par récurrence sur n , la formule :

$$(7) \qquad (\rho(A) - \lambda(A))^n \rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A))^n + \sum_{s=0}^{s=n-1} (\rho(A) - \lambda(A))^{n-s-1} \rho([A,B])(\rho(A) - \lambda(A))^s$$

Appliquons cette formule à $a \in V(A,\lambda(A))$, avec $n > 2 \dim.V(A,\lambda(A))$. Tous les termes du membre de droite sont nuls : c'est évident pour le premier, ainsi que pour tous ceux correspondant à $s \geqslant \dim.V(A,\lambda(A))$. Pour les autres, on remarque que $\rho(A) - \lambda(A)$ laisse stable $V(A,\lambda(A))$, et qu'il en est de même de $\rho([A,B])$, puisque $(\mathrm{ad}\ A)^{k-1} [A,B] = 0$; on a donc à appliquer $(\rho(A)-\lambda(A))^{n-s-1}$ à un élément de $V(A,\lambda(A))$, ce qui donne bien 0 puisque $s < \dim.V(A,\lambda(A))$. Le membre de gauche est donc également nul, ce qui prouve bien que $\rho(B)\, a \in V(A,\lambda(A))$, et achève la démonstration de 1).

La seconde assertion du théorème est évidente, compte tenu du théorème de Lie.

Démontrons 3). Tout d'abord, la somme des V^λ est <u>directe</u>. Car soient λ_1 , ..., λ_r les différents poids ; puisque le corps de base K est infini, il y a $A \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda_i(A) \neq \lambda_j(A)$ si $i \neq j$; d'après les propriétés connues des endomorphismes, la somme des $V(A,\lambda_i(A))$ est directe, et il en est de même des $V^{\lambda_i} \subset V(A,\lambda_i(A))$.

Reste à voir que $V = \sum V^\lambda$, ce que nous ferons par récurrence sur $\dim.V$, le cas $\dim.V = 0$ étant trivial. Distinguons deux cas : ou bien tous les $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{h}$, ont une seule valeur propre $\lambda(A)$, qui est un poids d'après d'après le théorème de Lie, donc est linéaire sur $\mathfrak{h}$, et $V = V^\lambda$; ou bien il existe $A \in \mathfrak{h}$ tel que $\rho(A)$ ait deux valeurs propres distinctes $\lambda_1(A)$ et $\lambda_2(A)$, et dans ce cas V est somme directe des $V(A,\lambda_i(A))$, qui sont des sous-espaces stables de V, de dimensions $< \dim. V$, et auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence ; il en résulte immédiatement que $V = \Sigma V^{\lambda}$,

C.Q.F.D.

2.- Sous-algèbres de Cartan.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. On appliquera les définitions et résultats du paragraphe 1 à la représentation adjointe ρ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Un poids de ρ est dit une racine de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. Dire que α est une racine équivaut donc à dire qu'il existe $G \in \mathfrak{g}$, $G \neq 0$, avec

(8) $$[H,G] = \alpha(H)\, G \quad \text{pour tout} \quad H \in \mathfrak{h}$$

D'après le théorème précédent, $\mathfrak{g}$ est somme directe de sous-espaces $\mathfrak{g}^{\alpha}$ correspondant aux différentes racines α de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. On notera que, puisque $\mathfrak{h}$ est nilpotente, on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$; plus généralement, toute algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ est contenue dans $\mathfrak{g}^0$.

Lemme 1.- $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Corollaire. $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Par linéarité, il suffit de montrer que $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $Y \in \mathfrak{g}^{\beta} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Or, on a :

$$(\operatorname{ad} H - \alpha(H) - \beta(H))[X,Y] = [(\operatorname{ad} H - \alpha(H))X, Y] + [X, (\operatorname{ad} H - \beta(H)).Y] ,$$

et plus généralement (formule de Leibniz)

$$(\operatorname{ad} H - \alpha(H) - \beta(H))^n [X,Y] = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} [(\operatorname{ad} H - \alpha(H))^p X , (\operatorname{ad} H - \beta(H))^{n-p} Y] ,$$

d'où aussitôt le résultat cherché.

Définition 1.- On dit qu'une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est régulière (ou que c'est une sous-algèbre de Cartan) si $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

D'après ce qui précède, une telle sous-algèbre est nécessairement une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathfrak{g}$ (la réciproque étant inexacte en général).

Définition 2.- Un élément $X \in \mathfrak{g}$ est dit régulier si $\dim. \mathfrak{g}(X,0)$ est minima.

Théorème 2.- Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, contenant un élément régulier H. Alors $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de Cartan et l'on a $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(H,0)$.

(En appliquant ce théorème à une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension 1, engendrée par un élément régulier, on voit que <u>toute algèbre de Lie possède des sous-algèbres de Cartan</u>).

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$, et soit $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Si $X \in \mathfrak{g}^0$, ad X conserve chaque $\mathfrak{g}^\alpha$ (lemme 1), donc conserve $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit $d(X)$ le déterminant de ad X dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. Je dis que $d(X)$ n'est pas identiquement nul dans $\mathfrak{g}^0$; en effet, il existe $H \in \mathfrak{h}$ avec $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \neq 0$, et ad H n'ayant pas de valeur propre nulle dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on a $d(H) \neq 0$; comme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$; ceci démontre notre assertion. Soit alors X un élément de $\mathfrak{g}^0$ tel que $d(X) \neq 0$; la restriction de ad X à $\tilde{\mathfrak{g}}$ a toutes ses valeurs propres $\neq 0$; donc $\mathfrak{g}(X,0) \subset \mathfrak{g}^0$; comme on a $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}(H,0)$, le caractère minimal de $\mathfrak{g}(H,0)$ montre que l'on a

(9) $$\mathfrak{g}(X,0) = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(H,0)$$

Il s'ensuit que ad X est nilpotent dans $\mathfrak{g}^0$, ce qui se traduit par :

(10) $$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}^0} (\mathrm{ad}\ X)^p = 0 \quad \text{pour tout } p \geqslant 1 \quad .$$

Mais le membre de gauche de la formule (10) est un polynôme par rapport aux composantes de X ; ce qui précède montre que ce polynôme est nul chaque fois que le polynôme $d(X)$ est $\neq 0$. D'après le principe de prolongement des identités algébriques, ce polynôme est identiquement nul, autrement dit, la formule (10) est valable pour <u>tout</u> $X \in \mathfrak{g}^0$, ce qui montre que ad X est nilpotent, donc que $\mathfrak{g}^0$ est une algèbre <u>nilpotente</u>. Enfin $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de Cartan, car du fait que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$, on a $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^0,0) \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{h},0) = \mathfrak{g}^0$.

<u>Remarque</u>. Le procédé précédent fournit <u>toutes</u> les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$; on peut en effet démontrer que deux sous-algèbres de Cartah de $\mathfrak{g}$ peuvent être transformées l'une dans l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathfrak{h}$ désignera une <u>sous-algèbre de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$, choisie une fois pour toutes. On a donc

(11) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$$

On désignera par $\nu(\alpha)$ la dimension de $\mathfrak{g}^\alpha$.

<u>Lemme 2.- Soient</u> H <u>et</u> H' <u>deux éléments de</u> $\mathfrak{h}$, <u>et soit</u> B <u>la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$. <u>On a alors</u> $B(H,H') = \sum_\alpha \nu(\alpha)\,\alpha(H)\,\alpha(H')$.

Il suffit de faire la démonstration lorsque $H' = H$: le cas général s'en déduira par polarisation. Or ad H a dans $\mathfrak{g}^\alpha$ la seule valeur propre $\alpha(H)$; d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ H)^2 = \sum_\alpha \nu(\alpha)\,\alpha(H)^2$.

Lemme 3.- Soient φ et α deux racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$, avec $\alpha \neq 0$. Soit p un entier $\leqslant 0$ tel que $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+p\alpha}] = 0$, et soit q un entier $\geqslant 0$ tel que $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+q\alpha}] = 0$. Soit $H \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$.

Soit $r = (\sum_{k=p}^{k=q} k\,\nu(\varphi+k\alpha)) / (\sum_{k=p}^{k=q} \nu(\varphi+k\alpha))$ (12).

On a alors $\varphi(H) = r\alpha(H)$.

(Comme les racines de $\mathfrak{g}$ sont en nombre fini, il existe toujours des entiers p et q vérifiant les hypothèses ci-dessus ; il s'ensuit que φ est proportionnelle à α sur $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$).

Posons $V = \sum_{k=p}^{k=q} \mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$, et soit $H = [X,Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ (par linéarité, il suffit de prouver le lemme pour de tels éléments H). Comme ad X applique $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ dans $\mathfrak{g}^{\varphi+(k+1)\alpha}$, V est stable pour ad X, et de même pour ad Y. Comme ad H = [ad X , ad Y], il s'ensuit que V est stable pour ad H et que $\mathrm{Tr}_V(\mathrm{ad}\ H) = 0$. Mais la seule valeur propre de ad H dans $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ est $\varphi(H) + k\alpha(H)$; d'où

$$\sum_{k=p}^{k=q} \nu(\varphi+k\alpha)(\varphi(H)+k\alpha(H)) = 0, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(On observera que le dénominateur de r est bien $\neq 0$, car c'est la somme de $\nu(\varphi) > 0$ et d'entiers $\geqslant 0$).

Montrons, à titre d'intermède, comment le lemme précédent permet de retrouver le critère de Cartan.

Théorème 3.- Si la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est identiquement nulle, $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Il suffit de montrer que, si la forme de Killing B est nulle, la relation $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entraîne $\mathfrak{g} = 0$, car alors si $\mathfrak{g} \neq 0$ $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ mais la forme de Killing de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est induite par celle de $\mathfrak{g}$ donc = 0 et il en résulte que la suite des dérivées de $\mathfrak{g}$ décroit.

Comme $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha} \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a alors $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha,\beta} [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}]$, d'où (lemme 1)

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] + \sum_{\alpha \neq 0} [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}] .$$

Soit φ une racine de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. On a évidemment $\varphi = 0$ sur $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Montrons que $\varphi = 0$ sur $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$. D'après le lemme 3, il existe un nombre rationnel r_φ tel que $\varphi(H) = r_\varphi \alpha(H)$ pour tout $H \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$; d'autre part, d'après le lemme 2, on a :

$$0 = B(H,H) = \sum_{\varphi} \nu(\alpha)\,\varphi(H)^2 = \alpha(H)^2 \sum_{\varphi} \nu(\varphi)\, r_\varphi^2 .$$

Distinguons alors deux cas : a). $\alpha(H) = 0$, auquel cas $\varphi(H) = 0$;
b). $\alpha(H) \neq 0$, auquel cas la formule ci-dessus montre que $r_\varphi = 0$ pour tout φ , d'où encore $\varphi(H) = 0$. Ainsi toutes les racines φ sont nulles sur $\mathfrak{h}$, ce qui montre que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, donc que $\mathfrak{g}$ est nilpotente, et la relation $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entraîne alors $\mathfrak{g} = 0$.

Le théorème précédent entraîne immédiatement le critère de semi-simplicité de Cartan, (cf. Exposé n° 6).

3.- <u>Structure des algèbres semi-simples</u>.

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie <u>semi-simple</u>, et $\mathfrak{h}$ une <u>sous-algèbre de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$.

On munira $\mathfrak{g}$ du produit scalaire $\langle X,Y\rangle = B(X,Y)$ (forme de Killing). Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, ce produit scalaire est non dégénéré (et c'est la seule propriété des algèbres semi-simples que l'on utilisera).

<u>Lemme</u> 1.- <u>Si</u> $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}^\alpha$ <u>est orthogonal à</u> $\mathfrak{g}^\beta$.

2.- <u>Le produit scalaire</u> $\langle X,Y\rangle$ <u>met en dualité les espaces</u> $\mathfrak{g}^\alpha$ <u>et</u> $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^\beta$, ad X . ad Y applique $\mathfrak{g}^\gamma$ dans $\mathfrak{g}^{\gamma+\alpha+\beta}$; si donc $\alpha + \beta \neq 0$, la matrice de ad X . ad Y par rapport à la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}^\gamma$ n'a que des zéros sur la diagonale principale, d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X \,.\, \mathrm{ad}\, Y) = 0$, ce qui démontre 1.. Si maintenant $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, ce qui précède montre que X est orthogonal à $\mathfrak{g}$ tout entier, d'où $X = 0$, ce qui démontre 2..

<u>Proposition 1</u>.- <u>La restriction à</u> $\mathfrak{h}$ <u>de la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est non dégénérée</u> ; $\mathfrak{h}$ <u>est une algèbre abélienne</u> ; <u>si</u> $r = \dim. \mathfrak{h}$, <u>il existe</u> r <u>racines linéairement indépendantes</u>.

Le fait que $\langle X,Y\rangle$ soit non dégénéré sur $\mathfrak{h}$ est un cas particulier du lemme précédent (en faisant $\alpha = 0$) ; si maintenant il n'existait pas r racines linéairement indépendantes, on pourrait trouver $H \in \mathfrak{h}$, $H \neq 0$, tel que $\alpha(H) = 0$ pour toute racine α ; mais alors, si $H' \in \mathfrak{h}$, on aurait $\langle H,H'\rangle = \sum_\alpha \nu(\alpha)\,\alpha(H)\,\alpha(H') = 0$, et H serait orthogonal à $\mathfrak{h}$, ce qui est absurde. Comme toute racine s'annule sur $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, ceci démontre en même temps que $\mathfrak{h}$ est abélienne.

Puisque $\langle X,Y\rangle$ est non dégénéré sur $\mathfrak{h}$, pour tout élément λ du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, il existe un élément et un seul $H'_\lambda \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda(H) = \langle H,H'_\lambda\rangle$

(on écrira parfois $H'_\lambda = \lambda$, identifiant ainsi $\mathfrak{h}$ à son dual). On peut introduire un produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*$ en posant :

(13) $$\langle\lambda,\mu\rangle = \langle H'_\lambda , H'_\mu\rangle = \lambda(H'_\mu) = \mu(H'_\lambda) .$$

Choisissons maintenant dans chaque $\mathfrak{g}^\alpha$ un vecteur propre E_α pour $\mathfrak{h}$, $E_\alpha \neq 0$. On a donc :

(14) $$[H,E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha \quad \text{pour tout} \quad H \in \mathfrak{h}$$

Si α est une racine $\neq 0$, et si $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, on va montrer que

(15) $$[E_\alpha , X] = \langle E_\alpha , X\rangle H'_\alpha$$

Les deux membres de (15) sont des éléments de $\mathfrak{h}$; pour vérifier qu'ils sont égaux, il suffit donc de montrer qu'ils ont même produit scalaire avec un élément arbitraire $H \in \mathfrak{h}$. Or, on a :

$$\langle H,[E_\alpha,X]\rangle = \langle [H,E_\alpha],X\rangle = \alpha(H)\langle E_\alpha,X\rangle = \langle E_\alpha,X\rangle\langle H'_\alpha,H\rangle \quad , \text{ C.Q.F.D.}$$

Montrons que, <u>si</u> α <u>est une racine</u> $\neq 0$, <u>on a</u> $\langle\alpha,\alpha\rangle \neq 0$:

Puisque $\langle X,Y\rangle$ met en dualité $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, il existe un $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $\langle E_\alpha ,X\rangle = 1$, d'où $[E_\alpha ,X] = H'_\alpha$, d'après (15). Mais on a $[E_\alpha,X] \in [\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^{-\alpha}]$; le lemme 3 du paragraphe 2 montre alors qu'il existe un nombre rationnel r_φ tel que $\varphi(H'_\alpha) = r_\varphi\alpha(H'_\alpha)$, φ étant une racine de $\mathfrak{g}$. Si l'on avait $\langle\alpha,\alpha\rangle = \alpha(H'_\alpha) = 0$, on en conclurait que $\varphi(H'_\alpha) = 0$ pour toute racine φ , d'où $H'_\alpha = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha \neq 0$.

<u>Proposition 2</u>.- <u>On a</u> $\dim.\mathfrak{g}^\alpha = 1$ <u>si</u> α <u>est une racine</u> $\neq 0$.

Soit encore $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha,X] = H'_\alpha$. Si Y est un élément de $\mathfrak{g}^\alpha$ nous devons montrer que Y est proportionnel à E_α .

Posons $Y_k = (\mathrm{ad}\, E_\alpha)^k\, Y$. On a $Y_k \in \mathfrak{g}^{(k+1)\alpha}$. Calculons $[X,Y_k]$. Tout d'abord $[X,Y_1] = [X,(\mathrm{ad}\, E_\alpha)Y] = -[E_\alpha ,[Y,X]] - [Y,[X,E_\alpha]]$.

On a $[X,Y] = H \in \mathfrak{h}$; le premier terme est donc $-\alpha(H)\, E_\alpha$, et le deuxième terme est $-[H'_\alpha ,Y]$, d'où :

(16) $$[X,Y_1] = -\alpha(H)\, E_\alpha - [H'_\alpha ,Y]$$

Par récurrence sur k , on démontre que, si $k \geqslant 2$, on a :

(17) $$[X,Y_k] = \frac{k(k-1)}{2}\alpha(H')\, Y_{k-1} - k[H'_\alpha ,Y_{k-1}]$$

Soit k le plus petit entier tel que $Y_k = 0$ (un tel entier existe certainement du fait que Y_k appartient à $\mathfrak{g}^{(k+1)\alpha}$). Supposons d'abord que $k \geqslant 2$; alors la formule (17) montre que Y_{k-1} est vecteur propre pour ad H'_α , la valeur propre correspondante étant $\frac{1}{2}(k-1)\,\alpha(H'_\alpha)$; mais puisque $Y_{k-1} \in \mathfrak{g}^{k\alpha}$, cette valeur propre doit être égale à $k\alpha(H'_\alpha)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $k \geqslant 2$, parce que $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$. Donc $Y_1 = 0$, et la formule (16) montre que

$$[H'_\alpha \, , \, Y] = -\alpha(H)\, E_\alpha \qquad (18)$$

Posons $Z = \alpha(H'_\alpha)\, Y + \alpha(H)\, E_\alpha$. On a $[H'_\alpha \, , \, Z] = 0$, ce qui montre que Z est vecteur propre de ad H'_α avec la valeur propre 0 ; comme $Z \in \mathfrak{g}^\alpha$, on en conclut que $Z = 0$, et Y est bien proportionnel à E_α , C.Q.F.D.

Corollaire. Les propriétés suivantes caractérisent les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$:

a) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$.

b) Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, ad H est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$.

Les conditions a) et b) sont vérifiées par toute sous-aglèbre de Cartan, d'après ce qui précède, Inversement, si $\mathfrak{h}$ vérifie a) et b), chacun des sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ de la décomposition de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ est formé des vecteurs propres correspondant à la racine α ; en particulier, tout élément de $\mathfrak{g}^0$ commute à $\mathfrak{h}$, et la condition a) entraîne que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, donc que $\mathfrak{h}$ est bien une sous-algèbre de Cartan.