DAVID KURTZ

Une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles de type (II)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 35 (2001), p. 98-119

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2001__35__98_0>

Une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles de type (II)

David Kurtz*

Résumé

Dans [AE2], les auteurs définissent les martingales d'Azéma bidimensionnelles puis obtiennent une classification de ces processus en trois types distincts. Les martingales des types (I) et (III) y sont, de plus, caractérisées par des propriétés géométriques de leurs trajectoires. Nous proposons dans ce travail une caractérisation des martingales du type (II) faisant, elle aussi, intervenir la géométrie du problème.

1 Introduction et notations

La théorie des équations de structure vectorielles développée par Attal et Émery dans [AE1] permet de définir les martingales d'Azéma multidimensionnelles. En dimension 2, ces processus sont étudiés par ces mêmes auteurs dans [AE2]. Dans cet article, ils proposent une classification des martingales d'Azéma bidimensionnelles en trois types distincts. Ils caractérisent, en outre, les martingales des types (I) et (III) par des propriétés géométriques de leurs trajectoires (voir théorème 3.2 ci-dessous).

Après quelques rappels et compléments sur les équations de structure vectorielles et les martingales d'Azéma multidimensionnelles, nous étudions quelques propriétés de ces objets qui sont spécifiques à la dimension 2. Nous définissons ensuite les semimartingales formellement à variation finie puis nous présentons quelques unes de leurs propriétés élémentaires. Nous serons alors en mesure de donner la caractérisation suivante des martingales d'Azéma du type (II) : une martingale d'Azéma bidimensionnelle est du type (II) si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts.

Suivant les notations de [AE1], nous notons E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle, g la forme bilinéaire définie sur $E \times E$ par le produit scalaire euclidien et $\|e\|$ la norme euclidienne du vecteur e; la forme g est un élément du produit tensoriel $E^* \otimes E^*$, où E^* désigne le dual de E. L'isomorphisme canonique entre E et son dual E^* permet de munir E^* d'une structure d'espace euclidien. Nous notons g^* la forme bilinéaire définie sur $E^* \times E^*$ par le produit scalaire; c'est un élément de $E \otimes E$. Les coordonnées sur E, dans un repère orthonormé, sont notées $(x^1, \ldots, x^n)$ ou (x, y) si $n = 2$.

Tous les processus considérés sont définis sur un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Toutes les martingales étudiées sont

*IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, <David.Kurtz@math.u-strasbg.fr>

supposées continues à droite et pourvues de limite à gauche (càd-làg) *partout*. Nous notons μ la mesure $\mathrm{d}t \otimes \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, m le processus défini par $m(t) = t$ et nous convenons que tous les crochets et intégrales stochastiques sont pris nuls en zéro. Les relations entre v.a. sont valables à $\mathbb{P}$-équivalence près. De même et sauf mention expresse du contraire, les relations entre processus sont valables à ensemble évanescent près.

2 Équations de structure vectorielles

Martingales normales

Une martingale X à valeurs dans E est dite *normale* si le processus $X \otimes X - g^*m$, à valeurs dans $E \otimes E$, est une martingale. Dans un repère orthonormé, cette définition équivaut à la condition $\langle X^i, X^j \rangle = \delta^{ij} m$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$, où δ^{ij} désigne le symbôle de Kronecker. Lorsque de plus X possède la propriété de représentation prévisible, la martingale $[X, X] - g^*m$ est une intégrale stochastique par rapport à X. Il existe donc un tenseur prévisible H à valeurs dans $E^* \otimes E \otimes E$, intégrable relativement à X dans le domaine des martingales locales et tel que

$$[X, X] = g^*m + \int H \,\mathrm{d}X. \tag{1}$$

En coordonnées, cette équation s'écrit (en utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices croisés)

$$[X^i, X^j] = \delta^{ij} m + \int H^{ij}_k \,\mathrm{d}X^k. \tag{2}$$

Ces formules s'appellent une *équation de structure vectorielle*. Le tenseur prévisible H apparaissant dans de telles équations est défini par la martingale X à l'équivalence μ-presque sûre près et est μ-presque partout *doublement symétrique* (voir ci-dessous pour la définition d'un tel tenseur et [AE1, proposition 3]). Lorsque ce tenseur est fonction de la limite à gauche X_-, l'équation de structure correspondante est dite *markovienne*.

Tenseurs doublement symétriques et systèmes droits

Considérons un élément H de $E^* \otimes E \otimes E$, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $E \otimes E$. Ce tenseur est dit *doublement symétrique* si ses coordonnées $(H^{ij}_k)_{1 \leq i,j,k \leq n}$ dans un repère orthonormé vérifient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rl} H^{ij}_k & \text{est symétrique en } i, j, k, \\ H^{ij}_k H^{kl}_m & \text{est symétrique en } i, j, l, m. \end{array} \right. \tag{3}$$

Les tenseurs doublement symétriques sont les tenseurs qui se diagonalisent dans une base orthonormée (cf. [AE1, théorème 1]). Plus précisément, nous pouvons associer à un tel tenseur H une unique partie Σ de E, composée de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux, telle que

$$H = \sum_{\sigma \in \Sigma} \|\sigma\|^{-2} \sigma^* \otimes \sigma \otimes \sigma. \tag{4}$$

La partie Σ s'appelle *système droit* associé à H et est constituée des vecteurs x de $E \setminus \{0\}$ tels que $H(x) = x \otimes x$ (cf. [AE1, corollaire 1]). Nous associons au système droit Σ le vecteur

(5) $$\delta = -\sum_{\sigma \in \Sigma} \|\sigma\|^{-2} \sigma,$$

et l'application linéaire de $E \otimes E$ dans E

(6) $$\psi = \sum_{\sigma \in \Sigma} \|\sigma\|^{-4} \sigma^* \otimes \sigma^* \otimes \sigma.$$

Si le cardinal de l'ensemble Σ est égal à la dimension de l'espace euclidien E, nous disons que le tenseur H est *non dégénéré.* Il est aisé de vérifier que, si H est non dégénéré, les relations suivantes sont vérifiées :

(7) $$\psi \circ H = \mathrm{id}, \quad \psi(g^*) = -\delta.$$

Remarquons encore que les applications $H \mapsto \delta$ et $H \mapsto \psi$, définies sur l'ensemble des tenseurs doublement symétriques, sont de classe de Baire un et que leurs restrictions à l'ensemble des tenseurs doublement symétriques H tels que $\operatorname{Card} \Sigma = l$ $(1 \leq l \leq n)$ (qui est une sous-variété de l'espace vectoriel $E^* \otimes E \otimes E$) sont de classe C^∞ (voir [AE1, proposition 2]).

Propriétés des solutions d'une équation de structure

Soit X une martingale normale à valeurs dans E et solution de l'équation de structure (1). Notons $\Sigma(t)$ le système droit associé au tenseur doublement symétrique $H(t)$ et Π_t la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\Sigma(t)^\perp$ de E. Nous rappelons que, d'après la proposition 3 de [AE1], la martingale X est quasi-continue à gauche, que si T est un instant de saut (supposé fini) de X, nous avons $\Delta X_T \in \Sigma(T)$, et que la partie martingale continue de X est donnée par la formule :

(8) $$X^c = \int \Pi(\mathrm{d}X).$$

Les égalités (5) et (6) nous permettent d'associer au processus prévisible H deux nouveaux processus prévisibles : le processus δ à valeurs dans E et le processus ψ à valeurs dans $E^* \otimes E^* \otimes E$. Suivant Taviot (voir [Tav]), nous appelerons *dérive* de X le premier de ces processus. La justification de cette terminologie est contenue dans le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1 *Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Supposons que le tenseur prévisible H soit non dégénéré μ-presque partout sur l'intervalle stochastique $]\!]S, T[\![$ et que cet intervalle ne contienne aucun instant de saut de X. Dans ce cas, nous avons*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \, \mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \delta \, \mathrm{d}m.$$

PREUVE Au vu de la formule (8), la condition de non dégénérescence entraîne que $\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X^c = 0$. Par suite, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}[X,X] = \sum_{S\wedge\cdot<s\leq T\wedge\cdot} \Delta X_s \otimes \Delta X_s = \Delta X_T \otimes \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,.$$

L'équation de structure (1) nous conduit alors à

$$g^* \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}m + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} H\,\mathrm{d}X = \Delta X_T \otimes \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,,$$

et en intégrant le processus prévisible ψ relativement à la semimartingale vectorielle $g^*m + \int H\,\mathrm{d}X$, il vient

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X = \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\delta\,\mathrm{d}m + \psi_T(\Delta X_T \otimes \Delta X_T)\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,,$$

puisque les égalités $\psi \circ H = \mathrm{id}$ et $\psi(g^*) = -\delta$ sont vraies μ-presque partout sur $]\!]S,T]\!]$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la relation $\Delta X_T \in \Sigma(T) \cup \{0\}$ entraîne $\psi_T(\Delta X_T \otimes \Delta X_T) = \Delta X_T$ et le résultat. ■

Formule de compensation

Dans sa thèse de doctorat, Taviot a calculé explicitement le système de Lévy d'une martingale normale X vérifiant l'équation de structure (1) (voir [Tav, théorème 3.1.2]). Nous rappelons ici ce résultat et quelques unes de ses conséquences.

Le processus X est toujours une martingale normale solution de l'équation de structure (1). La formule de compensation suivante est vérifiée pour tout temps d'arrêt T et tout processus positif h défini sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, prévisible en (ω, t) et s'annulant au point 0 de E:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{0<t\leq T} h(\,\cdot\,,t,\Delta X_t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{\sigma\in\Sigma(t)} \frac{h(\,\cdot\,,t,\sigma)}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{9}$$

Noter que la même formule est vraie pour un processus h non nécessairement positif pourvu que la v.a. $\sum_{0<t\leq T} |h(\,\cdot\,,t,\Delta X_t)|$ soit intégrable. Par exemple, si X est une martingale localement à variation intégrable, cette formule permet de calculer le compensateur prévisible C de la somme des sauts de X. Plus précisément, elle donne $C = -\int \delta\,\mathrm{d}m$.

De cette formule, Taviot a déduit une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur aléatoire de dérive δ pour qu'une telle martingale X n'ait qu'un nombre fini de sauts sur un intervalle borné. Il a prouvé que, presque sûrement, le nombre de sauts de X avant l'instant t est fini si, et seulement si, la fonction $s \mapsto \delta_s$ est de carré intégrable sur l'intervalle $[0,t]$ (voir [Tav, proposition 3.2.3]).

Nous terminons ces rappels généraux par un résultat affirmant que le temps passé par certaines martingales solutions d'équation de structure dans l'ensemble des points d'accumulation de leurs sauts est nul.

LEMME 2.2 *Soit X une martingale purement discontinue solution de l'équation de structure (1) supposée markovienne et à coefficients continus. Autrement dit, il existe* *une application $h : E \to E^* \otimes E \otimes E, x \mapsto h(x)$ dépendant continûment de x et telle que $H = h(X_-)$. Soit J l'ensemble optionnel $\{\Delta X \neq 0\}$. Alors, l'adhérence $\overline{J}$ de J est un ensemble μ-négligeable.*

PREUVE En considérant les temps d'arrêt $R_q = \inf\{t > q\,;\, \Delta X_t \neq 0\}$ ($q \in \mathbb{Q}_+$), nous pouvons écrire que $(\overline{J})^c = \bigcup_q]\!]q, R_q[\![$. Nous allons prouver que l'ensemble prévisible $A = \bigcup_q]\!]q, R_q]\!]$ contient J ce qui, en vertu de la formule de compensation, entraînera $\mu(A^c) = 0$ et le résultat puisqu'à un ensemble μ-négligeable près $A^c = \overline{J}$.

Il s'agit donc de montrer que l'ensemble prévisible $B = \{\int_{\cdot - 1/m}^{\cdot} \|\delta\|^2 = \infty, \forall m\}$ des points qui sont limite à gauche d'instants de saut de X ne contient aucun graphe d'instant de saut. Autrement dit et toujours en vertu de la formule de compensation, il suffit de prouver que $\mu(B) = 0$. Pour ce faire, nous allons vérifier que B est inclus dans l'ensemble prévisible $\{\mathrm{Card}\,\Sigma \leq n - 1\}$, où Σ est le système droit associé au tenseur doublement symétrique $h(X_-)$.

Soit $(t, \omega) \in B$. Il existe une suite t_m de réels tels que $t_m < t$, $t_m \uparrow t$ et $\Delta X_{t_m}(\omega) \neq 0$. La trajectoires $X_\cdot(\omega)$ étant càd-làg, nous avons $\Delta X_{t_m}(\omega) \to 0$. À chacun des systèmes droits $\Sigma(t_m, \omega)$ nous faisons alors correspondre un n-uplet $S_m = (s_m^1, \cdots, s_m^n)$ en choisissant un ordre sur ses éléments et en complétant par le vecteur nul autant de fois que nécessaire. Nous supposerons de plus que $s_m^1 = \Delta X_{t_m}(\omega)$. Puisque $\sum_{s \in S_m} \|s\|^2 = \|h(X_{t_m -})\|^2$ et $h(X_{t_m -}) \to h(X_{t-})$ (où l'espace $E^* \otimes E \otimes E$ est muni de la norme euclidienne usuelle), la suite (S_m) est relativement compacte dans E^n et à extraction d'une sous-suite près converge vers une limite $S = (0, s^2, \cdots, s^n)$. Il suffit alors de constater que $\{s \in S\,;\, s \neq 0\}$ est égal à $\Sigma(t, \omega)$, pour en déduire que $\mathrm{Card}\,\Sigma(t, \omega) \leq n - 1$.

Pour conclure, il suffit maintenant de remarquer que d'après la formule (8) l'ensemble $\{\mathrm{Card}\,\Sigma \leq n - 1\}$ est μ-négligeable dès que X est une martingale purement discontinue. ■

3 Le cas bidimensionnel

Généralités

Fixons un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ et remarquons qu'en vertu des conditions (3) un tenseur doublement symétrique de coordonnées $(H_k^{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ ne dépend que des quantités

$$(10) \qquad p = H_1^{11}, \quad q = H_2^{22}, \quad r = H_2^{11} = H_1^{21} = H_1^{12}, \quad s = H_1^{22} = H_2^{12} = H_2^{21},$$

qui doivent vérifier la relation

$$(11) \qquad ps + qr = r^2 + s^2.$$

(Pour plus de détails sur cet argument le lecteur pourra se reporter à [AE2, p. 11]). Par suite, les martingales solutions d'une équation de structure bidimensionnelle sont les martingales normales Z dont les coordonnées (X, Y) dans un repère orthonormé vérifient

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}[X,X]_t &= \mathrm{d}t + P_t\,\mathrm{d}X_t + R_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t &= \phantom{\mathrm{d}t +{}} R_t\,\mathrm{d}X_t + S_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t &= \mathrm{d}t + S_t\,\mathrm{d}X_t + Q_t\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{cases}$$

où P, Q, R et S sont quatre processus prévisibles vérifiant μ-presque partout la relation

$$PS + QR = R^2 + S^2. \tag{13}$$

Nous pouvons donner des formules explicites pour les coordonnées de la partie martingale continue d'un tel processus. C'est le contenu de la proposition suivante dont seule la seconde partie sera utilisée dans la suite.

PROPOSITION 3.1 *Soit Z une martingale normale dont les coordonnées (X, Y) vérifient l'équation de structure (12). La partie martingale continue de Z est donnée par les formules suivantes :*

$$X^c = \int \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{y_\sigma^2}{\|\sigma\|^2} \right) \mathrm{d}X - \int \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2} \,\mathrm{d}Y,$$

$$Y^c = \int \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma^2}{\|\sigma\|^2} \right) \mathrm{d}Y - \int \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2} \,\mathrm{d}X,$$

où $\sigma = (x_\sigma, y_\sigma)$ désigne l'unique élément de Σ lorsque $\mathrm{Card}\,\Sigma = 1$. *De plus, nous avons*

$$\mathbb{E}[(X_t^c)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \left(\frac{y_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \right) \mathrm{d}s \right],$$

$$\mathbb{E}[(Y_t^c)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \left(\frac{x_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \right) \mathrm{d}s \right].$$

PREUVE D'après la formule (8), nous savons que $\mathrm{d}Z^c = \Pi(\mathrm{d}Z)$, où Π est la projection orthogonale sur le sous espace $\Sigma^\perp$ de E. Or

$$\Pi = \begin{cases} \mathrm{id}, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 0 \\ \Pi_\sigma\,, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 1 \text{ et } \Sigma = \{\sigma\} \\ 0, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 2, \end{cases}$$

où Π_σ désigne la projection sur $\{\sigma\}^\perp$. Il suffit alors de remarquer que

$$\Pi_\sigma(x, y) = \left(\frac{x y_\sigma^2 - y x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2}, \quad \frac{y x_\sigma^2 - x x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2} \right),$$

pour en déduire la première partie de la proposition. Puisque $\langle X, Y \rangle = 0$, nous pouvons de plus écrire que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^c)^2] &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^2} \right) \mathrm{d}X_s \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{x_{\sigma_s} y_{\sigma_s}}{\|\sigma_s\|^2} \,\mathrm{d}Y_s \right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^2} \right)^2 \mathrm{d}s \right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \,\mathrm{d}s \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \left(\frac{y_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \right) \mathrm{d}s \right].
\end{aligned}$$

L'espérance de $(Y_t^c)^2$ se calcule de la même manière. ■

Martingales d'Azéma

Une martingale normale X à valeurs dans E est une *martingale d'Azéma* si elle vérifie, dans tout repère orthonormé, une équation de structure markovienne de la forme

$$\mathrm{d}[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}\,\mathrm{d}t + \varphi_k^{ij}(X_{t-})\,\mathrm{d}X_t^k, \tag{14}$$

où les φ_k^{ij} sont n^3 fonctions affines sur E telles que μ-presque partout le tenseur $\varphi(X_-)$ soit doublement symétrique. En dimension un, cette équation se réduit à

$$\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + (\alpha + \beta X_{t-})\,\mathrm{d}X_t\,. \tag{15}$$

Émery a montré que, pour toute condition initiale $X_0 = x$, cette équation admettait une solution unique en loi : la martingale d'Azéma unidimensionnelle de paramètres α et β (voir [Éme]).

Les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont, quant à elles, les martingales normales Z dont les coordonnées (X,Y) dans un repère orthonormé vérifient

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} \mathrm{d}[X,X]_t & = & \mathrm{d}t & + & p(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t & = & & & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t & = & \mathrm{d}t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & q(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array}\right. \tag{16}$$

où p, q, r et s sont quatre fonctions affines sur $\mathbb{R}^2$ telle que la relation suivante soit vraie μ-presque partout :

$$p(Z_-)s(Z_-) + q(Z_-)r(Z_-) = r(Z_-)^2 + s(Z_-)^2. \tag{17}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de l'article [AE2] (théorème 2, p. 14). Il établit une classification des martingales d'Azéma bidimensionnelles en trois types et caractérise les martingales des types (I) et (III) par des propriétés géométriques de leurs trajectoires.

THÉORÈME 3.2 *Les martingales bidimensionnelles dont les coordonnées dans un repère orthonormé satisfont à l'équation de structure markovienne (16) peuvent être classées en trois types.*

Le type (I) contient les martingales d'Azéma dont tous les sauts sont parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes orthogonales.

Le type (II) est formé des martingales d'Azéma telles qu'il existe un repère orthonormé dans lequel leurs coordonnées vérifient l'équation de structure (16) avec $r - q = s = 0$, sans que p et r ne soient colinéaires.

Pour toute condition initiale dans $\mathbb{R}^2$, les équations de structure (16) correspondant aux types (I) et (II) admettent une solution.

Le type (III) est constitué des martingales d'Azéma qui vivent dans la réunion de deux droites orthogonales et qui ne sont pas du type (I). Dans ce cas, étant donné une condition initiale z dans $\mathbb{R}^2$, l'équation de structure correspondante admet une solution si, et seulement si, z appartient à la réunion de ces deux droites.

Détermination de systèmes droits

La fin de cette section contient la partie calculatoire de ce travail. Nous y montrons une propriété géométrique du système droit associé à un tenseur doublement symétrique de dimension 2. Cette propriété nous permettra, entre autres choses, le calcul explicite du système droit et du vecteur de dérive associés à certains tenseurs doublement symétriques.

Dans la suite H désigne un tenseur doublement symétrique de dimension 2 et (les notations étant celles de la formule (10)) (p, q, r, s) ses coordonnées dans un repère orthonormé fixé une fois pour toute. Rappelons que, dans ce ce cas, la relation $ps+qr = r^2 + s^2$ est vérifiée. Le système droit associé à un tel tenseur est l'ensemble Σ des vecteurs z appartenant à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et tels que $H(z) = z \otimes z$, autrement dit est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x, y) vérifient le système suivant :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{lcll} x^2 & = & px + ry & \text{(i)} \\ xy & = & rx + sy & \text{(ii)} \\ y^2 & = & sx + qy & \text{(iii)} \\ (x, y) & \neq & (0, 0) & \text{(iv).} \end{array} \right.$$

Désignons par A et B les points du plan de coordonnées respectives (p, r) et (s, q), par $\mathcal{C}$ le cercle centré au milieu du segment $[A, B]$ et passant par l'origine $O = (0, 0)$ et par $\mathcal{D}$ la droite (passant par A et B) d'équation

$$(19) \qquad \begin{array}{rcll} sx - ry & = & ps - r^2 = s^2 - qr, & \text{si } (r, s) \neq (0, 0) \\ qx + py & = & pq, & \text{si } r = s = 0. \end{array}$$

La droite $\mathcal{D}$ n'est pas définie si $p = q = r = s = 0$ et nous convenons que dans ce cas $\mathcal{D}$ est le plan tout entier.

PROPOSITION 3.3 *L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les équations (i), (ii) et (iii) ci-dessus est* $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \cup \{O\}$.

PREUVE Commençons par traiter les cas triviaux. Si $p = q = r = s = 0$, nous avons $\mathcal{C} = \{O\}$ et O est la seule solution du système. Si $r = s = 0$ et $(p, q) \neq (0, 0)$, il est aisé de vérifier que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A, B\}$ et que les solutions du système sont $\{A, B, O\}$.

Supposons maintenant que $(r, s) \neq (0, 0)$ et soit (x, y) une solution non nulle du système. En ajoutant membre à membre (i) et (iii), nous obtenons $(x, y) \in \mathcal{C}$. En multipliant (i) par s et (ii) par $-r$ puis en additionnant ces deux nouvelles équations, nous obtenons

$$x(sx - ry) = (ps - r^2)x = (s^2 - qr)x.$$

De même, en multipliant (ii) par s et (iii) par $-r$ puis en additionnant ces équations, il vient

$$y(sx - ry) = (s^2 - qr)y = (ps - r^2)y.$$

Puisque l'un au moins des réels x ou y est non nul, l'une de ces équations se simplifie en $(x, y) \in \mathcal{D}$.

Réciproquement, nous supposons toujours que $(r,s) \neq (0,0)$ et nous considérons un point $(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Il s'agit d'établir (i), (ii) et (iii). L'équation du cercle entraîne

$$r^2x^2 + r^2y^2 = r^2(p+s)x + r(r+q)ry.$$

En y remplacant ry par $sx - (ps - r^2)$ (équation de $\mathcal{D}$), nous trouvons

$$\begin{aligned}(r^2+s^2)x^2 - [2s(ps-r^2) + r^2(p+s) + rs(r+q)]x \\ + (ps-r^2)^2 + (ps-r^2)r(r+q) = 0,\end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$(r^2+s^2)x^2 - (r^2+s^2)(p+s)x + (r^2+s^2)(ps-r^2) = 0.$$

Donc $x^2 = (p+s)x - (ps-r^2) = (p+s)x - (sx-ry) = px + ry$, c'est-à-dire (i). Puis, l'égalité (iii) se déduit de (i) et de l'équation du cercle. Enfin, pour établir (ii), multiplions l'équation de $\mathcal{D}$ par x, puis remplaçons x^2 par $px + ry$, pour obtenir

$$rxy = r(rx + sy).$$

De même, en multipliant par y l'équation de $\mathcal{D}$ et en y remplaçant y^2 par $sx + qy$, nous obtenons

$$sxy = s(rx + sy).$$

Comme l'un au moins des réels r ou s est différent de zéro, nous en déduisons l'égalité (ii), ce qui achève cette preuve. ■

Nous terminons cette section en calculant le système droit et le vecteur de dérive associés à des tenseurs doublement symétriques ayant les mêmes propriétés que ceux apparaissant dans les équations de structure associées aux martingales d'Azéma de type (II).

COROLLAIRE 3.4 *Considérons un tenseur doublement symétrique H de coordonnées (p,q,r,s). Supposons que $r - q = s = 0$ et que $r \neq 0$. Dans ce cas, le système droit Σ est constitué de deux vecteurs σ_1 et σ_2 dont les coordonnées sont données par les formules suivantes :*

$$\sigma_1 = \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2}\,,\, r\right), \quad \sigma_2 = \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2}\,,\, r\right).$$

De plus, nous avons

$$\delta = -\left(\frac{\sigma_1}{\|\sigma_1\|^2} + \frac{\sigma_2}{\|\sigma_2\|^2}\right) = \left(0, -\frac{1}{r}\right).$$

Si $r - q = s = 0$, $r = 0$ et $p \neq 0$, le système droit Σ est constitué du seul vecteur $\sigma = (p,0)$ et dans ce cas $\delta = (-1/p, 0)$.

PREUVE Elle est immédiate compte tenu de la proposition 3.3. ■

4 Semimartingales formellement à variation finie

La théorie des semimartingales formelles a été developpée par Laurent Schwartz et exposée dans un article paru en 1981 (voir [Sch]). Dans cet article, Schwartz définit la classe des semimartingales formelles comme un espace de mesures vectorielles formelles à valeurs dans L^0 et définies sur la tribu prévisible. Nous n'aurons pas besoin d'entrer dans les considérations, essentiellement topologiques, des travaux de Schwartz et nous nous en tiendrons à une définition fonctionnelle, facile d'accès et d'utilisation. En outre, cette dernière ne fera intervenir que de véritables semimartingales.

DÉFINITION 4.1 *Une semimartingale X sera dite* formellement à variation finie *s'il existe un processus prévisible borné et strictement positif Φ tel que la semimartingale $\int \Phi \, \mathrm{d}X$ soit un processus à variation finie.*

Il est aisé de vérifier que nous pouvons remplacer dans la définition précédente la condition $\Phi > 0$ par Φ *différent de* 0. Nous pouvons, tout aussi bien, remplacer la condition Φ *borné* par Φ *intégrable relativement à X*. Remarquer que la partie martingale continue d'une semimartingale formellement à variation finie est nulle.

DÉFINITION 4.2 *Soit X une semimartingale formellement à variation finie. S'il existe un processus prévisible borné et strictement positif Φ tel que $\int \Phi \, \mathrm{d}X$ soit à variation finie et*

$$\int \Phi \, \mathrm{d}X = \sum_{0<s\leq \cdot} \Phi_s \Delta X_s \, ,$$

nous dirons que X est une semimartingale formellement à variation finie et somme de ses sauts.

Ici encore la condition Φ *strictement positif et borné* peut s'assouplir en Φ *ne s'annulant pas et intégrable relativement à X.*

LEMME 4.3 *Soient X une semimartingale formellement à variation finie et somme de ses sauts et $S \leq T$ deux temps d'arrêt tels que l'intervalle $]\!]S,T[\![$ ne contienne aucun instant de saut de X. Alors*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \, \mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \, .$$

PREUVE La semimartingale X étant formellement à variation finie et somme de ses sauts, il existe un processus borné et strictement positif Φ tel que $\int \Phi \, \mathrm{d}X = \sum \Phi \Delta X$. En particulier,

$$\int \Phi \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \, \mathrm{d}X = \Phi_T \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$$

et il ne reste plus qu'à intégrer le processus prévisible Φ^{-1} par rapport aux deux membres de l'égalité précédente pour trouver le résultat annoncé. ■

Les définitions ci-dessus se localisent sur un ensemble prévisible A: nous dirons qu'une semimartingale X est formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur A si la même propriété est vraie pour $\int \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}X$. La proposition suivante est très utile lorsqu'il s'agit de prouver qu'un processus est formellement à variation finie.

PROPOSITION 4.4 *Une semimartingale X est formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur un ensemble prévisible A s'il existe une suite (A_n) d'ensembles prévisibles recouvrant A telle que, pour chaque n, X soit formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur A_n.*

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant dû à Dellacherie (voir [Del]). Pour la commodité du lecteur, nous en reproduisons ici une preuve.

LEMME 4.5 *Soit (U_n) une suite de v.a. réelles (ou p.s. finies) et positives. Il existe une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que la v.a. $\sum_n \lambda_n U_n$ soit finie p.s.*

PREUVE Si U est une v.a. réelle positive alors, d'après le théorème de Lebesgue, $\mathbb{E}[\lambda X \wedge 1] \to 0$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Nous pouvons donc choisir une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que $\sum_n \mathbb{E}[\lambda_n U_n \wedge 1] < \infty$. D'après le théorème de Beppo-Levi, ceci entraîne que $\mathbb{E}[\sum_n (\lambda_n U_n \wedge 1)] < \infty$. Ainsi, la somme $\sum_n (\lambda_n U_n \wedge 1)$ est finie p.s. et le résultat s'en déduit immédiatement. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.4 Nous pouvons supposer, et ceci sans restreindre la généralité, que les A_n sont deux à deux disjoints et que $A_n \subset [0, n] \times \Omega$. Soient Φ_n des processus prévisibles vérifiant $0 < \Phi_n \leq 1$ et tels que les processus $B^n = \int \Phi_n \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}X$ soient à variation finie et égaux, le cas échéant, à $\sum \Phi_n \mathbb{1}_{A_n} \Delta X$. D'après le lemme 4.5, il existe une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que

$$(20) \qquad \sum_n \lambda_n \int_0^{+\infty} |\, \mathrm{d}B_t^n| < \infty \quad \text{p.s.}$$

Posons $\Phi = \sum_n \lambda_n \Phi_n \mathbb{1}_{A_n}$. Le processus prévisible Φ est intégrable relativement à la semimartingale X (car borné), strictement positif sur A et nous pouvons écrire d'après le théorème de convergence dominée stochastique que

$$(21) \qquad \int \Phi \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}X = \sum_n \lambda_n \int \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A} \, \mathrm{d}X.$$

La variation totale du membre de droite de (21) étant finie p.s., le processus $\int \Phi \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}X$ est à variation finie. Si de plus, X est formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des A_n, il vient

$$\int \Phi \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}X = \sum_n \lambda_n \sum \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A} \Delta X = \sum \left(\sum_n \lambda_n \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A} \right) \Delta X = \sum \Phi \mathbb{1}_A \Delta X,$$

où l'intervertion des signes de sommation est justifiée par le théorème de Fubini et la condition (20). ■

Pour terminer cette section et en vue de références ultérieures, nous mettons en exergue la remarque quasiment triviale suivante :

LEMME 4.6 *Soient X une semimartingale et A, B des ensembles prévisibles tels que $\int \mathbb{1}_{A \triangle B} \, \mathrm{d}X = 0$. Alors, X est formellement à variation finie et somme de ses sauts sur A si, et seulement si, la même propriété est vraie sur B.*

5 Le théorème de caractérisation

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer un théorème permettant de caractériser celles des martingales d'Azéma bidimensionnelles qui sont de type (II).

THÉORÈME 5.1 *Une martingale d'Azéma bidimensionnelle est du type (II) si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe est une martingale formellement à variation finie somme de ses sauts.*

5.1 La condition est suffisante

Considérons une martingale d'Azéma bidimensionnelle Z. Par hypothèse, il existe un vecteur unité e de E et un processus prévisible borné et strictement positif Φ tels que la martingale $X = g(e, Z)$, projection de X sur $\mathbb{R}e$, vérifie

$$\int \Phi \, \mathrm{d}X = \sum_{0<s\leq \cdot} \Phi \Delta X, \tag{22}$$

où le processus au membre de droite est supposé à variation finie. Complétons $\{e\}$ en un repère orthonormé (e, f) et posons $Y = g(f, Z)$. Il existe quatre fonctions affines p, q, r et s telles que Z satisfasse à l'équation de structure

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} \mathrm{d}[X,X]_t & = & \mathrm{d}t & + & p(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t & = & & & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t & = & \mathrm{d}t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & q(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \end{array} \right. \tag{23}$$

et telles que la relation suivante soit vérifiée μ-presque partout :

$$p(Z_-)s(Z_-) + q(Z_-)r(Z_-) = r(Z_-)^2 + s(Z_-)^2. \tag{24}$$

LEMME 5.2 *Sous ces hypothèses, la martingale Z est purement discontinue.*

PREUVE La martingale X étant formellement à variation finie, elle est purement discontinue. Nous avons donc $\mathbb{E}[(X_t^c)^2] = 0$ et d'après la proposition 3.1, ceci entraîne que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}}\,\mathrm{d}s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{g(e,\sigma_s)^2 g(f,\sigma_s)^2}{\|\sigma_s\|^4}\,\mathrm{d}s\right] = 0,$$

puis que

$$\mathbb{E}[(Y_t^c)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{g(e,\sigma_s)^4}{\|\sigma_s\|^4}\,\mathrm{d}s\right],$$

où $\Sigma = \{\sigma\}$ lorsque $\mathrm{Card}\,\Sigma = 1$. Soit A l'ensemble $\{\mathrm{Card}\,\Sigma = 1\,;\, g(e,\sigma) \neq 0\}$. Le processus $\int \mathbb{1}_A \Phi\,\mathrm{d}X$ étant par hypothèse une martingale localement à variation intégrable et somme de ses sauts, le compensateur prévisible C de la somme de ses sauts est nul. Or, d'après la formule de compensation, nous savons que

$$C = \int \mathbb{1}_A \Phi \frac{g(e,\sigma)}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}m$$

et par conséquent $\mu(A) = 0$, puis $\mathbb{E}[(Y_t^c)^2] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et le lemme est démontré. ■

Notons J l'ensemble aléatoire $\{\Delta Z \neq 0\}$. Les lemmes 5.2 et 2.2 nous permettent d'affirmer que l'adhérence $\overline{J}$ de J est un ensemble de μ-mesure nulle. Considérons alors $S \leq T$ deux temps d'arrêt tels que l'intervalle $]\!]S, T[\![$ ne contienne aucun instant de saut de Z. En vertu de la proposition 2.1, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \, \mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} g(e, \delta) \, \mathrm{d}m,$$

puis en utilisant la proposition 4.3 que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} g(e, \delta) \, \mathrm{d}m = 0.$$

En prenant pour S et T les temps d'arrêt q et $R_q = \inf\{t > q\,;\, \Delta Z_t \neq 0\}$ $(q \in \mathbb{Q}_+)$ et en remarquant que $(\overline{J})^c = \bigcup_q]\!]q, R_q[\![$, cette dernière égalité entraîne que

$$g(e, \delta) = 0, \qquad \mu\text{-presque partout sur } (\overline{J})^c,$$

puis, en vertu du fait que $\mu(\overline{J}) = 0$, que

$$g(e, \delta) = 0, \qquad \mu\text{-presque partout.} \tag{25}$$

Puisque $\mathrm{d}Z^c = \Pi(\mathrm{d}Z) = 0$, où Π est la projection sur le sous-espace orthogonal au système droit asssocié à Z, le cardinal de ce système droit est deux μ-presque partout. En notant σ_1 et σ_2 les deux éléments de ce système droit et en remarquant que par définition de δ nous avons

$$g(\delta, \sigma_1 - \sigma_2) = 0, \qquad \mu\text{-presque partout,}$$

nous déduisons de (25) l'égalité μ-presque sûre

$$g(f, \sigma_1 - \sigma_2) = 0,$$

puisque, les vecteur σ_1 et σ_2 étant orthogonaux, nous savons que δ est différent de 0 μ-presque partout. Or, le vecteur $\sigma_1 - \sigma_2$ est (en utilisant les notations de la proposition 3.3) μ-presque partout le vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}$ est, μ-presque partout, une droite parallèle à l'axe des abscisses. Par conséquent, il existe un réel a tel que les fonctions affines $y \mapsto y - a$ et celle définissant la droite $\mathcal{D}$ soient colinéaires. En comparant ce dernier point avec la définition donnée en (19) de la droite $\mathcal{D}$ et en utilisant la relation (24), il est aisé de vérifier que

$$r(Z_-) - q(Z_-) = s(Z_-) = 0, \qquad \mu\text{-presque partout.}$$

D'après le lemme 1 de [AE2] ceci entraîne $r - q = s = 0$, autrement dit Z est une martingale d'Azéma du type (II).

5.2 La condition est nécessaire

Dans toute la suite Z est une martingale d'Azéma de type (II). Il existe donc un repère orthonormé et deux fonctions affines non colinéaires p et r tels que les coordonnées (X,Y) de Z dans ce repère satisfont à

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{d}[X,X]_t & = \mathrm{d}t & + & P_t\,\mathrm{d}X_t & + \; R_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t & = & & R_t\,\mathrm{d}X_t & \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t & = \mathrm{d}t & & & + \; R_t\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array}\right. \tag{26}$$

où $P = p(Z_-)$ et $R = r(Z_-)$. Noter qu'en vertu du corollaire 3.4 et de la formule (8), la partie martingale continue de Z est donnée par la formule:

$$Z^c = \left(\int \mathbb{1}_{\{R=0\,;\,P=0\}}\,\mathrm{d}X, \quad \int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}Y\right). \tag{27}$$

Dans la suite $a_r, b_r, c_r, a_p, b_p, c_p$ désignent des réels tels que $r(z) = a_r x + b_r y + c_r$ et $p(z) = a_p x + b_p y + c_p$.

Nous traitons séparément trois cas qui dépendent des conditions géométriques imposées par les fonctions affines p et r. Dans un premier temps, nous étudierons le cas où r est une fonction affine constante et le cas où r est une fonction affine non constante telle que la droite $\{r = 0\}$ ne soit pas verticale. Ces cas correspondent aux contraintes: $a_r = b_r = 0$ ou $b_r \neq 0$. Puis, nous étudierons le cas où r et p sont deux fonctions affines non constantes telles que la droite $\{r = 0\}$ soit verticale et rencontre la droite $\{p = 0\}$. C'est le cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p \neq 0$. Enfin, le dernier cas regroupera celui où r est une fonction affine non constante telle que la droite $\{r = 0\}$ soit verticale et où p est soit une fonction affine constante, soit une fonction affine non constante telle que les droites $\{p = 0\}$ et $\{r = 0\}$ soient parallèles. En d'autres termes, nous supposerons que $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p = 0$.

Cas où $a_r = b_r = 0$ ou $b_r \neq 0$

Nous supposons donc dans un premier temps que la fonction affine r est soit une constante (nécessairement différente de 0 puisque p et r ne sont pas colinéaires), soit une fonction affine de la forme $r(x,y) = a_r x + b_r y + c_r$ avec $b_r \neq 0$.

LEMME 5.3 *Dans ces conditions, l'ensemble prévisible* $\{R = 0\}$ *est de* μ*-mesure nulle.*

PREUVE Le résultat est trivial dans le cas ou r est une fonction affine constante. Supposons donc que $r(x,y) = a_r x + b_r y + c_r$ avec $b_r \neq 0$. La formule de densité d'occupation (voir par exemple [Mey, chap. VI, 12.5]) nous apprend d'une part que

$$\int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle = 0. \tag{28}$$

En utilisant la formule (27) nous pouvons, d'autre part, écrire que

$$\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle = \int (a_r^2 \mathbb{1}_{\{R=P=0\}} + b_r^2 \mathbb{1}_{\{R=0\}})\,\mathrm{d}m. \tag{29}$$

Comme par hypothèse $b_r \neq 0$, nous déduisons de (28) et (29) que $\int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}m = 0$ et le résultat. ■

Remarquer que ce lemme et la formule (27) nous assurent que la martingale Z est purement discontinue. Il est aussi clair qu'en vertu de la formule de compensation

$$\sum \mathbb{1}_{\{R=0\,;\,\Delta X\neq 0\}} = 0. \tag{30}$$

Considérons U un instant de saut (supposé fini) de Z. Au vu du corollaire 3.4 une alternative se présente :

— soit $R_U \neq 0$ et dans ce cas $\Delta X_U \neq 0$ et $\Delta Y_U = R_U$,

— soit $R_U = 0$ et dans ce cas $\Delta X_U \neq 0$ et $\Delta Y_U = 0$.

D'après (30), la deuxième possibilité de l'alternative ne se produit pas et donc, en utilisant la deuxième équation de (26), nous pouvons écrire que

$$\int R\,\mathrm{d}X = [X,Y] = \sum \Delta X \Delta Y = \sum R\Delta X,$$

i.e. X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur l'ensemble prévisible $\{R\neq 0\}$. Cet ensemble étant μ-presque sûrement égal à $\mathbb{R}_+\times\Omega$, nous venons de prouver (cf. lemme 4.6) que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts partout.

Cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p \neq 0$

Dans la suite, nous supposons que $r(x,y) = a_r x + c_r$ avec $a_r \neq 0$ et $p(x,y) = a_p x + b_p y + c_p$ avec $b_p \neq 0$. Soit $\widetilde{Z}$ la martingale définie par

$$\begin{cases} \widetilde{X} &= X + \frac{c_r}{a_r} \\ \widetilde{Y} &= Y + \frac{1}{b_p}\left(c_p - \frac{a_p}{a_r}c_r\right). \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{X}$ est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts si, et seulement, si X l'est. Quitte alors à considérer $\widetilde{Z}$ en lieu et place de Z, nous pouvons supposer que Z vérifie l'équation de structure (26) avec $r(x,y) = a_r x$ et $p(x,y) = a_p x + b_p y$, la formule (27) se réduisant dans ce cas à

$$Z^c = \left(\int \mathbb{1}_{\{Z_-=0\}}\,\mathrm{d}X,\quad \int \mathbb{1}_{\{X_-=0\}}\,\mathrm{d}Y\right). \tag{31}$$

Lemme 5.4 *Dans ces conditions, les ensembles $\{Z_- = 0\}$ et $\{Z = 0\}$ sont μ-négligeables.*

Preuve La formule de densité d'occupation nous permet d'écrire que

$$\int \mathbb{1}_{\{r(Z_-)=0\}}\,\mathrm{d}\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle = 0,$$

et en développant le crochet oblique $\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle$ il vient

$$a_r^2 \int \mathbb{1}_{\{X_-=0\,;\,Z_-=0\}}\,\mathrm{d}m = a_r^2 \int \mathbb{1}_{\{Z_-=0\}}\,\mathrm{d}m = 0,$$

d'où le résultat pour l'ensemble $\{Z_- = 0\}$ puisque $a_r \neq 0$. Il suffit alors, pour compléter la preuve, de remarquer que $\{Z = 0\} \subset \{Z_- = 0\} \cup \{\Delta Z \neq 0\}$. ∎

Fixons $\gamma > 0$ et introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned} &S_0^\gamma = 0 \\ &T_1^\gamma = \inf\{t > 0\,;\, Z_t = 0\}, \quad S_1^\gamma = \inf\{t > T_1^\gamma\,;\, \|Z_t\| > \gamma\} \\ &T_2^\gamma = \inf\{t > S_1^\gamma\,;\, Z_t = 0\}, \quad S_2^\gamma = \inf\{t > T_2^\gamma\,;\, \|Z_t\| > \gamma\}, \ldots \end{aligned}$$

Il est clair que l'on a

$$\{Z = 0\} = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} [\![T_n^{1/k}, S_n^{1/k} [\![\, .$$

Le lemme 5.4 permet donc d'écrire que

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega = \{Z \neq 0\} = \bigcup_{k \geq 1, n \geq 0}]\!] S_n^{1/k}, T_{n+1}^{1/k}]\!] \, ,$$

où ces égalités sont valides à équivalence μ-presque sûre près. Ainsi, en vertu de la proposition 4.4 et du lemme 4.6, il suffit pour montrer que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de vérifier cette même propriété sur chacun des intervalles prévisibles $]\!] S_n^{1/k}, T_{n+1}^{1/k}]\!]$.

Le réel $\gamma > 0$ étant fixé, il s'agit de prouver que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles stochastiques $]\!] S_n^\gamma, T_{n+1}^\gamma]\!]$. Quitte à conditionner l'espace probabilisé sous-jacent par l'événement $\{S_n^\gamma < \infty\}$ et à considérer la martingale locale $\overline{Z} = (Z_{S_n^\gamma + t})_{t \geq 0}$ qui vérifie la même équation de structure que Z, nous pouvons supposer que

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n^\gamma = 0 \\ T_n^\gamma = T = \inf\{t > 0\,;\, Z_t = 0\} \\ \|Z_0\| \geq \gamma \, . \end{array} \right. \tag{32}$$

Nous introduisons alors les temps d'arrêt $S_m = \inf\{t > 0\,;\, \|Z_t\| < 1/m\}$ $(m \geq 1)$.

LEMME 5.5 *À un ensemble de μ-mesure nulle près, nous avons*

$$\bigcup_{m \geq 1}]\!] 0, S_m]\!] =]\!] 0, T]\!] \, .$$

PREUVE Il suffit de prouver que $S = \lim_m \uparrow S_m = T$, autrement dit que $\mathbb{P}[S < T] = 0$. Pour ce faire, nous supposons qu'au contraire l'un au moins des événements $A = \{S < T\,;\, S_m < S, \forall m\}$ ou $B = \{S < T\,;\, \exists p : S_m = S, \forall m \geq p\}$ est de probabilité strictement positive.

Si $\mathbb{P}[B] > 0$, nous aurions $Z_S = 0$ sur B et ceci contredirait la définition de T. Si $\mathbb{P}[A] > 0$, nous pourrions écrire grâce à la formule de compensation et le lemme 5.4 que

$$\sum_{S_n < t \leq S} \mathbb{1}_{\{Z_{t-} = 0\}} \|\Delta Z_t\| = 0.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité précédente, il viendrait

$$\mathbb{1}_{\{Z_{S-} = 0\}} \|\Delta Z_S\| = \|\Delta Z_S\| = 0, \qquad \text{sur } A$$

puisque, par définition des S_m, nous avons $Z_{S-} = 0$. Mais ceci entrainerait $Z_S = 0$ sur A, ce qui contredirait à nouveau la définition de T. ■

En notant S au lieu de S_m, nous sommes ainsi ramené (toujours en vertu de la proposition 4.4 et du lemme 4.6) à prouver la propriété de martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de X sur un intervalle stochastique de la forme $]\!]0, S]\!]$, où nous pouvons supposer que

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} \exists \gamma > 0 \, : \, \|Z_0\| \geq \gamma \\ S = \inf\{t > 0 \, ; \, \|Z_t\| < \eta\}, \quad (0 < \eta < \gamma). \end{cases}$$

Les réels strictement positifs γ et η étant fixés, nous choisissons un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $0 < \varepsilon < \eta$ et que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\text{(34)} \qquad \forall z \left(\left. \begin{array}{lcl} |x| & \leq & \varepsilon \\ \|z\| & \geq & \eta \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |p(z)| > 2\varepsilon \\ (1 - a_r^2)x + p(z) \neq 0 \\ l = \inf\limits_{z \in E_+, z' \in E_-} |y - y'| > |a_r|\varepsilon \end{array} \right. \right),$$

où $E_+ = \{z \, ; \, \|z\| \geq \eta, \, |x| \leq \varepsilon \, , \, y > 0\}$ et $E_- = \{z \, ; \, \|z\| \geq \eta, \, |x| \leq \varepsilon \, , \, y < 0\}$. L'existence d'un tel ε est assurée par la condition $b_p \neq 0$. Fixons ensuite un réel ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et introduisons les temps d'arrêt

$$\begin{array}{ll} S_0 = 0 & \\ T_1 = \inf\{t > 0 \, ; \, |X_t| < \varepsilon'\} \wedge S, & S_1 = \inf\{t > T_1 \, ; \, |X_t| > \varepsilon\} \wedge S \\ T_2 = \inf\{t > S_1 \, ; \, |X_t| < \varepsilon'\} \wedge S, & S_2 = \inf\{t > T_2 \, ; \, |X_t| > \varepsilon\} \wedge S, \ldots \end{array}$$

Remarquer que malgré les notations ces temps d'arrêt dépendent de $\gamma, \eta, \varepsilon$ et ε'. Le processus X étant càd-làg, nous avons $S_n \uparrow S$ et par suite l'égalité μ-presque sûre suivante est vérifiée :

$$]\!]0, S]\!] = \bigcup_{n \geq 0}]\!]S_n, T_{n+1}]\!] \cup \bigcup_{n \geq 1}]\!]T_n, S_n]\!] \, .$$

Nous nous sommes donc finalement ramené à prouver la propriété de martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de X sur chacun des intervalles stochastiques de la forme $]\!]S_n, T_{n+1}]\!]$ et $]\!]T_n, S_n]\!]$.

Étudions pour commencer le comportement de X sur un intervalle de la forme $]\!]S_n, T_{n+1}]\!]$ $(n \geq 0)$.

PROPOSITION 5.6 *Pour tout $n \geq 0$, la martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]S_n, T_{n+1}]\!]} \, \mathrm{d}X$ est à variation finie et somme de ses sauts. Plus précisément,*

$$X_{T_{n+1} \wedge t} - X_{S_n \wedge t} = \sum_{S_n \wedge t < s \leq T_{n+1} \wedge t} \Delta X_s \, ,$$

où, pour tout $t \geq 0$, la somme au membre de droite est finie presque sûrement.

PREUVE Quitte à conditionner l'espace probabilisé sous-jacent par l'événement correspondant, nous pouvons supposer que $S_n < S$. En appliquant alors la formule de compensation à la fonction $h = \mathbb{1}_{E \setminus \{0\}}$, il vient

$$\text{(35)} \qquad \mathbb{E}\left[N_{T_{n+1} \wedge t} - N_{S_n \wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{S_n \wedge t}^{T_{n+1} \wedge t} \|\delta_s\|^2 \, \mathrm{d}s\right],$$

où $N = \sum_{0<s\leq \cdot} \mathbb{1}_{\{\Delta Z \neq 0\}}$.

Par définition des temps d'arrêt S_n et T_{n+1}, nous savons que $|X_-| \geq \varepsilon'$ sur $]\!]S_n, T_{n+1}]\!]$ et en vertu du corollaire 3.4, nous pouvons écrire que $\delta = (0, -(a_r X_-)^{-1})$ sur ce même intervalle. Or, ceci entraîne que le membre de droite de (35) est majoré par $t/(a_r\varepsilon')^2$ et donc que, presque sûrement, le nombre d'instant de sauts de Z compris dans l'intervalle $]\!]S_n \wedge t, T_{n+1} \wedge t]\!]$ est fini. Pour compléter la preuve, considérons la suite (U_k) des instants successifs de saut de X appartenant à $]\!]S_n \wedge t, T_{n+1} \wedge t]\!]$ (avec la convention $U_0 = S_n \wedge t$). En vertu de la proposition 2.1 et de l'expression de δ sur $]\!]S_n, T_{n+1}]\!]$, nous pouvons écrire que pour tout $k \geq 1$

$$\int \mathbb{1}_{]\!]U_{k-1}, U_k]\!]} \, \mathrm{d}X = \Delta X_{U_k} \mathbb{1}_{[\![U_k, \infty[\![},$$

puis, en sommant sur k, que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S_n \wedge t, T_{n+1} \wedge t]\!]} \, \mathrm{d}X = \sum_{k\geq 1} \Delta X_{U_k} \mathbb{1}_{[\![U_k, \infty[\![},$$

d'où le résultat désiré. ■

Nous terminons l'étude de ce cas particulier en prouvant le résultat suivant qui nous permettra de conclure que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles $]\!]T_n, S_n]\!]$ $(n \geq 1)$. Remarquons que la normalité de la martingale X entraîne que $S_n < \infty$ sur l'événement $\{T_n < \infty\}$. Dans la suite, nous supposons $T_n < \infty$.

PROPOSITION 5.7 *Soit $n \geq 1$ un entier et considérons le processus D^n défini par $D^n = \sum_{T_n\wedge \cdot < s < S_n \wedge \cdot} \Delta X_s$. Ce processus est décroissant si $P\mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \geq 0$, croissant si $P\mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \leq 0$. La martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \mathrm{d}X$ est à variation finie et l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \, \mathrm{d}X = D^n + \Delta X_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n, \infty[\![}.$$

La preuve de cette proposition repose sur quelques lemmes que nous présentons maintenant.

LEMME 5.8 *Le signe de P est constant sur l'intervalle $]\!]T_n, S_n]\!]$.*

PREUVE Fixons un entier $n \geq 1$. Par définition des temps d'arrêt T_n et S_n, nous savons que Z appartient à l'ensemble $E_+ \cup E_-$ sur $[\![T_n, S_n[\![$.

Supposons qu'un changement de signe de $p(Z)$ intervienne en un instant aléatoire U tel que $T_n \leq U < S_n$. En cet instant, le processus Z présente nécessairement un saut le faisant passer de E_+ en E_- ou de E_- en E_+. Par conséquent, $|\Delta Y_U| \geq l > |a_r|\varepsilon$. Mais, d'autre part, nous savons que $|\Delta Y_U| = |a_r X_{U-}| \leq |a_r|\varepsilon$ ce qui est absurde.

Ainsi, le signe de $p(Z)$ est constant sur l'intervalle $[\![T_n, S_n[\![$ et le lemme est démontré. ■

LEMME 5.9 *Soient n un entier ≥ 1 et U un instant de saut de Z tel que $T_n < U < S_n$. Alors $X_{U-} \neq 0$, $\Delta Y_U = a_r X_{U-}$ et*

$$\Delta X_U = \begin{cases} \frac{P_U}{2} + \sqrt{\frac{P_U^2}{4} + a_r^2 X_{U-}^2} = \sigma_1(U), & si\ P_U < 0 \\ \frac{P_U}{2} - \sqrt{\frac{P_U^2}{4} + a_r^2 X_{U-}^2} = \sigma_2(U), & si\ P_U > 0. \end{cases}$$

PREUVE Au vu du lemme 5.8, le signe de P est constant sur $]\!]T_n, S_n]\!]$. Traitons par exemple le cas ou $P\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \geq 0$.

Si $X_{U-} = 0$, nous aurions $\Delta X_U = P_U > 2\varepsilon$ en vertu du corollaire 3.4, de la définition des temps d'arrêt T_n et S_n et du choix de ε. Par conséquent et puisque $|X_{U-}| \leq \varepsilon$, nous aurions aussi $X_U = X_{U-} + \Delta X_U > \varepsilon$ et ceci contredirait la définition de S_n. Ainsi, $X_{U-} \neq 0$.

Maintenant et toujours d'après le corollaire 3.4, nous savons que $\Delta X_U = \sigma_1(U)$ ou $\sigma_2(U)$ et que $\Delta Y_U = a_r X_{U-}$. Mais, si $\Delta X_U = \sigma_1(U)$ nous aurions $X_U = X_{U-} + \Delta X_U \geq X_{U-} + P_U > \varepsilon$ et la définition de S_n serait à nouveau contredite. Ainsi, $\Delta X_U = \sigma_2(U)$ et le lemme est démontré. ■

LEMME 5.10 *Le processus X est croissant sur l'intervalle $[\![T_n, S_n[\![$ si $P_{S_n} \leq 0$ et est décroissant sur ce même intervalle si $P_{S_n} \geq 0$.*

PREUVE Montrons par exemple la première de ces assertions. Supposons donc que $P_{S_n} \geq 0$. D'après le lemme 5.8, cette condition nous assure que $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n, S_n]\!]$ et le lemme 5.9 donne $\Delta X \leq 0$ sur $]\!]T_n, S_n[\![$.

Il résulte de l'équation de structure (26) que la martingale $M_P = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} P \,\mathrm{d}X$ vaut $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}([X,X] - [Y,Y])$; elle est à variation finie donc à variation localement intégrable. Le processus $H = P^{-1}\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}$ est intégrable relativement à M_P dans le domaine des martingales locales et $\int H \,\mathrm{d}M_P = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}X = M$. Le processus H étant borné par $(2\varepsilon)^{-1}$, l'intégrale stochastique $\int H \,\mathrm{d}M_P$ est aussi égale à l'intégrale de Stieltjes $H \cdot M_P$. Par conséquent, la martingale M est elle aussi à variation localement intégrable et d'après la formule de compensation, le compensateur prévisible de la somme de ses sauts est donné par $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \mathbb{1}_{\{X_-=0\}} \frac{\mathrm{d}m}{P}$. Par suite, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}X = \sum_{T_n \wedge \cdot < s \leq S_n \wedge \cdot} \Delta X_s - \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \mathbb{1}_{\{X_-=0\}} \frac{\mathrm{d}m}{P}. \tag{36}$$

Or, le membre de droite de (36) est ≤ 0 sur $[\![T_n, S_n[\![$ puisque chacun des termes de la somme est ≤ 0 sur cet intervalle. Ceci achève la preuve de ce lemme. ■

LEMME 5.11 *Considérons les temps d'arrêt suivants :*

$$R_n^k = \inf\{t > T_n\,;\, |X_t| > k^{-1}\} \wedge S_n, \quad (k \geq 1)$$
$$R_n = \lim_k \downarrow R_n^k = \inf\{t > T_n\,;\, X_t \neq 0\} \wedge S_n.$$

Alors, $R_n = T_n$ sur l'événement $\{X_{T_n} = 0\}$.

PREUVE Supposons que $X_{T_n} = 0$. Nous traiterons le cas où $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n, S_n]\!]$. Comme dans la preuve du lemme précédent, nous pouvons écrire que

$$X_{R_n} = X_{R_n} - X_{T_n} = \sum_{T_n < s \leq R_n} \Delta X_s - \int_{T_n}^{R_n} \mathbb{1}_{\{X_{s-}=0\}} \frac{\mathrm{d}s}{P_s}.$$

Comme par définition de nos temps d'arrêt $X\mathbb{1}_{[\![T_n,R_n[\![} = 0$, l'égalité précédente nous conduit à

$$0 = X_{R_n-} = -\int_{T_n}^{R_n} \mathbb{1}_{\{X_{s-}=0\}} \frac{\mathrm{d}s}{P_s} = -\int_{T_n}^{R_n} \frac{\mathrm{d}s}{P_s},$$

ce qui n'est possible que si $R_n = T_n$. ■

LEMME 5.12 *L'ensemble prévisible* $\{X_- = 0\} \cap]\!]T_n, S_n]\!]$ *est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible.*

PREUVE Il suffit de montrer que l'ensemble prévisible $A = \{X_- = 0\} \cap]\!]T_n, S_n]\!]$ est le graphe d'un temps d'arrêt. Considérons le temps d'arrêt $V_n = \inf\{t > T_n \,;\, X_{t-} = 0\}$ et la variable aléatoire $\widetilde{V}_n = V_{n\{T_n < V_n \leq S_n\}}$. Cette dernière est aussi un temps d'arrêt puisque l'événement $\{T_n < V_n \leq S_n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_{S_n-}$. Nous allons prouver que $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ et, pour fixer les idées, nous supposerons que $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n, S_n]\!]$.

Supposons pour commencer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $X_{T_n} \leq -\alpha$. D'après le lemme 5.10, ceci entraîne $X_- \leq -\alpha$ sur $]\!]T_n, S_n]\!]$. Nous avons donc d'une part $A = \emptyset$ et, puisque d'autre part ceci entraîne $\widetilde{V}_n = \infty$, l'égalité $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ est vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant que $X_{T_n} = 0$. Le lemme 5.10 nous assure que $X_- \leq 0$ sur l'intervalle $]\!]T_n, S_n]\!]$; nous pouvons donc écrire (les notations étant celles du lemme 5.11) que $X_{R_n^k} \leq -k^{-1}$ sur l'événement $\{R_n^k \leq S_n\}$ et d'après ce qui précède ceci nous montre que $A \cap]\!]R_n^k, S_n]\!] = \emptyset$. Puisqu'en vertu du lemme 5.11 nous avons $R_n = T_n$, cette dernière égalité nous montre que $A = \emptyset$, que $\widetilde{V}_n = \infty$ et donc que $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ dans ce cas aussi.

Supposons finalement que $X_{T_n} > 0$. Dans ce cas, nous avons $V_n > T_n$. Si $V_n > S_n$ nous avons $A = \emptyset$ et $\widetilde{V}_n = \infty$ et notre égalité est bien vérifiée. Si $V_n \leq S_n$ alors, par définition de V_n, nous avons $X_{V_n} = 0$. Écrivons alors que

$$A = (A \cap]\!]T_n, V_n[\![) \cup (A \cap [\![V_n]\!]) \cup (A \cap]\!]V_n, S_n]\!]).$$

Le premier ensemble apparaissant au membre de droite est vide par définition de V_n. Le deuxième est égal à $[\![V_n]\!]$ puisque $X_{V_n-} = 0$. En effet, dans le cas contraire nous aurions $\Delta X_{V_n} = -X_{V_n-} \neq 0$ et cette égalité nous conduirait alors à

$$X_{V_n-} + \frac{P_{V_n}}{2} = \pm\sqrt{\frac{P_{V_n}^2}{4} + a_r^2 X_{V_n-}^2}\,. \tag{37}$$

En élevant au carré l'égalité (37), en la développant puis en la divisant par X_{V_n-}, il viendrait

$$(1 - a_r^2) X_{V_n-} + P_{V_n} = 0,$$

ce qui est impossible au vu du choix de ε (voir la condition (34)). Le troisième ensemble est vide car puisque $X_{V_n} = 0$, nous sommes ramené au cas précédent. Ainsi, notre égalité est aussi vérifiée dans ce cas et le lemme est démontré. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.7 Fixons un entier $n \geq 1$. D'après le lemme 5.8, nous pouvons supposer par exemple que $P > 2\varepsilon$ sur l'intervalle $]\!]T_n, S_n]\!]$ (l'autre cas se traitant de manière tout à fait analogue).

Nous savons (voir la preuve du lemme 5.10) que la martingale $M = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \, \mathrm{d}X$ est à variation localement intégrable et que le compensateur prévisible de la somme de ses sauts est le processus $C = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n, S_n]\!]} \mathbb{1}_{\{X_- = 0\}} \frac{\mathrm{d}m}{P}$. D'après le lemme 5.12, l'ensemble $\{X_- = 0\} \cap]\!]T_n, S_n]\!]$ est de μ-mesure nulle et donc $C = 0$.

Le processus D^n étant égal à $\sum_{0<s<\cdot} \Delta M$, il est à variation finie. Puisque de plus et d'après le lemme 5.9 les sauts de M apparaissant sur l'intervalle $]\!]T_n, S_n[\![$ sont tous négatifs, le processus D^n est aussi décroissant.

Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \, \mathrm{d}X = \sum_{T_n \wedge \cdot < s \leq S_n \wedge \cdot} \Delta X_s = D^n + \Delta X_S \mathbb{1}_{[\![S,\infty[\![},$$

ce qui achève la preuve de cette proposition. ■

Nous venons de démontrer que la martingale X est à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles stochastiques de la forme $]\!]S_n, T_{n+1}]\!]$ et $]\!]T_n, S_n]\!]$. Comme $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est, à un ensemble μ-négligeable près, réunion dénombrable de tels ensembles prévisibles, ceci entraîne que la martingale X est formellement à variation finie et somme de ses sauts.

REMARQUE Le lemme 5.12 entraîne que l'ensemble $\{X_- = 0\,; |Z_-| \geq \eta\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisible et ce pour tout $\eta > 0$. La même propriété est donc vraie pour l'ensemble $\{X_- = 0\,; Z_- \neq 0\}$.

Cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p = 0$

Ce cas étant plus simple mais analogue au précédent nous nous contenterons de donner les grandes lignes de la démonstration.

Quitte à considérer la martingale $\widetilde{Z}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{X} &= X + \frac{c_r}{a_r} \\ \widetilde{Y} &= Y, \end{cases}$$

nous pouvons supposer que Z vérifie l'équation de structure (26) avec $r(x,y) = a_r x$ et $p(x,y) = a_p x + c_p$. La condition de non colinéarité de r et p nous assure que c_p est différent de 0, puis le fait que c_p soit différent de 0 nous permet de choisir un réel ε strictement positif vérifiant la condition suivante :

$$\forall z \left(|x| \leq \varepsilon \implies \begin{cases} |p(z)| > 2\varepsilon \\ \operatorname{sgn} p(z) = s(p) \end{cases} \right), \tag{38}$$

où $s(p) = \pm 1$ et dépend de la constante c_p. Cet ε étant fixé, considérons un réel ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned} &S_0 = 0 \\ &T_1 = \inf\{t > 0\,; |X_t| < \varepsilon'\}, \quad S_1 = \inf\{t > T_1\,; |X_t| > \varepsilon\} \\ &T_2 = \inf\{t > S_1\,; |X_t| < \varepsilon'\}, \quad S_2 = \inf\{t > T_2\,; |X_t| > \varepsilon\}, \ldots \end{aligned}$$

La martingale Z étant càd-làg nous avons $T_n \uparrow \infty$ et donc, à un ensemble de μ-mesure nulle près,

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega = \bigcup_{n\geq 0}]\!]S_n, T_{n+1}]\!] \cup \bigcup_{n \geq 1}]\!]T_n, S_n]\!].$$

Les résultats regroupés dans la proposition suivante se démontrent à l'aide des mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve des propositions 5.6 et 5.7. Ils nous assurent que la martingale X est une martingale *à variation finie* et somme de ses sauts, ce qui prouve notre assertion dans ce dernier cas et achève la preuve du théorème 5.1.

PROPOSITION 5.13 *Pour tout $n \geq 0$, la martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]S_n,T_{n+1}]\!]} \,\mathrm{d}X$ est à variation finie et somme de ses sauts. Plus précisément,*

$$X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{S_n\wedge t} = \sum_{S_n\wedge t < s \leq T_{n+1}\wedge t} \Delta X_s\,,$$

où, pour tout $t \geq 0$, la somme au membre de droite est finie presque sûrement.

Pour tout $n \geq 1$, le processus $D^n = \sum_{T_n\wedge\cdot<s<S_n\wedge\cdot} \Delta X_s$ est monotone: il est croissant si $s(p) = -1$, décroissant si $s(p) = +1$. La martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}X$ est à variation finie et, plus précisément, nous avons

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}X = D^n + \Delta X_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n,\infty[\![}\,.$$

De plus, l'ensemble prévisible $\{X_- = 0\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Références

[AE1] Attal (S.) et Émery (M.). Équations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de probabilités XXVIII*, LNM 1583, 256-278, Springer (1994).

[AE2] Attal (S.) et Émery (M.). Martingales d'Azéma bidimensionnelles. *Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu - Astérisque*, **236**, 9-21 (1996).

[Del] Dellacherie (C.). Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. *Séminaire de probabilités XII*, LNM 649, 742-745, Springer (1978).

[Éme] Émery (M.). On the Azéma Martingales. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1426, 66-87, Springer (1989).

[Mey] Meyer (P.-A.). Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de probabilités X*, LNM 511, 245-400, Springer (1976).

[Sch] Schwartz (L.). Les semi-martingales formelles. *Séminaire de probabilités XV*, LNM 850, 413-489, Springer (1981).

[Tav] Taviot (G.). *Martingales et équations de structure: étude géométrique.* Thèse de doctorat, Université de Strasbourg I (1999).