ÉRIC FONTENAS

Sur les minorations des constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques pour les opérateurs de Jacobi et de Laguerre

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 14-29

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__14_0>

Sur les minorations des constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques pour les opérateurs de Jacobi et de Laguerre

Éric FONTENAS
Laboratoire de Modélisation et de Calcul
Domaine Universitaire BP 53
38041 Grenoble cedex 9

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons à la minoration des constantes dans les inégalités de Sobolev pour l'opérateur associé aux polynômes de Jacobi ainsi qu'à celle des constantes de Sobolev logarithmiques pour l'opérateur associé aux polynômes de Laguerre. Ces constantes ont pour particularité d'être différentes de la première valeur propre non nulle associée à ces opérateurs. Nous proposons ici une méthode basée sur l'existence de fonctions extrémales et sur de simples études de signe de polynômes du second degré. Elle nous permet d'obtenir une nouvelle minoration de ces constantes qui fait le lien, dans le cas de l'opérateur de Jacobi non symétrique, entre la constante de Sobolev pour l'exposant optimal due à Bakry et la constante de Sobolev logarithmique obtenue par Saloff-Coste.

Résumé

This paper concerns Sobolev constants for Jacobi operators and logarithmic Sobolev constants for Laguerre operators. These constants are different from the first non-negative eigenvalue associated to these operators. In this work, we suggest a method based on the existence of extremal functions and on the study of the sign of second degree polynomials to bound these constants. These new lower bounds allow us to recover, on one hand, the Sobolev constant due to Bakry for optimal exponent and, on the other hand, the logarithmic Sobolev constant obtained by Saloff-Coste.

1 Introduction et définitions

Considérons l'espace $(]-1,1[, d\mu)$ où μ est la mesure de probabilités :

$$d\mu = C(a,b)(1-x)^{(a-1)/2}(1+x)^{(b-1)/2}dx$$

avec a et b des réels strictement positifs et $C(a,b)$ est la constante qui fait de μ une mesure de probabilités :

$$C(a,b) = \frac{\Gamma(\frac{a+b}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}2^{-(\frac{a+b}{2})}$$

avec $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Soit L l'opérateur associé aux polynômes de Jacobi agissant sur les fonctions f de classe C^2 par

$$Lf(x) = (1-x^2)f''(x) + \frac{1}{2}[a-b-(a+b+2)x]f'(x).$$

Le cas symétrique, i.e, $a = b$, a été très étudié : les meilleures constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques sont connues (voir par exemple [13]). Dans le cas non symétrique, i.e $a \neq b$, on ne dispose que de deux résultats intéressants, celui de Bakry [2] concernant la minoration de la constante de Sobolev pour l'exposant optimal et celui de Saloff-Coste [15] lors de l'étude de la constante de Sobolev logarithmique. Le but de cet exposé est de montrer que ces deux constantes sont liées et que le passage de l'une à l'autre s'obtient par un simple passage à la limite de l'exposant vers 2 dans les inégalités de Sobolev. Nous donnons alors une nouvelle minoration de la constante de Sobolev pour tous les exposants dans les inégalités de Sobolev. Bakry et Saloff-Coste ont obtenu ces minorations de constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques en utilisant une inégalité de courbure-dimension associée à l'opérateur L (voir [3] pour plus de détails). Ici, la méthode repose sur une équation différentielle du second degré associée aux inégalités de Sobolev et, par de simples changements de variables et d'études du signe de polynômes du second degré, on arrive à une nouvelle minoration de ces constantes. De plus, cette méthode permet de retrouver les meilleures constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques pour l'opérateur de Jacobi symétrique, i.e dans le cadre $a = b$.

Voici tout d'abord quelques remarques utiles concernant les opérateurs de Jacobi : l'espace $L^2(d\mu)$ admet pour base orthogonale les polynômes de Jacobi $(J_k)_{k\geq 0}$ définis par la série génératrice suivante (voir [10]) :

$$2^{(2-a-b)/2}\sum_k t^k J_k =$$
$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}(1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(b-1)/2}(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(a-1)/2}.$$

Ces polynômes satisfont la relation $L(J_k) = -\lambda_k J_k$, avec

$$\lambda_k = k\left[\frac{a+b}{2}+k\right].$$

Ce qui signifie que chaque J_k est vecteur propre associé à la valeur propre λ_k de $-L$. On peut trouver la forme explicite des polynômes J_k dans [15] et toutes les formules précédentes dans [12]. L'opérateur L ainsi défini est symétrique par rapport à la mesure μ au sens suivant : pour toutes fonctions (f,g) de classe C^2,

$$\int_{-1}^1 fLg\,d\mu = \int_{-1}^1 gLf\,d\mu.$$

On associe à L un opérateur Γ carré du champ défini par : pour toutes fonctions f et g de classe C^1,

$$\Gamma(f,g) = (1-x^2)f'g'.$$

On vérifie aisément que pour toute fonction f de classe C^2,

$$\int_{-1}^1 \Gamma(f,f)\,d\mu = \int_{-1}^1 f(-Lf)\,d\mu.$$

Nous avons de plus les formules suivantes de changement de variable pour L et Γ: pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour toute fonction $f \in C^2$,

$$L(\phi(f)) = \phi'(f)Lf + \phi''(f)\Gamma(f,f)$$

et

$$\Gamma(f,f) = \phi'^2(f)\Gamma(f,f).$$

Voici, maintenant quelques exemples d'opérateurs de Jacobi qui ne se différencient que par des valeurs bien précises des paramètres a et b:

– Polynômes de Gegenbauer: on pose $a = b = n - 1$ avec $n > 0$.

– Polynômes de Legendre: on choisit $a = b = 1$.

– Espaces projectifs réels: on choisit $b = 0$ et $a > 1$ (Lors de l'étude des fonctions extrémales pour les inégalités de Sobolev, nous verrons que cet exemple est un cas tout à fait particulier).

Nous définissons maintenant la notion d'inégalité de Sobolev de dimension n:

Définition 1 *Nous dirons que L satisfait une inégalité de Sobolev de dimension $n > 2$ si il existe deux constantes A et B strictement positives telles que*

$$\forall f \in C^2, \quad \left(\int_{-1}^{1} f^p\, d\mu\right)^{2/p} \leq A\int_{-1}^{1} f^2\, d\mu + B\int_{-1}^{1}(1-x^2)f'^2\, d\mu \tag{1}$$

avec $p = 2n/(n-2)$.

En appliquant l'inégalité précédente à la fonction $f = 1$, on obtient que la constante A est supérieure ou égale à 1. Cette constante peut être prise égale à 1 quitte à modifier la constante B (cf. [1] et [2]). Dans cet article, nous nous intéressons donc aux inégalités de Sobolev avec $A = 1$. Bakry, [2], a démontré l'existence de telles inégalités pour $2 < p \leq 2(a+1)/(a-1)$ où $a+1$ est la meilleure dimension possible dans l'inégalité de Sobolev (1). Nous recherchons alors des estimations précises de la constante B_p pour $2 < p \leq 2(a+1)/(a-1)$ dans l'inégalité suivante:

$$\frac{B_p}{p-2}\left[\left(\int_{-1}^{1} f^p\, d\mu\right)^{2/p} - \int_{-1}^{1} f^2\, d\mu\right] \leq \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'^2\, d\mu. \tag{2}$$

Dans le cadre où ($a = b$), nous verrons que la méthode utilisée fournit la meilleure constante dans (2) et que celle-ci est alors égale à $a+1 = \lambda_1$ (voir [13] et [7]). Nous allons surtout étudier les constantes de Sobolev pour les opérateurs de Jacobi avec $a \neq b$.

1.1 Majoration de la constante de Sobolev

La première valeur propre λ_1 de $-L$ peut être caractérisée (voir par exemple [5]) comme le plus grand des λ strictement positifs tels que, pour toute fonction f de classe C^2, on ait:

$$\lambda\left[\int_{-1}^{1} f^2\, d\mu - \left(\int_{-1}^{1} f\, d\mu\right)^2\right] \leq \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'^2\, d\mu.$$

Si nous remplaçons f par $1+\epsilon f$ dans l'inégalité (2), par passage à la limite de ϵ vers 0, cette inégalité s'écrit :

$$B_p\left[\int_{-1}^1 f^2\,d\mu - \left(\int_{-1}^1 f\,d\mu\right)^2\right] \leq \int_{-1}^1 (1-x^2)f'^2\,d\mu.$$

De part la définition de λ_1, il vient que, pour tout $2 < p \leq 2(a+1)/(a-1)$, $B_p \leq \lambda_1$. Nous allons voir que, si $a \neq b$, cette inégalité est stricte :

Théorème 1 *Si $a \neq b$, la constante de Sobolev B_p dans les inégalités (2) est strictement inférieure à λ_1.*

Démonstration : nous reprenons la démonstration de Rothaus [14] lors de l'étude de la constante de Sobolev logarithmique sur une variété riemannienne compacte. Considérons la fonction

$$H = Q\Big/\left(\int_{-1}^1 Q^2\,d\mu\right)^{1/2},$$

avec $Q = (-(a+b+2)x+a-b)/2$. On constate que la fonction H est fonction propre de $-L$ associée à la première valeur propre λ_1. De plus, on vérifie aisément, dans le cas où $a \neq b$ et contrairement au cas $a = b$, que $\int_{-1}^1 H^3\,d\mu \neq 0$. Comme H est vecteur propre de $-L$, on a :

$$\int_{-1}^1 \Gamma(H,H)\,d\mu = \lambda_1 \int_{-1}^1 H^2\,d\mu = \lambda_1$$

et $\int_{-1}^1 H\,d\mu = 0$. Le résultat du théorème 1 repose sur les propriétés de cette fonction H. Considérons la fonctionnelle suivante :

$$\varphi(f) = \left(\int_{-1}^1 f^p\,d\mu\right)^{-2/p}\left\{\int_{-1}^1 f(-Lf)\,d\mu - \frac{B_p}{p-2}\left[\left(\int_{-1}^1 f^p\,d\mu\right)^{2/p} - \int_{-1}^1 f^2\,d\mu\right]\right\}.$$

Posons $f = 1+\epsilon H$. Par un développement limité, les termes de la fonction φ s'écrivent :

$$\int_{-1}^1 (1+\epsilon H)^p\,d\mu = 1 + \frac{p(p-1)}{2}\epsilon^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\epsilon^3\int_{-1}^1 H^3\,d\mu + \epsilon^3 g(\epsilon)$$

où $g(\epsilon)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. On a donc :

$$\left(\int_{-1}^1 (1+\epsilon H)^p\,d\mu\right)^{2/p} = 1 + (p-1)\epsilon^2 + \frac{(p-1)(p-2)}{3}\epsilon^3\int_{-1}^1 H^3\,d\mu + \epsilon^3 g_1(\epsilon)$$

et

$$\left(\int_{-1}^1 (1+\epsilon H)^p\,d\mu\right)^{-2/p} = 1 - (p-1)\epsilon^2 - \frac{(p-1)(p-2)}{3}\epsilon^3\int_{-1}^1 H^3\,d\mu + \epsilon^3 g_2(\epsilon)$$

où g_1 et g_2 tendent vers 0 avec ϵ. De plus, H étant fonction propre de $-L$, $\varphi(f)$ s'écrit

$$\varphi(f) = [\lambda_1 - B_p]\epsilon^2 - B_p\frac{(p-1)}{3}\epsilon^3\int_{-1}^1 H^3\,d\mu + \epsilon^3 g_3(\epsilon)$$

avec $g_3(\epsilon)$ qui tend vers 0 avec ϵ. Nous voyons que, si $B_p = \lambda_1$ et $\int_{-1}^1 H^3\,d\mu \neq 0$, alors $\varphi(f) < 0$. On en déduit, finalement,que, si $\int_{-1}^1 H^3\,d\mu \neq 0$, $B_p < \lambda_1$. Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Remarque : pour les opérateurs de Jacobi tels que $a = b$, on vérifie que $\int_{-1}^1 Q^3\,d\mu = 0$. Il est démontré dans [6] que cette condition est équivalente au fait que la constante de Sobolev B_p est égale à λ_1.

1.2 Minorations des constantes de Sobolev

Nous en venons maintenant au résultat principal de cet article concernant la minoration des constantes de Sobolev pour l'opérateur de Jacobi dans le cadre $a \neq b$. Nous proposons ici une nouvelle minoration de ces constantes, qui permet de faire le lien entre des résultats déjà connus sur la constante de Sobolev pour l'exposant optimal [2] et la constante de Sobolev logarithmique [15]. Notre approche est directement inspirée des travaux de Rothaus [14] lors de l'étude de la constante de Sobolev logarithmique, méthode reprise par Ledoux [1] lors de l'étude des constantes de Sobolev pour un générateur markovien abstrait. Elle repose sur l'existence d'une fonction extrémale satisfaisant l'égalité dans les inégalités de Sobolev. Seule cette notion nous permettra de conclure à cette minoration. Nous n'utiliserons pas, contrairement à Rothaus et à Bakry, la notion d'inégalité de courbure-dimension.
Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2 *Si $a = b = \lambda_1 - 1$ avec $\lambda_1 > 2$ alors, la constante de Sobolev est optimale et on a, pour tout p, $1 \leq p \leq 2\lambda_1/(\lambda_1 - 2)$, $B_p = \lambda_1$.*
Si $a > b > 0$ et $a > 1$ alors, pour tout réel p, $1 \leq p \leq \frac{2(a+1)}{a-1}$, on a $B_p \geq \frac{(1-V_p)\left[-2abV_p+a+b+2\sqrt{ab(1+aV_p)(1+bV_p)}\right]}{4}$ où $V_p = \frac{2-p}{p+2}$.
Si $a > b > 0$ et $a < 1$, on a la même minoration mais pour tout $p \geq 1$.

Remarques : – Pour l'exposant optimal $p = 2(a+1)/(a-1)$, le théorème 2 fournit la minoration suivante pour la constante de Sobolev :

$$B_p \geq \frac{(a+1)(3b+a)}{4a}.$$

On retrouve ainsi un résultat de Bakry [2], résultat obtenu à partir d'une inégalité de courbure-dimension.

– Si on pose

$$F(p) = \left[\int_{-1}^{1} f^p d\mu\right]^{2/p},$$

l'inégalité de Sobolev du théorème s'écrit :

$$\frac{B_p}{p-2}[F(p) - F(2)] \leq \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f'^2 \, d\mu. \tag{3}$$

Par passage à la limite de p vers 2 dans l'inégalité précédente, on obtient

$$B_2 F'(2) \leq \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f'^2 \, d\mu$$

avec

$$F'(p) = \frac{2}{p}\left(\int_{-1}^{1} f^p \log f \, d\mu\right)\left(\int_{-1}^{1} f^p \, d\mu\right)^{1-2/p} - \frac{2}{p^2}\left(\int_{-1}^{1} f^p \, d\mu\right)^{2/p} \log \int_{-1}^{1} f^p \, d\mu$$

et

$$B_2 = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4}.$$

On retrouve donc "l'inégalité de Sobolev logarithmique", introduite par Gross [8],

$$B_2\left(\int_{-1}^{1} f^2 \log|f|\, d\mu - \int_{-1}^{1} f^2\, d\mu \log\left[\int_{-1}^{1} f^2\, d\mu\right]^{1/2}\right) \leq \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'^2\, d\mu$$

ainsi que la minoration obtenue par Saloff-Coste [15] lors de l'étude de la constante de Sobolev logarithmique de l'opérateur de Jacobi avec $a \neq b$. L'intérêt de cette nouvelle minoration est qu'elle permet de faire le lien entre la constante de Sobolev pour l'exposant optimal due à Bakry et cla constante de Sobolev logarithmique obtenue par Saloff-Coste.

Démonstration : nous considérons, tout d'abord, les opérateurs de Jacobi avec $a \neq b$. Toutefois, cette démonstration reste valable dans le cadre $a = b$ et nous verrons que celle-ci fournit la meilleure constante de Sobolev à savoir $B_p = \lambda_1$.
Pour alléger les notations intervenant dans cette démonstration, on posera $D = (a - b)/2$. Nous noterons, par la suite, P_X tout polynôme de second degré de la variable X et Δ_X le discriminant associé à ce polynôme. Nous considérons l'inégalité suivante

$$\frac{C}{p-2}\left[\left(\int_{-1}^{1} f^p\, d\mu\right)^{2/p} - (1+\epsilon)\int_{-1}^{1} f^2\, d\mu\right] \leq \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'^2\, d\mu \tag{4}$$

où $2 < p < 2(a+1)/(a-1)$. On notera par C_ϵ le plus grand des C strictement positif satisfaisant l'inégalité (4). Il a été démontré (cf. [1] et [7] pour le cas $a = b$) l'existence d'une fonction f positive non constante, bornée inférieurement et supérieurement, satisfaisant l'égalité dans (4) et vérifiant l'équation non linéaire suivante :

$$Lf(x) = \frac{C_\epsilon}{p-2}[(1+\epsilon)f(x) - f^{p-1}] \tag{5}$$

avec

$$\int_{-1}^{1} f^p\, d\mu = 1$$

où $\epsilon > 0$ et $C_\epsilon > B_p$. Le fait d'avoir ajouté un terme en ϵ nous assure que cette fonction ne peut être constante. L'existence d'une telle fonction va nous permettre d'obtenir la minoration annoncée. Notre méthode de calcul est basée sur des changements de variables successifs opérant sur l'équation (5). Posons $f = u^\beta$ avec $\beta > 0$ dans l'équation (5). Cette équation implique le lemme suivant :

Lemme 1

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - \lambda_1]\int_{-1}^{1}(1-x^2)u'^2\, d\mu \qquad (6)\\
&= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\left[u''^2 - 2\beta(r-1)\frac{u''u'^2}{u}\right] d\mu + 2\beta(r-1)\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\frac{u'^3}{u}\, d\mu\\
&\quad + [(\beta-1)(1+\beta(r-2)) + \beta(r-1)]\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\frac{u'^4}{u^2}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Démonstration : d'après la formule de changement de variable pour L, (5) devient :

$$\beta u^{\beta-1}Lu + \beta(\beta-1)\Gamma(u,u)u^{\beta-2} = (1+\epsilon)\frac{C_\epsilon}{p-2}u^\beta - \frac{C_\epsilon}{p-2}u^{\beta(p-1)}. \tag{7}$$

Multiplions (7) par $\Gamma(u,u)/u^\beta$, puis intégrons par rapport à la mesure μ:

$$\beta\int_{-1}^1 \frac{Lu\Gamma(u,u)}{u}\,d\mu+\beta(\beta-1)\int_{-1}^1\frac{\Gamma^2(u,u)}{u^2}\,d\mu \qquad (8)$$
$$=(1+\epsilon)\frac{C_\epsilon}{p-2}\int_{-1}^1\Gamma(u,u)\,d\mu-\frac{C_\epsilon}{p-2}\int_{-1}^1 u^{\beta(p-2)}\Gamma(u,u)\,d\mu.$$

De plus,

$$\int_{-1}^1 u^{\beta(p-2)}\Gamma(u,u)\,d\mu=-\frac{1}{\beta(p-2)+1}\int_{-1}^1 u^{\beta(p-2)+1}Lu\,d\mu.$$

En multipliant l'égalité (7) par $u^{1-\beta}Lu$ puis en l'intégrant par rapport à la mesure μ, il vient:

$$\frac{C_\epsilon[\beta(p-2)+1]}{p-2}\int_{-1}^1 u^{\beta(p-2)}\Gamma(u,u)\,d\mu$$
$$=\beta\int_{-1}^1(Lu)^2\,d\mu+\beta(\beta-1)\int_{-1}^1\frac{Lu\Gamma(u,u)}{u}\,d\mu+(1+\epsilon)\frac{C_\epsilon}{p-2}\int_{-1}^1\Gamma(u,u)\,d\mu.$$

En reportant ce terme dans (8), on obtient ainsi l'égalité suivante:

$$C_\epsilon(1+\epsilon)\int_{-1}^1\Gamma(u,u)\,d\mu \qquad (9)$$
$$=(q-1)[1+q(p-2)]\int_{-1}^1\frac{\Gamma^2(u,u)}{u^2}\,d\mu+q(p-1)\int_{-1}^1\frac{\Gamma(u,u)Lu}{u}\,d\mu+\int_{-1}^1(Lu)^2\,d\mu.$$

De plus, on a:

$$\int_{-1}^1(Lu)^2\,d\mu=\int_{-1}^1(1-x^2)^2u''^2\,d\mu+\lambda_1\int_{-1}^1(1-x^2)u'^2\,d\mu^{(\alpha)}$$

et

$$\int_{-1}^1\frac{Lu\Gamma(u,u)}{u}\,d\mu=-2\int_{-1}^1(1-x^2)^2\frac{u''u'^2}{u}\,d\mu+\int_{-1}^1(1-x^2)^2\frac{u'^4}{u^2}\,d\mu+2\int_{-1}^1 x(1-x^2)\frac{u'^3}{u}\,d\mu.$$

En reportant ces deux termes dans l'équation (9), on retrouve le résultat du lemme. La démonstration du lemme est terminée.

D'après le théorème 1, la constante de Sobolev pour l'opérateur de Jacobi est strictement inférieure à λ_1. Nous recherchons alors une minoration de la constante de Sobolev sous la forme:

$$B_p\geq(1-c)\lambda_1$$

où $0\leq c<1$. Pour établir cette minoration, on considère l'équation (6) après avoir ajouté un terme $c\lambda_1\int_{-1}^1(1-x^2)u'^2\,d\mu$. On arrive alors à l'équation suivante:

$$[C_\epsilon(1+\epsilon)-\lambda_1(1-c)]\int_{-1}^1(1-x^2)u'^2\,d\mu \qquad (10)$$
$$=\int_{-1}^1(1-x^2)^2\left[u''^2-2\beta(p-1)\frac{u''u'^2}{u}\right]d\mu+2\beta(p-1)\int_{-1}^1 x(1-x^2)\frac{u'^3}{u}\,d\mu$$
$$+[(\beta-1)(1+\beta(p-2))+\beta(p-1)]\int_{-1}^1(1-x^2)^2\frac{u'^4}{u^2}\,d\mu+c\lambda_1\int_{-1}^1(1-x^2)u'^2\,d\mu.$$

Toute notre étude est basée sur le signe du membre de droite de cette équation. Nous recherchons le plus petit c possible de manière à ce que ce terme soit positif. Nous en déduirons alors, que, pour tout $\epsilon > 0$, $C_\epsilon(1+\epsilon) \geq (1-c)\lambda_1$. Par passage à la limite de ϵ vers 0, et pour la valeur minimum de c permise, nous obtiendrons le résultat du théorème 2.

Posons $g(x) = u'u^{-\alpha}$ avec $\alpha \neq 1/3$. Après avoir remarqué que $u'' = g'u^\alpha + \alpha g^2 u^{2\alpha-1}$, l'équation (6) devient :

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - \lambda_1(1-c)] \int_{-1}^1 (1-x^2)u^{2\alpha}g^2\, d\mu = 2\beta(p-1)\int_{-1}^1 (1-x^2)xu^{3\alpha-1}g^3\, d\mu \\
&+ [\alpha^2 - 2\alpha\beta(p-1) + (\beta-1)(1+\beta(p-2)) + \beta(p-1)] \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 u^{4\alpha-2} g^4\, d\mu \\
&+ \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 \left\{u^{2\alpha}g'^2 + [2\alpha - 2\beta(p-1)]u^{3\alpha-1}g^2g'\right\} d\mu. \qquad (11)
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 g^2 g' u^{3\alpha-1}\, d\mu &= \frac{2+\lambda_1}{3}\int_{-1}^1 (1-x^2)xu^{3\alpha-1}g^3\, d\mu \\
&-\frac{3\alpha-1}{3}\int_{-1}^1 (1-x^2)^2u^{4\alpha-2}g^4\, d\mu - \frac{D}{3}\int_{-1}^1 (1-x^2)u^{3\alpha-1}g^3\, d\mu
\end{aligned}$$

et en reportant ce terme dans l'équation (11), on obtient

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - \lambda_1(1-c)] \int_{-1}^1 (1-x^2)u^{2\alpha}g^2\, d\mu = \int_{-1}^1 (1-x^2)^2u^{2\alpha}g'^2\, d\mu \qquad (12) \\
&+ \left[-\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \beta^2(p-2) + \frac{2}{3}\beta(4-p) - 1\right] \int_{-1}^1 (1-x^2)^2u^{4\alpha-2}g^4\, d\mu \\
&+2\left[\beta(p-1) + \frac{(\lambda_1+2)(\alpha-\beta(p-1))}{3}\right]\int_{-1}^1 (1-x^2)xu^{3\alpha-1}g^3\, d\mu \\
&+c\lambda_1\int_{-1}^1 (1-x^2)u^{2\alpha}g^2\, d\mu - \frac{2}{3}[\alpha-\beta(p-1)]D\int_{-1}^1 (1-x^2)u^{3\alpha-1}g^3\, d\mu.
\end{aligned}$$

Notre but est de faire apparaître dans le membre de droite de cette équation sous le signe intégral un polynôme du second degré en la variable g'. Nous choisissons α de manière à ce que le coefficient de p^2g^4 soit nul :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{(3\beta(p-2)+4)(3\beta-2)}}{3}. \qquad (13)$$

De plus, par de simples intégrations par parties, on arrive à

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)xu^{3\alpha-1}g^3\, d\mu = -\frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^1 u^{2\alpha}[Qx + (1-x^2)]g^2\, d\mu - \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^1 (1-x^2)xu^{2\alpha}gg'\, d\mu$$

et

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)u^{3\alpha-1}g^3\, d\mu = -\frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^1 Qu^{2\alpha}g^2\, d\mu - \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^1 (1-x^2)u^{2\alpha}gg'\, d\mu$$

où Q est la fonction utilisée au cours de la démonstration du théorème 1. En remplaçant ces deux termes dans l'équation (12) et en prenant pour α la valeur indiquée au (13), on arrive à l'équation suivante

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - \lambda_1(1-c)] \int_{-1}^{1} (1-x^2) u^{2\alpha} g^2 \, d\mu = \\
&\quad \int_{-1}^{1} u^{2\alpha} \left[(1-x^2)^2 g'^2 + 2pg'g[VD - (1+V(\lambda_1 - 1))x] + DVQg^2 \right] d\mu \\
&\quad -[1+V(\lambda_1-1)] \int_{-1}^{1} (Qx + (1-x^2)) u^{2\alpha} g^2 \, d\mu + c\lambda_1 \int_{-1}^{1} (1-x^2) u^{2\alpha} g^2 \, d\mu,
\end{aligned}$$

avec

$$V = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{\beta(p-1)}{\alpha} \right].$$

Il nous reste maintenant à étudier le signe du membre de droite de cette équation. En fait, nous nous intéressons au signe du polynôme $P_{g'}$ de la variable g' défini par

$$\begin{aligned}
P_{g'} = {} & (1-x^2)^2 g'^2 + 2(1-x^2) g' g [VD - (1+V(\lambda_1-1))x] \\
& + g^2 \left[DVQ - (1+V(\lambda_1-1)) (Qx + (1-x^2)) + c\lambda_1(1-x^2) \right].
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $P_{g'}$ de la variable g' est égal à :

$$\Delta_{g'} = 4(1-x^2)^2 g^2 P_x$$

avec

$$\begin{aligned}
P_x = {} & [(1+V(\lambda_1-1))(V(\lambda_1-1)-\lambda_1) + c\lambda_1]\, x^2 + \\
& D\left[-2V^2(\lambda_1-1) + V(2\lambda_1-3) + 1 \right] x + V^2D^2 - c\lambda_1 - D^2V + 1 + V(\lambda_1-1).
\end{aligned}$$

Nous recherchons c de manière à ce que $P_{g'}$ soit positif ou nul, ce qui revient à démontrer que le discriminant $\Delta_{g'}$ de $P_{g'}$ est négatif ou nul. Pour cela, nous calculons le discriminant Δ_x du polynôme P_x. Si $-1/a \leq V \leq 1$, on obtient :

$$\Delta_x = 4(\lambda_1)^2 (c - c_1)(c - c_2),$$

où

$$c_1 = 1 - \frac{(1-V)\left[-2abV + a + b + 2\sqrt{ab(1+aV)(1+bV)} \right]}{4\lambda_1}$$

et

$$c_2 = 1 - \frac{(1-V)\left[-2abV + a + b - 2\sqrt{ab(1+aV)(1+bV)} \right]}{4\lambda_1}$$

En posant $c = c_1$, on en déduit que $\Delta_x = 0$. On vérifie que, pour cette valeur de c, le coefficient de x^2 dans P_x est négatif. Le fait que $\Delta_x = 0$ entraîne alors que $P_x \leq 0$ et donc que $\Delta_g' \leq 0$. On en déduit alors que $P_{g'}$ est positif et donc la minoration suivante pour la constante C_ϵ :

$$C_\epsilon(1+\epsilon) \geq \frac{(1-V)\left[-2abV + a + b + 2\sqrt{ab(1+aV)(1+bV)} \right]}{4}. \tag{14}$$

Il nous reste maintenant à choisir un V, $-1/a \leq V \leq 1$, optimisant cette minoration. De part la valeur de α (13) et la définition de V, il est facile de vérifier que

$$V \leq \frac{2-p}{2+p}.$$

De plus, cette majoration de V et la minoration $V \geq -1/a$ pour $a > 1$ sont compatibles dès que

$$p \leq \frac{2(a+1)}{a-1}$$

où $2(a+1)/(a-1)$ est l'exposant optimal dans ce cadre et, si $a < 1$, il y a compatibilité pour tout $p > 1$. En posant $V = (2-p)/(p+2)$ et par passage à la limite de ϵ vers 0 dans l'inégalité (14), on trouve la minoration annoncée. La démonstration du théorème 2 est terminée.

Remarques : – Pour l'exposant optimal $p = 2(a+1)/(a-1)$, notre méthode de calcul ne peut fournir une meilleure minoration étant donné que la seule valeur de V permise est $-1/a$.

– Pour des exposants p, $p < 2(a+1)/(a-1)$, le résultat du théorème 2 n'est pas optimal. En effet, si nous considérons la minoration de la constante de Sobolev comme fonction de V que nous notons $m(V)$, on vérifie que $m''(V) \leq 0$ pour $V \in [-1/a, 0]$. De plus, $m'(x)$ tend vers $+\infty$ pour x tendant vers $-1/a$ tend vers $+\infty$ avec $x > -1/a$ et $m'(0) < 0$. On en déduit que la fonction $m(V)$ admet un maximum sur l'intervalle $[-1/a, 0]$. La détermination de ce maximum nous conduit à des calculs presque inextricables et surtout peu explicites.

– Ce choix de $V = (2-p)(p+2)$ nous permet d'atteindre tous les exposants de l'intervalle $[-1/a, 0]$. V étant majoré par $(2-p)(p+2)$, en choisissant une autre valeur pour V, notre minoration ne concernerait qu'un intervalle plus restreint d'exposants p.

– Le cas $a = b$ correspond à l'opérateur associé aux polynômes de Gegenbauer. La minoration s'écrit alors :

$$B_p \geq \frac{(1-V)a}{4}.$$

Naturellement, cette minoration est meilleure pour $V = -1/a = -1/(\lambda_1 - 1)$ et on arrive au résultat suivant :

$$\forall p,\ 2 \leq p \leq \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - 2}, \quad B_p = \lambda_1.$$

Le théorème 2 étend à tous les p de $[2, \frac{2\lambda_1}{\lambda_1-2}]$ les conclusions d'un travail récent de Pearson [13] sur les constantes de Sobolev pour le générateur associé aux polynômes de Gegenbauer.

– Pour $b = 0$, soit $a = 2(\lambda_1 - 1)$, on a

$$B_p \geq (1-V)\frac{a}{4}.$$

La meilleure minoration que nous fournit notre méthode de calcul est atteinte pour $V = -1/a$ ou encore $V = -1/(\lambda_1 - 1)$ et on a alors

$$\forall 2 \leq p \leq \frac{2(2\lambda_1 - 1)}{2\lambda_1 - 3}, \quad B_p \geq \frac{2\lambda_1 - 1}{4}.$$

De plus, seulement pour cette valeur de V et sous la condition $b = 0$, le polynôme P_x est égal à 0. Nous reprendrons ce cas tout à fait particulier lors de la recherche de fonctions extrémales.

2 Constantes de Sobolev et de Sobolev logarithmiques pour l'opérateur de Laguerre

2.1 Introduction et définition

Nous étudions d'une manière analogue les constantes de Sobolev pour des exposants $1 \leq p < 2$ pour l'opérateur associé aux polynômes de Laguerre. Par passage à la limite de p vers 2 dans ces inégalités, nous retrouverons la meilleure constante due à [9] dans l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Considérons les opérateurs suivants agissant sur des fonctions de classe $C^2([0, +\infty[)$ définis par

$$Lf(x) = xf''(x) + Qf'(x)$$

où $Q = -x + D$ et $D \geq 1/2$. Les polynômes de Laguerre forment une base orthonormée de l'espace $L^2(\rho)$ où ρ désigne la mesure de probabilités :

$$d\rho(x) = (x^{D-1}e^{-x}/\Gamma(D))dx.$$

. On associe à L un opérateur gradient itéré Γ défini pour toute fonction de classe C^1 par $\Gamma(f, f) = xf'^2$. De plus, la fonction $H = Q / \int_0^{+\infty} Q^2 \, d\mu$ est fonction propre de $-L$ associée à la première valeur propre $\lambda_1 = 1$. On vérifie que $\int_0^{+\infty} H^3 \, d\rho$ est non nul. En reprenant la démonstration du théorème 1 appliquée à l'opérateur de Laguerre, on vérifie, alors, que la constante de Sobolev est strictement inférieure à 1. Nous en venons maintenant à la minoration de ces constantes.

2.2 Minorations des constantes de Sobolev pour l'opérateur de Laguerre

Nous étudions les constantes B_p dans les inégalités suivantes :

$$\frac{B_p}{p-2} \left[\left(\int_0^{+\infty} f^p \, d\rho \right)^{2/p} - \int_0^{+\infty} f^2 \, d\rho \right] \leq \int_0^{+\infty} (1 - x^2) f'^2 \, d\rho$$

avec $1 \leq p < 2$. Pour l'opérateur associé aux polynômes de Laguerre, il n'existe pas d'inégalités de Sobolev avec des exposants $p > 2$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions suivantes $f(x) = e^{\alpha\sqrt{x} - \alpha^2/2}$. On vérifie que $\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{+\infty} f^2 \, d\rho$

et $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty} xf'^2\,d\rho$ sont finies, tandis que $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty} f^p\,d\rho = \infty$ dès que $p > 2$. Notre étude ne va donc concerner que les constantes de Sobolev relatives aux inégalités de Sobolev d'exposant p, $1 \le p < 2$. Notre résultat est le suivant :

Proposition 1 *Pour tout réel* $1 \le p < 2$, *on a*

$$B_p \ge \frac{(1-V)}{2}\left[2(1-2D)V + 1 + 2\sqrt{(2D-1)V[(2D-1)V+1]}\right],$$

avec

$$V = \frac{2-p}{p+2}.$$

Remarque : Si nous faisons tendre p vers 2 dans les inégalités de Sobolev précédentes, on obtient (voir remarque théorème 2) l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante :

$$B_2\left(\int_0^{+\infty} f^2\log|f|\,d\rho - \int_0^{+\infty} f^2\,d\rho\log\left[\int_0^{+\infty} f^2\,d\rho\right]^{1/2}\right) \le \int_0^{+\infty} xf'^2\,d\rho$$

avec $B_2 = 1/2$. La meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev logarithmique pour $D = 1/2$ a été calculée dans [9] et correspond bien au résultat obtenu.

Démonstration : nous adoptons une démarche analogue à celle effectuée au cours de la démonstration du théorème 2. On considère l'équation non linéaire suivante :

$$Lf = \frac{C_\epsilon}{p-2}[(1+\epsilon)f - f^{p-1}]$$

où L désigne l'opérateur de Laguerre. Par des transformations identiques à celles effectuées sur l'équation (5), on arrive à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - (1-c)]\int_0^{+\infty} xu^{2\alpha}g^2\,d\mu \qquad (15)\\
&= \int_0^{+\infty} x^2\left\{u^{2\alpha}g'^2 + [2\alpha - 2\beta(p-1)]u^{3\alpha-1}g^2g'\right\}d\mu - \beta(p-1)\int_0^{+\infty} xu^{3\alpha-1}g^3\,d\mu\\
&\quad + [\alpha^2 - 2\alpha\beta(p-1) + (\beta-1)(1+\beta(p-2)) + \beta(p-1)]\int_0^{+\infty} x^2u^{4\alpha-2}g^4\,d\mu\\
&\quad + c\int_0^{+\infty} xu^{2\alpha}g^2\,d\mu
\end{aligned}$$

où $0 \le c < 1$. Remarquons de plus que

$$\int_0^{+\infty} x^2g^2g'u^{3\alpha-1}\,d\mu = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} x(Q+1)u^{3\alpha-1}g^3\,d\rho - \frac{3\alpha-1}{3}\int_0^{+\infty} x^2u^{4\alpha-2}g^4\,d\rho.$$

En reportant ce terme dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
&[C_\epsilon(1+\epsilon) - (1-c)]\int_0^{+\infty} xu^{2\alpha}g^2\,d\rho = \qquad (16)\\
&\int_0^{+\infty} x^2u^{2\alpha}g'^2\,d\rho - \frac{2}{3}[\alpha - \beta(p-1)]\int_0^{+\infty} xQu^{3\alpha-1}g^3\,d\rho\\
&+ \left[-\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \beta^2(p-2) + \frac{2}{3}\beta(4-p) - 1\right]\int_0^{+\infty} x^2u^{4\alpha-2}g^4\,d\rho\\
&+ c\int_0^{+\infty} xu^{2\alpha}g^2\,d\rho - \left[\beta(p-1) + \frac{2(\alpha - \beta(p-1))}{3}\right]\int_0^{+\infty} xu^{3\alpha-1}g^3\,d\rho.
\end{aligned}$$

Nous reprenons pour α la valeur calculée au (13) de manière à ce que le coefficient de x^2g^4 soit nul. Par de simples intégrations par parties, on calcule :

$$\int_0^{+\infty} xu^{3\alpha-1}g^3\,d\rho = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} u^{2\alpha}[Qg^2+2xgg']\,d\rho$$

et

$$\int_0^{+\infty} xQu^{3\alpha-1}g^3\,d\rho = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} u^{2\alpha}[Q^2xg^2-xg^2+2xQgg']\,d\rho.$$

En reportant ces termes ainsi que la valeur de α (13) dans l'équation (16), il vient que :

$$[C_\epsilon(1+\epsilon)-(1-c)]\int_0^{+\infty} xu^{2\alpha}g^2\,d\rho = \int_0^{+\infty} u^{2\alpha}P_{g'}\,d\rho$$

avec

$$P_{g'} = x^2g'^2 + xg'g[2VQ+(1-V)] + \left[V(Q^2-x)+\frac{1-V}{2}Q+cx\right]g^2$$

où

$$V = \frac{1}{3}\left[1-\frac{\beta(p-1)}{\alpha}\right].$$

Nous cherchons c et V de manière à ce que ce polynôme soit positif. Le discriminant de $P_{g'}$ est égal à $\Delta'_g = p^2P_x$ où

$$\begin{aligned}P_x = 4V(V-1)x^2 + 2x\,&[(V-1)(2V-1-4DV)+2V-2c]\\ &+(V-1)[4VD^2-2D(2V-1)+V-1].\end{aligned}$$

Pour que Δ'_g soit négatif, il est nécessaire que $0<V<1$. De plus, ce discriminant sera négatif, si celui associé au polynôme P_x est négatif. On a

$$\Delta_x = 4(2c-c_1)(2c-c_2)$$

avec

$$c_1 = 2V-(1-V)(2V-1)-4DV(V-1)-2(1-V)\sqrt{(2D-1)[(2D-1)V+1]}$$

et

$$c_2 = 2V-(1-V)(2V-1)-4DV(V-1)+2(1-V)\sqrt{(2D-1)[(2D-1)V+1]}.$$

En posant $c=c_1/2$, $\Delta_x=0$ et donc P_x est négatif. On en déduit que $P_{g'}$ est positif pour toute fonction g. On obtient, finalement, la minoration suivante pour la constante B_p

$$B_p \geq \frac{(1-V)}{2}\left[2(1-2D)V+1+2\sqrt{(2D-1)V[(2D-1)V+1]}\right].$$

De part la valeur de α choisie et la définition de V, on vérifie que $V\leq(2-p)/(p+2)$. Cette minoration et la condition $0<V<1$ sont compatibles dès que $1\leq p<2$. Finalement, en posant $V=(2-p)/(p+2)$, on trouve la minoration de la constante de Sobolev énoncée. La démonstration de la proposition 1 est terminée.

Remarques : – comme pour le cas des polynômes de Jacobi, nous ne pouvons conclure à l'optimalité de cette minoration. La valeur de V choisie nous permet seulement d'atteindre des exposants p avec $1 \leq p < 2$. Toutefois, on peut espérer trouver une meilleure minoration par un autre choix de V mais pour des valeurs de p plus restreintes.

– Ce choix de $V = (2-p)/(p-2)$ nous permet d'atteindre par passage à la limite l'exposant $p = 2$ et donc la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev logarithmique pour $D = 1/2$ due à [9]. De plus, dans ce cadre, notre méthode de calcul n'autorise qu'une valeur pour V à savoir $V = 0$.

– Si $D = 1/2$ et $p = 2$, on pose $V = 0$. Le polynôme P_x s'écrit alors $P_x = 2x[1-2c]$. Nous voyons que la meilleure minoration est atteinte pour $c = 1/2$, ce qui entraîne que P_x est nul. Cette remarque sera reprise lors de l'étude des fonctions extrémales relatives à ces opérateurs.

2.3 Quelques remarques sur les fonctions extrémales

Nous avons vu que dans le cadre d'opérateurs de la forme

$$Lf = (1-x^2)f'' + (-\lambda_1 x + D)f',$$

la constante de Sobolev est différente du trou spectral λ_1. L'intérêt de cette minoration est qu'elle permet de faire le lien entre la constante de Sobolev obtenue par Bakry [2] pour l'exposant optimal et la constante de Sobolev logarithmique due à Saloff-Coste [15] pour l'opérateur associé aux polynômes de Jacobi. D'après la remarque suivant le théorème 2, le cas $b = 0$ et $a \neq 0$ semble être un exemple tout à fait particulier. En effet, considérons l'équation non linéaire suivante :

$$Lf = \frac{B_p}{p-2}[f - f^{p-1}] \tag{17}$$

où $p = 2(a+1)/(a-1)$ et $B_p = (a+1)/4$. En faisant des opérations identiques à celles effectuées sur l'équation (5), on arrive à l'équation

$$\int_{-1}^{1} u^{2\alpha} P_{g'}\, d\mu = 0.$$

Pour de telles valeurs de a, b et B_p, on vérifie que le polynôme P_x est égal à 0. On en déduit que $\Delta_{g'} = 0$ et donc que $P_{g'} \geq 0$. D'après l'équation précédente, nécessairement $P_{g'} = 0$. Il est facile alors de déterminer une fonction g telle que $P_{g'} = 0$. On trouve $g(x) = (1-x)^{-1/2}$. On en déduit, que

$$f(x) = \left[d - 2\eta(1-x)^{1/2}\right]^{(a-1)/2}.$$

En reportant cette valeur de f dans l'équation (17), d et η doivent vérifier la condition suivante $d^2 = 8\eta^2 + 1$. Maintenant, en multipliant cette équation par f puis en l'intégrant par rapport à la mesure μ, il vient que :

$$\frac{a+1}{4(p-2)}\left[\int_{-1}^{1} f^p\, d\mu - \int_{-1}^{1} f^2\, d\mu\right] = \int_{-1}^{1} (1-x^2) f'^2\, d\mu \tag{18}$$

avec $p = 2(a+1)/(a-1)$. Cependant, excepté pour $\eta = 0$ c'est-à-dire $f = 1$, la fonction f trouvée n'est pas fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev car elle ne satisfait pas la condition de normalisation $\int_{-1}^{1} f^p \, d\mu = 1$. En fait, on vérifie que cette norme est strictement supérieure à 1. L'équation (18) implique seulement l'inégalité de Sobolev suivante :

$$\frac{a+1}{4(p-2)} \left[\left(\int_{-1}^{1} f^p \, d\mu \right)^{2/p} - \int_{-1}^{1} f^2 \, d\mu \right] \leq \int_{-1}^{1} (1-x^2) f'^2 \, d\mu.$$

D'une manière analogue, dans le cadre d'opérateurs de la forme

$$Lf = xf'' + (-x + D)f',$$

la proposition 1 nous donne la meilleure minoration pour la constante de Sobolev logarithmique à savoir $B_2 = 1/2$. Nous recherchons, alors, une fonction extrémale relative à cette constante. Cette valeur de la constante correspond dans la proposition 1, à $V = 0$ et donc à $\alpha = \beta = 1$. De plus, d'après la remarque de la proposition 1, si $D = 1/2$ et sous l'hypothèse $B_2 = 1/2$ soit $c = 1/2$, le polynôme P_x est égal à 0. Pour ce cas particulier, on peut s'attendre alors à trouver une fonction extrémale pour cette inégalité de Sobolev logarithmique. Mais, par notre méthode, nous arrivons seulement à une fonction non constante ne satisfaisant pas la condition de normalisation $\int_0^{+\infty} f^2 \, d\rho = 1$ et vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f^2 \log f \, d\rho = \int_0^{+\infty} \Gamma(f, f) \, d\rho.$$

Finalement, dans le cadre où les constantes de Sobolev ou de Sobolev logarithmiques sont différentes de $\lambda_1^{(\alpha)}$, notre méthode montrerait que seules les fonctions constantes sont extrémales pour les inégalités de Sobolev ou de Sobolev logarithmiques.

Je tiens à remercier M. Ledoux pour ses idées et ses conseils lors de l'élaboration de cet article.

Références

[1] D. Bakry, "L'Hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes," Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXII-1992, p. 1-114, Lecture Notes in Math., Vol. 1581, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1994.

[2] D. Bakry, Remarques sur les semi-groupes de Jacobi, *Astérisque, Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu*, p. 23-39, **236**, (1996).

[3] D. Bakry et M. Emery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX, pp.175-206, Lecture Notes in Math., Vol. 1123, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1985.

[4] A. Bentaleb, Inégalité de Sobolev pour l'opérateur ultrasphérique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 317, (1993), 187-190.

[5] M. Berger, P. Gauduchon, et E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math., Vol. 194, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1971.

[6] E. Fontenas, Constantes dans les inégalités de Sobolev et fonctions extrémales, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse III, (1995).

[7] E. Fontenas, Sur les constantes de Sobolev des variétés riemanniennes compactes et les fonctions extrémales des sphères, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, p. 71-96, Vol. 121, 2, (1997).

[8] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, **97**, (1975), 1061-1083.

[9] A. Korzeniowski et D. Stroock, An example in the theory of hypercontractive semigroups, *Proc. A. M. S.*, **94**, No 1, (1985), 87-90.

[10] O. Mazet, Caractérisation des semi-groupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$ associés à des familles de polynômes orthogonaux, Séminaire de Probabilités XXXI, Lecture Notes in Math, 1655, Springer-Verlag, (1997).

[11] C. Mueller et F. Weissler, Hypercontractivity for the heat semigroup for ultraspherical polynomials and on the n-sphere, *J. Funct. Anal.* **48** (1982), 252-283.

[12] A. Nikiforov, V. Ouvarov, "Fonctions spéciales de la physique mathématique," Éditions Mir, Moscou, 1983.

[13] J. M. Pearson, Best Constants in Sobolev Inequalities for Ultraspherical Polynomials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **116** (1991), 361-374.

[14] O. S. Rothaus, Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compaet Lie groups, *J. Funct. Anal.* **65** (1986), 358-367.

[15] L. Saloff-Coste, Precise estimates on the rate at which certain diffusions tend to equilibrium, *Math. Z.* **217** (1994), 641-677.