SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BENOÎT CADRE

Une preuve « standard » du principe d'invariance de Stoll

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 85-102
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__85_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE PREUVE STANDARD DU PRINCIPE D'INVARIANCE DE STOLL

B.Cadre
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES

Introduction

En utilisant l'analyse non-standard, Stoll [20] a prouvé que le temps local d'intersection renormalisé d'un mouvement brownien plan pouvait être construit par passage à la limite d'un équivalent discret construit avec des marches aléatoires. Le but de cet article est de retrouver ce résultat, en utilisant des techniques classiques.

Rappelons donc tout d'abord ce qu'est le temps local d'intersection renormalisé d'un mouvement brownien plan W issu de 0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (nous renvoyons à Bass-Khoshnevisan [1], Le Gall [10] et [11], Werner [22] et Yor [24] pour de plus amples informations). Pour tout A borélien borné de $\mathbb{R}^2_+$, définissons la mesure $\lambda_A(dz)$ sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ par $\lambda_A(f) = \int_A f(W_u - W_v)dudv$, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne bornée. Rosen [16] a montré que la mesure λ_A admet une densité $(\alpha(z, A); z \in \mathbb{R}^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, appelée temps local d'intersection de W. Cependant, $\alpha(0, A) = +\infty$ P-ps lorsque A rencontre la diagonale de $\mathbb{R}^2_+$. Le Gall [10], Rosen [17] et Yor [24] montrent alors, selon l'idée de renormalisation de Varadhan [21], que la fonction $z \mapsto \gamma(z, A)$ définie pour $z \neq 0$ par $\gamma(z, A) = \alpha(z, A) - E[\alpha(z, A)]$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier. Naturellement, $(\gamma(z, A); z \in \mathbb{R}^2)$ a été baptisé temps local d'intersection renormalisé de W.

Considérons alors une marche aléatoire de carré intégrable $(S_n)_{n\geq 0}$ issue de 0, à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, telle que $(S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq 1}$ converge en loi vers un mouvement brownien plan W issu de 0. Si, pour chaque borélien borné A, $(\gamma(z, A); z \in \mathbb{R}^2)$ désigne le temps local d'intersection renormalisé de W, on peut légitimement s'attendre, au moins pour certaines de ces marches aléatoires, à ce que la convergence en loi suivante soit vraie:

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=0}^{n}(I_{(S_i=S_j)} - P(S_i = S_j)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \gamma(0, [0, 1]^2).$$

En dehors de Stoll [20] qui a prouvé cette convergence dans un contexte non-standard, ce résultat a été montré, en utilisant l'analyse standard, par Brydges et Slade [4] (lorsque $(S_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$) ou bien par Le Gall [12] (dans un contexte très général concernant la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$). Signalons enfin que Rosen [18] a lui aussi obtenu ce résultat avec l'analyse standard, mais il doit supposer que la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ est fortement apériodique, ce qui n'est pas le cas de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ par exemple.

Les méthodes utilisées par ces auteurs reposent essentiellement sur des estimations classiques de la transformée de Fourier d'une marche aléatoire. La méthode que nous allons exposer, quant à elle, repose aussi bien entendu sur de telles estimations : nous utilisons des inégalités prouvées par Stoll [20], que l'on peut obtenir aussi bien avec l'analyse standard (dans la preuve de Stoll, l'intérêt de l'analyse non-standard apparaît plus loin). Mais aussi, notre méthode repose sur un résultat de plongement. Plus précisément, nous montrons que certaines marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ peuvent être plongées dans un mouvement brownien plan. Ce plongement est en fait obtenu par prolongement du résultat classique de plongement en dimension 1, que l'on trouve par exemple dans le livre de Revuz et Yor [15]. Enfin, mentionnons le fait que nous prouvons en réalité un résultat de convergence fonctionnelle sur les variables de temps et d'espace, alors que les auteurs précédents obtiennent des résultats de convergence ponctuelle.

Comme conséquence du théorème limite que nous venons d'évoquer (en réalité comme conséquence d'un résultat un peu plus fort), nous retrouvons un résultat prouvé par Stoll [20] (toujours en utilisant l'analyse non-standard), Le Gall [12] et Brydges et Slade [4]. Ce résultat affirme que la mesure de Domb-Joyce converge au sens de la topologie de la convergence étroite vers la mesure de polymère.

Nous préciserons en partie I les hypothèses et les notations de cet article, et nous définirons les mesures de Domb-Joyce et de polymère. Dans cette même partie, nous énonçerons le principal résultat (théorème 1) concernant l'approximation du temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien plan. Enfin, le résultat de convergence pour la mesure de Domb-Joyce sera énonçé (corollaire 1).

La partie II sera consacrée à rappeler quelques résultats plus ou moins classiques sur les temps locaux d'intersections associés au mouvement brownien ou à la marche aléatoire.

Dans la partie III, nous prouverons le théorème 1. C'est dans cette partie que le lemme de plongement (lemme 3) sera énonçé et prouvé.

Enfin, en partie IV, nous prouverons le corollaire 1.

I- Notations et présentation des principaux résultats

Dans tout ce qui suit, nous noterons $\rightarrow^{L^p}$ la convergence dans L^p pour $p \geq 1$ et $\rightarrow^{\mathcal{L}}$ la convergence en loi.

Si $z = (z^1, z^2) \in \mathbb{R}^2$, nous appelerons $[z]$ l'élément de $\mathbb{Z}^2$: $([z^1], [z^2])$, où $[.]$ désigne la partie entière.

D'autre part, si M est un processus stochastique, nous noterons $\mathcal{F}^M$ la filtration naturelle associée à M, $\mathcal{L}(M)$ la loi de M, et si M est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, nous appelerons (M^1, M^2) ses coordonnées.

Si $Z \in L^1$, nous noterons $\{Z\}$ la variable aléatoire recentrée $\{Z\} = Z - E[Z]$.

Enfin, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, Δ_t désignera le triangle défini par $\Delta_t = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 \,:\, 0 \leq u < v \leq t\}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, D_k sera l'équivalent discret de Δ_t : $D_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \,:\, 0 \leq i < j \leq k\}$.

Soit Q une mesure de probabilité centrée sur $\mathbb{Z}^2$, à support compact, et telle que

$$Q(x, y) = Q(x, -y) \;\forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Si $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et même loi Q, on associe la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ issue de 0 définie pour chaque $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Nous supposerons enfin que $(S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée (apériodique au sens de Spitzer [19]), au sens où cette marche aléatoire ne vit pas sur un sous-groupe strict de $\mathbb{Z}^2$. Par exemple, la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ vérifie ces hypothèses.

En dehors de l'hypothèse $Q(x,y) = Q(x,-y)\ \forall x,y \in \mathbb{Z}$, qui entraîne que la matrice $\int z.z^T dQ(z)$ est diagonale, toutes ces hypothèses sur la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ ont été supposées par Stoll [20]. Nous pourrons donc utiliser dans la suite certaines des estimations de Stoll qui peuvent être obtenues aussi bien au moyen de l'analyse standard.

Nous appelerons aussi, pour chaque $n \geq 1$, $z \in \mathbb{Z}^2$ et A sous-ensemble borné de $\mathbb{N}^2$:

$$\gamma_n(z,A) = \frac{1}{n} \sum_{(i,j)\in A} \{I_{(S_j = S_i + z)}\}.$$

Notons W un mouvement brownien plan sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ issu de 0, avec $\mathrm{cov}(W_1) = \int z.z^T dQ(z)$. Pour chaque borélien borné A de $\mathbb{R}_+^2$, nous assoçions à W son temps local d'intersection renormalisé $(\gamma(z,A); z \in \mathbb{R}^2)$.

Notre principal résultat est le suivant:

Théorème 1 *Nous avons le résultat de convergence fonctionnelle:*

$$((\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}})_{t\leq 1}, (\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}))_{t\leq 1, z\in\mathbb{R}^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} ((W_t)_{t\leq 1}, (\gamma(z,\Delta_t))_{t\leq 1, z\in\mathbb{R}^2}).$$

Remarque - Un des intérêts de l'utilisation d'un lemme de plongement (alors que les auteurs précédents ne s'en servent pas) est que l'on peut obtenir, moyennant de très légères modifications de la preuve du théorème 1, la version forte du théorème 1, prolongeant ainsi l'étude de Csàki et Révész [6] pour le temps local du mouvement brownien réel (voir [5], théorème II.3.2.1).

- Une méthode similaire à celle que nous allons exposer permet de retrouver le résultat équivalent en dimension 1, résultat qui a été obtenu par exemple par Borodin [3].

- Nous avons montré dans [5] (théorème II.2.4.1) le résultat correspondant en dimension 3 (en supposant donc que $z \neq 0$ car il n'existe pas de renormalisation de Varadhan en dimension 3).

Pour chaque $g \geq 0$ et $n \geq 1$, définissons maintenant la mesure de Domb-Joyce μ_g^n (cf. [7]) par:

$$\mu_g^n(d\omega) = \frac{1}{L_g^n} \exp(-\frac{g}{n} \sum_{i<j\leq n} I_{(S_j = S_i)}) P_n(d\omega),$$

où P_n est la loi de $(S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq 1}$ et $L_g^n = E[\exp(-g/n\sum_{i<j\leq n} I_{(S_j=S_i)}]$. Notons de plus, pour chaque $g \geq 0$, μ_g la mesure de polymère définie par:

$$\mu_g(d\omega) = \frac{1}{L_g}\exp(-g\gamma(0,\Delta_1))P_W(d\omega),$$

où P_W est la loi de W et $L_g = E[\exp(-g\gamma(0,\Delta_1))]$. Nous verrons plus loin que $\gamma(0,\Delta_1)$ possède des moments exponentiels, ce qui justifie la définition qui précède.

Il est intuitivement clair que μ_g est l'équivalent continu de μ_g^n. C'est ce que prouve le corollaire suivant:

Corollaire 1 *Pour tout $g \geq 0$, μ_g^n converge au sens de la topologie de la convergence étroite vers μ_g.*

II- Quelques rappels sur les temps locaux d'intersection

Tout d'abord, rappelons la formule classique du temps d'occupation:

Proposition 1 *Soit f une fonction borélienne bornée. Si A est un borélien borné de $\mathbb{R}_+^2$, le temps local d'intersection renormalisé $(\gamma(z,A); z \in \mathbb{R}^2)$ de W vérifie P-ps l'égalité:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\gamma(z,A)dz = \int_A \{f(W_u - W_v)\}dudv.$$

Le résultat qui suit a été obtenu, du moins lorsque $z = 0$, par Le Gall [10], Rosen [17] et Yor [24]. L'extension à $z \in \mathbb{R}^2$ est évidente à partir des démonstrations de ces auteurs.

Théorème 2 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions bornées, d'intégrales égales à 1, tel que $f_n(y)dy$ converge étroitement vers la mesure de Dirac en $z \in \mathbb{R}^2$. Alors, si A est un borélien borné de $\mathbb{R}_+^2$, on a pour chaque $p \geq 1$:*

$$\int_A \{f_n(W_u - W_v)\}dudv \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} \gamma(z,A).$$

Enfin, le dernier résultat a été établi par Stoll [20] dans un contexte d'analyse non-standard. La preuve est en réalité calquée sur celles de Geman, Horowitz et Rosen [8] et de Le Gall [10] dans le cas brownien, et elle ne nécessite pas l'utilisation de l'analyse non-standard. Dans la preuve de Stoll, l'intérêt de l'analyse non-standard apparaît plus tard.

Théorème 3 *Soit p un entier pair. Pour tout $\lambda \in]0,1[$, il existe une constante c telle que si $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$ et $n \geq 1$:*

i) $||\gamma_n(z_1,D_n) - \gamma_n(z_2,D_n)||_{L^p} \leq c(\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{n}})^\lambda$;

ii) $||\gamma_n(z_1,D_n)||_{L^p} \leq c.$

Si de plus $A = \{(i,j) \,:\, i = a_1, \cdots, a_2$ et $j = b_1, \cdots, b_2\}$, *où* a_1, a_2, b_1, b_2 *sont des entiers tels que* $a_1 < a_2 \leq b_1 < b_2$*:*

$$\text{iii)}\ \|\sum_{(i,j)\in A} I_{(S_j - S_i = z_1)}\|_{L^p} \leq \frac{c}{n}\sqrt{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}.$$

III- Preuve du Théorème 1

Le théorème 1 sera une conséquence des deux lemmes, que nous montrerons à la fin de cette partie:

Lemme 1 *Pour chaque* $n \geq 1$*, il existe une suite de variables aléatoires* $(T_k^n)_{k \leq n} = (T_k^{1,n}, T_k^{2,n})_{k \leq n}$ *telle que si le processus* $(W^1_{T^{1,n}_{[nt]}}, W^2_{T^{2,n}_{[nt]}})_{t \leq 1}$ *est noté de façon abusive* $(W_{T^n_{[nt]}})_{t \leq 1}$*:*

$$\mathcal{L}((W_{T^n_{[nt]}})_{t \leq 1}) = \mathcal{L}((\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}})_{t \leq 1}) \text{ et } \sup_{t \leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} 0.$$

De plus, nous avons le résultat:

Lemme 2 *Soit p un entier pair. Il existe une constante c telle que pour chaque* $n \geq 1$*,* $z \in \mathbb{Z}^2$ *et* $s < t \leq 1$*:*

$$\|\gamma_n(z, D_{[nt]}) - \gamma_n(z, D_{[ns]})\|_{L^p} \leq c\sqrt{\frac{[nt] - [ns]}{n}}.$$

Preuve du théorème 1 Dans ce qui suit, c désignera une constante positive qui pourra varier de place en place.

Soit $t \leq 1$, $z \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable à support compact, de différentielle bornée et d'intégrale 1. Soit pour chaque $n \geq 1$, $(W_{T^n_{[nt]}})_{t \leq 1}$ le processus introduit dans le lemme 1, et $\theta(n)$ le nombre

$$\theta(n) = (E[\sup_{t \leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t|] + \frac{1}{\sqrt{n}})^{-1/6}.$$

Toujours d'après le lemme 1, $\theta(n) \to \infty$ si $n \to \infty$. Enfin, désignons pour chaque $n \geq 1$ la fonction f_n définie pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ par

$$f_n(y) = \theta(n)^2 f(\theta(n)(y - z)).$$

D'après le théorème 2, puisque $f_n(y)dy$ converge au sens de la topologie de la convergence étroite vers la mesure de Dirac en z:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(y)\gamma(y, \Delta_t)dy \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} \gamma(z, \Delta_t).$$

D'autre part, d'après la proposition 1, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(y)\gamma(y,\Delta_t)dy = \int_{\Delta_t} \{f_n(W_v - W_u)\}dudv.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient d'après notre choix pour la suite $(\theta(n))_{n\geq 1}$:

$$\begin{aligned}
&E[|\int_{\Delta_t} \{f_n(W_v - W_u)\}dudv - \int_{\Delta_t} \{f_n(W_{T^n_{[nv]}} - W_{T^n_{[nu]}})\}dudv|] \\
&\leq c\,\theta(n)^3 E[\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t|] \\
&\leq c\,(E[\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t|])^{1/2}
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 si n tend vers l'infini selon le lemme 1. Or, toujours d'après le lemme 1, pour chaque $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}(\int_{\Delta_t} \{f_n(W_{T^n_{[nv]}} - W_{T^n_{[nu]}})\}dudv) = \mathcal{L}(\int_{\Delta_t} \{f_n(\frac{S_{[nv]} - S_{[nu]}}{\sqrt{n}})\}dudv).$$

Puis, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_t} \{f_n(\frac{S_{[nv]} - S_{[nu]}}{\sqrt{n}})\}dudv &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{[nt]-1} \sum_{l=j+1}^{[nt]} \{f_n(\frac{S_l - S_j}{\sqrt{n}})\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}^2} f_n(\frac{y}{\sqrt{n}})\gamma_n(y, D_{[nt]}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}})\gamma_n([y\sqrt{n}], D_{[nt]})dy
\end{aligned}$$

Utilisant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, nous trouvons pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&E[|\int_{\mathbb{R}^2} f_n(\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}})\gamma_n([y\sqrt{n}], D_{[nt]})dy - \int_{\mathbb{R}^2} f_n(y)\gamma_n([y\sqrt{n}], D_{[nt]})dy|] \\
&\leq c\,\theta(n)^3 \int_K |\frac{[y\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} - y| E[|\gamma_n([y\sqrt{n}], D_{[nt]})|]dy \\
&\leq c \sup_{n\geq 1} \sup_{y\in\mathbb{Z}^2} E[|\gamma_n(y, D_{[nt]})|] \frac{\theta(n)^3}{\sqrt{n}} \\
&\leq c \sup_{n\geq 1} \sup_{y\in\mathbb{Z}^2} E[|\gamma_n(y, D_{[nt]})|] \frac{1}{n^{1/4}},
\end{aligned}$$

où K est un certain compact de $\mathbb{R}^2$ contenant le support de f. Or, $E[|\gamma_n(y, D_{[nt]})|]$ est borné uniformément en $n \geq 1$ et $y \in \mathbb{Z}^2$ d'après le théorème 3 ii), donc le dernier terme de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 si n tend vers l'infini. Ensuite, par un changement de variable évident, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(y)\gamma_n([y\sqrt{n}], D_{[nt]})dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\gamma_n([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + z\sqrt{n}], D_{[nt]})dy.$$

Alors, d'après le théorème 3 i), puisque $\int f(y)dy = 1$:

$$E[|\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\gamma_n([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + z\sqrt{n}], D_{[nt]})dy - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}|]$$
$$\leq \int_{\text{supp} f} E[|\gamma_n([\frac{y\sqrt{n}}{\theta(n)} + z\sqrt{n}], D_{[nt]})dy - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]})|]dy \leq \frac{c}{\theta(n)^{1/2}}.$$

Puisque $\theta(n) \to \infty$ si $n \to \infty$, ceci montre finalement que nous avons obtenu, à $t \leq 1$ et $z \in \mathbb{R}^2$ fixés, la convergence en loi:

$$\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \gamma(z, \Delta_t).$$

Il est clair que la méthode que nous venons d'exposer s'applique aussi bien pour établir la convergence des répartitions fini-dimensionnelles de la suite de processus

$$((S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq 1}, (\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}))_{t\leq 1, z\in\mathbb{R}^2})_{n\geq 1}$$

vers celles de $((W_t)_{t\leq 1}, (\gamma(z, \Delta_t))_{t\leq 1, z\in\mathbb{R}^2})$. Il reste à obtenir un résultat de tension pour cette suite de processus. La tension de la suite de processus $((S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\leq 1})_{n\geq 1}$ se montre de la façon classique (voir par exemple le théorème 16.1 de Billingsley [2]). Pour simplifier, nous nous contenterons de montrer que la suite de processus $((\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}))_{t\leq 1})_{n\geq 1}$ à $z \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour obtenir en plus la tension de la suite $((\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}))_{z\in\mathbb{R}^2, t\leq 1})_{n\geq 1}$, on procède de la même manière en utilisant le théorème 3 i) et le lemme 2.

Soient $z \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$ et $n \geq 1$. Selon le lemme 2, on a

$$E[(\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}) - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_1]}))^2(\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}) - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_2]}))^2]$$
$$\leq c\frac{[nt] - [nt_1]}{n}\frac{[nt_2] - [nt]}{n} \leq c(\frac{[nt_2] - [nt_1]}{n})^2.$$

Deux cas se présentent:
- Si $t_2 - t_1 \geq 1/n$ alors $[nt_2] - [nt_1] \leq 2(nt_2 - nt_1)$
- Si $t_2 - t_1 < 1/n$ alors, t_1 et t ou t_2 et t sont dans le même intervalle $[(i-1)/n, i/n[$ et donc $\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]})$ est soit égal à $\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_1]})$, soit à $\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_2]})$.

Globalement, nous avons donc

$$E[(\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}) - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_1]}))^2(\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}) - \gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt_2]}))^2]$$
$$\leq c(t_2 - t_1)^2,$$

ce qui, d'après le théorème 15.6 de Billingsley [2], montre la tension de la suite des processus $((\gamma_n([z\sqrt{n}], D_{[nt]}))_{t\leq 1})_{n\geq 1}$, et termine la preuve du théorème 1 ■

Nous allons tout d'abord prouver le résultat de plongement du lemme 1, et nous prouverons que la marche aléatoire résultant de ce plongement vérifie la deuxième assertion du lemme 1. Afin d'établir le résultat de plongement en dimension 2, nous allons utiliser un résultat de plongement uni-dimensionnel montré par exemple dans Revuz et Yor [15] (théorème 5.4, chapitre VI). Rappelons ce résultat dans le contexte qui nous intéresse:

Théorème 4 *Soit B un mouvement brownien réel centré sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et ν une mesure de probabilité centrée telle que $\int |x| d\nu(x) < \infty$. Il existe un temps d'arrêt T_ν (dépendant mesurablement de ν) P-ps fini, relativement à $\mathcal{F}^B$ et vérifiant:*

i) $(B_{t\wedge T_\nu})_{t\geq 0}$ est uniformément integrable et $\mathcal{L}(B_{T_\nu}) = \nu$

ii) $E[B_1^2]\, E[T_\nu] = \int x^2 d\nu(x)$

iii) Pour tout $p \geq 1$, il existe une constant universelle c_p telle que $E[B_1^{2p}]\, E[T_\nu^p] \leq c_p \int x^{2p} d\nu(x)$.

Remarque Le point iii) ne figure pas dans Revuz et Yor [15], mais est donné par Haeusler [9].

Avant d'énoncer notre résultat de plongement, nous définissons quelques notations. Rappelons que $(X_k)_{k\geq 1}$ est la suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi Q telles que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour chaque $n \geq 1$. Soit C le support de la mesure $P_{X_1^1}$:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : P_{X_1^1}(x) > 0\},$$

et pour chaque $n \geq 1$, $C_n = (1/\sqrt{n})C$.

Lemme 3 *Soit $n \geq 2$ et $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de C_n. Il existe des temps d'arrêts $\tau_1^{1,n}, \cdots, \tau_n^{1,n}, \tau_1^{2,n}(x_1), \tau_2^{2,n}(x_1, x_2) \cdots, \tau_n^{2,n}(x_1, \cdots, x_n)$ adaptés respectivement aux filtrations engendrées par des mouvements browniens réels indépendants $W^{1,1}, \cdots, W^{1,n}, W^{2,1}, W^{2,2}(x_1), \cdots, W^{2,n}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ tels que, si $T_0^{1,n} = T_0^{2,n} = 0$ et pour chaque $k \geq 1$, $T_k^{1,n} = \sum_{i=1}^k \tau_i^{1,n}$ et $T_k^{2,n} = \sum_{i=1}^k \tau_i^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,n}_{\tau_i^{1,n}})$, on a*

$$\mathcal{L}((W^1_{T_k^{1,n}}, W^2_{T_k^{2,n}})_{k\leq n}) = \mathcal{L}((\frac{S_k}{\sqrt{n}})_{k\leq n}).$$

De plus, ces temps d'arrêts sont tels que pour chaque $p \geq 1$, il existe une constante c_p telle que $\forall n \geq 2$:

$$\sup_{k=1,\cdots,n} \Big(\sup_{x_1,\cdots,x_k \in C_n} E[\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)^p] + \sup_{k=1,\cdots,n} E[(\tau_k^{1,n})^p]\Big) \leq \frac{c_p}{n^p}$$

$$\text{et } \forall n \geq 2, k = 1, \cdots, n \ : \ E[\tau_k^{1,n}] = E[\tau_k^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^{1,n}})] = \frac{1}{n}.$$

Remarque Dans l'énonçé de ce lemme, les mouvements browniens réels $W^{1,1}, \cdots,$

$W^{1,n}, W^{2,1}, W^{2,2}(x_1), \cdots, W^{2,n}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ dépendent en réalité de n, comme nous le verrons dans la preuve. Nous n'écrivons pas cette dépendance en n de façon à ne pas alourdir les notations.

Preuve Soit $n \geq 2$ et $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de C_n. Dans un souci de simplification, notons pour chaque $k \geq 1$:

$$(U_k^1, U_k^2) = (\frac{X_k^1}{\sqrt{n}}, \frac{X_k^2}{\sqrt{n}}).$$

Appelons $W^{1,1} := W^1$ et $W^{2,1} := W^2$. D'après le théorème 4, puisque la mesure $P_{U_1^1}$ est par hypothèse centrée, il existe un temps d'arrêt $\tau_1^{1,n}$ adapté à $\mathcal{F}^{W^{1,1}}$ tel que $\mathcal{L}(U_1^1) = \mathcal{L}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}})$. De même, la mesure $P_{U_1^2|U_1^1=x_1}$ est centrée car $Q(x,y) = Q(x,-y)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ par hypothèse et donc, d'après le théorème 4, il existe un temps d'arrêt $\tau_1^{2,n}(x_1)$ adapté à $\mathcal{F}^{W^{2,1}}$ tel que $\mathcal{L}(U_1^2|U_1^1 = x_1) = \mathcal{L}(W^{2,1}_{\tau_1^{2,n}(x_1)})$. Appelons alors $W^{1,2}$ et $W^{2,2}(x_1)$ les mouvements browniens réels définis pour chaque $t \geq 0$ par

$$W_t^{1,2} = W^{1,1}_{t+\tau_1^{1,n}} - W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}} \text{ et } W_t^{2,2}(x_1) = W^{2,1}_{t+\tau_1^{2,n}(x_1)} - W^{2,1}_{\tau_1^{2,n}(x_1)}.$$

Pour la même raison, il existe d'après le théorème 4 un temps d'arrêt $\tau_2^{1,n}$ adapté à $\mathcal{F}^{W^{1,2}}$ tel que $\mathcal{L}(U_2^1) = \mathcal{L}(W^{1,2}_{\tau_2^{1,n}})$. De même, la mesure $P_{U_2^2|U_2^1=x_2}$ étant centrée, il existe un temps d'arrêt $\tau_2^{2,n}(x_1, x_2)$ adapté à $\mathcal{F}^{W^{2,2}(x_1)}$ tel que $\mathcal{L}(U_2^2|U_2^1 = x_2) = \mathcal{L}(W^{2,2}_{\tau_2^{2,n}(x_1,x_2)}(x_1))$. Les processus $W^{1,1}, W^{1,2}$, ainsi que $W^{2,1}, W^{2,2}(x_1)$ sont indépendants, et de même, les variables aléatoires U_1^1, U_2^1, ainsi que U_1^2, U_2^2 sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(U_1^1, U_2^1) = \mathcal{L}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, W^{1,2}_{\tau_2^{1,n}}),\\
&\text{et } \mathcal{L}(U_1^2, U_2^2|U_1^1 = x_1, U_2^1 = x_2) = \mathcal{L}(W^{2,1}_{\tau_1^{2,n}(x_1)}, W^{2,2}_{\tau_2^{2,n}(x_1,x_2)}(x_1)).
\end{aligned}$$

On itère ensuite de façon évidente le procédé, ce qui nous donne l'existence de temps d'arrêts $\tau_1^{1,n}, \cdots, \tau_n^{1,n}, \tau_1^{2,n}(x_1), \tau_2^{2,n}(x_1, x_2) \cdots, \tau_n^{2,n}(x_1, \cdots, x_n)$ adaptés aux filtrations engendrées par des mouvements browniens linéaires indépendants : $W^{1,1}, \cdots$, $W^{1,n}, W^{2,1}, W^{2,2}(x_1), \cdots, W^{2,n}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ où pour chaque $k = 3, \cdots, n$ et $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
W_t^{1,k} &= W^{1,k-1}_{t+\tau_{k-1}^{1,n}} - W^{1,k-1}_{\tau_{k-1}^{1,n}},\\
W_t^{2,k}(x_1, \cdots, x_{k-1}) &= W^{2,k-1}_{t+\tau_{k-1}^{2,n}(x_1,\cdots,x_{k-1})}(x_1, \cdots, x_{k-2})\\
&\quad - W^{2,k-1}_{\tau_{k-1}^{2,n}(x_1,\cdots,x_{k-1})}(x_1, \cdots, x_{k-2}).
\end{aligned}$$

Ces temps d'arrêt vérifient donc les relations:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(U_1^1, \cdots, U_n^1) = \mathcal{L}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,n}_{\tau_n^{1,n}})\\
&\text{et } \mathcal{L}(U_1^2, \cdots, U_n^2|U_1^1 = x_1, \cdots, U_n^1 = x_n)\\
&\quad = \mathcal{L}(W^{2,1}_{\tau_1^{2,n}(x_1)}, (W^{2,i}_{\tau_i^{2,n}(x_1,\cdots,x_i)}(x_1, \cdots, x_{i-1}))_{i=2,\cdots,n}).
\end{aligned}$$

Remarquons que d'après le théorème 4, pour chaque $k = 1, \cdots, n$, l'application $(x_1, \cdots, x_k) \mapsto \tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)$ est mesurable. D'autre part, puisque la matrice de covariance de W est diagonale, les mouvements browniens linéaires $W^{2,1}, W^{2,2}(x_1), \cdots, W^{2,n}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ sont indépendants de $W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,n}_{\tau_n^{1,n}}$, et donc:

$$\mathcal{L}(W^{2,1}_{\tau_1^{2,n}(x_1)}, (W^{2,i}_{\tau_i^{2,n}(x_1,\cdots,x_i)}(x_1, \cdots, x_{i-1}))_{i=2,\cdots,n})$$
$$= \mathcal{L}(W^{1,1}_{\tau_1^{2,n}(W_{\tau_1^{1,n}})}, (W^{2,i}_{\tau_i^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^{1,n}})}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,i-1}_{\tau_{i-1}^{1,n}}))_{i=2,\cdots,n} | \bigcap_{i=1}^{n} [W^{1,i}_{\tau_i^{1,n}} = x_i]).$$

Ceci étant valable pour toute suite $(x_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de C_n, et puisque les variables aléatoires $U_1^1, \cdots, U_n^1$ sont à valeurs dans C_n, nous déduisons des trois dernières relations que:

$$\mathcal{L}((U_i^1, U_i^2)_{i=1,\cdots,n})$$
$$= \mathcal{L}((W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, W^{1,2}_{\tau_1^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}})}), (W^{1,i}_{\tau_i^{1,n}}, W^{2,i}_{\tau_i^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}},\cdots,W^{1,i}_{\tau_i^{1,n}})}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,i-1}_{\tau_{i-1}^{1,n}}))_{i=2,\cdots,n})$$
$$= \mathcal{L}((W^1_{T_i^{1,n}} - W^1_{T_{i-1}^{1,n}}, W^2_{T_i^{2,n}} - W^2_{T_{i-1}^{2,n}})_{i=1,\cdots,n}),$$

si $T_0^{1,n} = T_0^{2,n} = 0$ et pour chaque $k = 1, \cdots, n$:

$$T_k^{1,n} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{1,n}, \ T_k^{2,n} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,i}_{\tau_i^{1,n}}).$$

En conséquence, nous avons:

$$\mathcal{L}((W^1_{T_k^{1,n}}, W^2_{T_k^{2,n}})_{k=1,\cdots,n}) = \mathcal{L}((\frac{S_k}{\sqrt{n}})_{k=1,\cdots,n}).$$

Les relations sont des conséquences faciles du théorème 4 et de la construction de $T_k^{1,n}$ et $T_k^{2,n}$. D'après le théorème 4 et la construction précédente, il existe pour chaque $p \geq 1$ une constante c telle que pour tout $n \geq 1$, $k = 1, \cdots, n$ et $x_1, \cdots, x_k \in C_n$:

$$E[\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)^p] \leq cE[(U_k^2)^{2p} | U_k^1 = x_k].$$

Alors, puisque U_k^1 ne prend ses valeurs que dans l'ensemble C_n:

$$\begin{aligned} E[\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)^p] &\leq \frac{cE[(U_k^2)^{2p} I_{(U_k^1 = x_k)}]}{\min_{k\geq 1} P(X_k^1 = \sqrt{n} x_k)} \\ &\leq \frac{cE[(U_k^2)^{2p}]}{\min_{k\geq 1} P(X_k^1 = \sqrt{n} x_k)} \\ &\leq \frac{c}{n^p} \frac{\max(|x|^{2p} : P(X_1^2 = x) > 0)}{\min_{x:P(X_1^1 = x) > 0} P(X_1^1 = x)} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité. La deuxième inégalité concernant le temps d'arrêt $\tau_k^{1,n}$ s'obtient de la même manière.

Pour les égalités, remarquons que pour chaque $n \geq 1$, $k = 1, \cdots, n$ et $x_1, \cdots, x_k \in C_n$, d'après le théorème 4 et la construction précédente:

$$E[(X_1^2)^2]E[\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)] = E[(U_k^2)^2 | U_1^1 = x_1, \cdots, U_k^1 = x_k].$$

Alors, puisque $\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}^{W^{2,k}(x_1,\cdots,x_{k-1})}$, et cette filtration est indépendante des filtrations $\mathcal{F}^{W^{1,1}}, \cdots, \mathcal{F}^{W^{1,k}}$, on a

$$\mathcal{L}(\tau_k^{2,n}(x_1, \cdots, x_k)) = \mathcal{L}(\tau_k^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^{1,n}}) | W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}} = x_1, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^{1,n}} = x_k)$$

et donc

$$E[(X_1^2)^2]E[\tau_k^{2,n}(W^{1,1}_{\tau_1^{1,n}}, \cdots, W^{1,k}_{\tau_k^{1,n}})] = E[(U_k^2)^2] = \frac{E[(X_1^2)^2]}{n}.$$

Enfin, l'égalité concernant $\tau_k^{2,n}$ est une conséquence directe du théorème 4 ∎

Nous pouvons maintenant prouver le lemme 1.

Preuve du lemme 1 Soit pour chaque $n \geq 1$, $(T^n_{[nt]})_{t \leq 1} = (T^{1,n}_{[nt]}, T^{2,n}_{[nt]})_{t \leq 1}$ la suite construite dans le lemme 3. Elle vérifie l'égalité en loi du lemme 1. Il reste donc à montrer le résultat de convergence. Par abus de notation, appelons comme dans l'énonçé du lemme 1 $(W_{T^n_{[nt]}})_{t \leq 1}$ le processus $(W^1_{T^{1,n}_{[nt]}}, W^2_{T^{2,n}_{[nt]}})_{t \leq 1}$.

Soit pour chaque $n \geq 1$, $\epsilon_n = 1/\log n$ et $\lambda_n = \log n/\sqrt{n}$. On a, si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t|] \\
&\leq E[\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| I_{(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| < \epsilon_n)}] \\
&\quad + E[\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| I_{(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| \geq \epsilon_n)}] \\
&\leq \epsilon_n + E[\sup_{t\leq 1} (W_{T^n_{[nt]}} - W_t)^2]^{1/2} P(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| \geq \epsilon_n)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or, puisque la mesure Q est à support compact, il est clair d'après le lemme 1 que

$$\sup_{n\geq 1} E[\sup_{t\leq 1} (W_{T^n_{[nt]}} - W_t)^2] < \infty,$$

et il suffit donc de prouver que

$$P(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pour obtenir le résultat du lemme 1. Notant pour chaque $t \leq 1$, $\vec{t} = (t, t)$, on a si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon_n) \\
&\leq P(\sup_{t\leq 1} |W_{T^n_{[nt]}} - W_t| > \varepsilon_n, \sup_{t\leq 1} |T^n_{[nt]} - \vec{t}| < \lambda_n) \\
&\quad + P(\sup_{t\leq 1} |T^n_{[nt]} - \vec{t}| \geq \lambda_n) \\
&\leq P(\sup_{|u-v|\leq \lambda_n} |W_u - W_v| \geq \varepsilon_n) + P(\sup_{t\leq 1} |T^n_{[nt]} - \vec{t}| \geq \lambda_n). \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité exponentielle donnant le module de continuité d'un mouvement brownien, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que, si $0 < \lambda_n < 1$:

$$P(\sup_{|u-v|\leq\lambda_n,\, u\leq 1+\lambda_n}|W_u - W_v| \geq \varepsilon_n) \leq c_1\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\varepsilon_n}\exp(-\frac{\varepsilon_n^2}{c_2\lambda_n}).$$

Puisque pour chaque $n \geq 1$, $0 < \lambda_n < 1$, nous obtenons la convergence vers 0 du premier terme de l'inégalité (1). Nous montrons maintenant que le deuxième terme de (1) tend lui aussi vers 0. Puisque d'après le lemme 3, $E[T^{i,n}_{[nt]}] = [nt]/n$ si $n \geq 1$, $t \leq 1$ et $i = 1, 2$, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}P(\sup_{t\leq 1}|T^n_{[nt]} - \vec{t}| \geq \lambda_n) &\leq P(\sup_{t\leq 1}|T^n_{[nt]} - E[T^n_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda_n}{2})\\ &\quad + P(\sup_{t\leq 1}|\frac{[nt]}{n} - t| \geq \frac{\lambda_n}{2\sqrt{2}})\\ &\leq P(\sup_{t\leq 1}|T^n_{[nt]} - E[T^n_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda_n}{2}),\end{aligned}$$

si n est tel que $\lambda_n > 2\sqrt{2}/n$. Or, si $n \geq 1$:

$$P(\sup_{t\leq 1}|T^n_{[nt]} - E[T^n_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda_n}{2}) \leq \sum_{j=1}^{2} P(\sup_{t\leq 1}|T^{j,n}_{[nt]} - E[T^{j,n}_{[nt]}]| \geq \frac{\lambda_n}{4}).$$

Majorons l'expression correspondant à $j = 2$ à l'intérieur de cette somme (le cas $j = 1$ se traitant d'une façon plus simple). Utilisant la définition de $T^{2,n}_k$ (si $n \geq 1$ et $k = 1, \cdots, n$) donnée dans le lemme 3, on obtient:

$$P(\max_{k\leq n}|T^{2,n}_k - E[T^{2,n}_k]| \geq \frac{\lambda_n}{4}) = P(\max_{k\leq n}|\sum_{i=1}^{k}\{\tau^{2,n}_i(W^{1,1}_{\tau^{1,n}_1}, \cdots, W^{1,i}_{\tau^{1,n}_i})\}| \geq \frac{\lambda_n}{4})$$

$$= \sum P(\max_{k\leq n}|\sum_{i=1}^{k}\{\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i)\}| \geq \frac{\lambda_n}{4})P(W^{1,1}_{\tau^{1,n}_1} = x_1)\cdots P(W^{1,n}_{\tau^{1,n}_n} = x_n)$$

(ou l'on somme sur tous les éléments $x_1, \cdots, x_n \in C_n$) car, d'après le lemme 3, il y indépendance entre $(\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i))_{i\leq n}$ et $(W^{1,i}_{\tau^{1,n}_i})_{i\leq n}$, et donc

$$\mathcal{L}((\tau^{2,n}_i(W^{1,1}_{\tau^{1,n}_1}, \cdots, W^{1,i}_{\tau^{1,n}_i}))_{i\leq n}) = \mathcal{L}((\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i))_{i\leq n}|\bigcap_{i=1}^{n}[W^{1,i}_{\tau^{1,n}_i} = x_i]).$$

Le processus $(\sum_{i=1}^{k}\{\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i)\})_k$ étant une martingale, on obtient d'après l'inégalité de Doob et l'inégalité du lemme 3 appliquée avec $p = 2$:

$$\begin{aligned}P(\max_{k\leq n}|\sum_{i=1}^{k}\{\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i)\}| \geq \frac{\lambda_n}{4}) &\leq \frac{16}{\lambda_n^2}E[(\sum_{i=1}^{n}\{\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i)\})^2]\\ &\leq \frac{32}{\lambda_n^2}\sum_{i=1}^{n}E[(\tau^{2,n}_i(x_1, \cdots, x_i))^2]\\ &\leq \frac{c}{\lambda_n^2}\frac{n}{n^2} = \frac{c}{\lambda_n^2 n},\end{aligned}$$

qui converge vers 0 d'après notre choix pour la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ■

Avant de prouver le lemme 2, nous énonçons un lemme, établi par Westwater ([23], lemme 5):

Lemme 4 *Soit $(U_i)_i$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Supposons qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que pour tout $i \geq 1$ et p pair : $||U_i||_{L^p} \leq k_2 p^{k_1}$. Alors, pour chaque $n \geq 1$:*

$$||\sum_{i=1}^{n}\{U_i\}||_{L^p} \leq 2k_2 p^{k_1+1/2}\sqrt{n}.$$

Preuve du lemme 2 Dans la suite de cette preuve, c désignera une constante dont la valeur pourra varier de ligne en ligne. On peut supposer que s et t sont tels que pour chaque $n \geq 1$, $[nt] \geq [ns]+1$.

Il est clair que pour chaque $n \geq 1$, si

$$E_n^{s,t} = \{(i,j) \in I\!N^2 \,:\, i = [ns], \cdots, [nt]-1;\ j = i+1, \cdots, [nt]\},$$

on a:

$$\gamma_n(z, D_{[nt]}) - \gamma_n(z, D_{[ns]}) = \gamma_n(z, \{0, \cdots, [ns]-1\} \times \{[ns]+1, \cdots, [nt]\}) + \gamma_n(z, E_n^{s,t}).$$

Or, d'après le lemme 2 iii), pour chaque entier pair p:

$$\begin{aligned} ||\gamma_n(z, \{0, \cdots, [ns]-1\} \times \{[ns]+1, \cdots, [nt]\})||_{L^p} &\leq c\,\frac{\sqrt{[ns]([nt]-[ns])}}{n} \\ &\leq c\sqrt{\frac{[nt]-[ns]}{n}}, \end{aligned}$$

et il reste donc à montrer que $||\gamma_n(z, E_n^{s,t})||_{L^p}$ vérifie aussi une inégalité du même type. Dans ce but, on introduit l'équivalent discret de la partition utilisée par Le Gall [10]. Si $\kappa = \min(i \,:\, 2^i > [nt]-[ns])$, on note pour chaque $\xi = 0, \cdots, \kappa-1$ et $\eta = 0, \cdots, 2^\xi - 1$:

$$A_\eta^\xi = \{(i,j) \in D_{[nt]-[ns]} \ :\ \exists i_0, j_0 < 2^{\kappa-\xi-1};\ i = \eta 2^{\kappa-\xi} + i_0,\ j = (\eta + \frac{1}{2})2^{\kappa-\xi} + j_0\}.$$

Les $(A_\eta^\xi)_{\xi=0,\cdots,\kappa-1,\eta=0,\cdots,2^\xi-1}$ sont disjoints et

$$D_{[nt]-[ns]} = \bigcup_{\xi=0}^{\kappa-1}\bigcup_{\eta=0}^{2^\xi-1} A_\eta^\xi.$$

Notons de plus, pour $\xi = 0, \cdots, \kappa-1$ et $\eta = 0, \cdots, 2^\xi - 1$, $P(\eta, \xi)$ l'ensemble des $(i,j) \in I\!N^2$ tels que :

$$\begin{aligned} i &= [ns] + \eta 2^{\kappa-\xi}, \cdots, [ns] + \eta 2^{\kappa-\xi} + 2^{\kappa-\xi-1} - 1 \\ j &= [ns] + \eta 2^{\kappa-\xi} + 2^{\kappa-\xi-1}, \cdots, [ns] + \eta 2^{\kappa-\xi} + 2^{\kappa-\xi} - 1. \end{aligned}$$

Il vient, avec un décomposition évidente:

$$\gamma_n(z, E_n^{s,t}) = \frac{1}{n}\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\sum_{(i,j)\in A_\eta^\xi}\{I_{\{S_{j+[ns]}-S_{i+[ns]}=z\}}\} = \sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\gamma_n(z, P(\eta,\xi)).$$

Or, d'après le lemme 2 iii), pour chaque $\xi = 0, \cdots, \kappa-1$ et $\eta = 0, \cdots, 2^\xi - 1$:

$$||\frac{1}{n}\sum_{(i,j)\in P(\eta,\xi)} I_{(S_j-S_i=z)}||_{L^p} \leq c\frac{2^{\kappa-\xi}}{n} \leq c\frac{[nt]-[ns]}{n}2^{-\xi}.$$

Par indépendance des variables $(\gamma_n(z, P(\eta,\xi)))_{\eta=0,\cdots,2^\xi-1}$, le lemme 4 implique alors que pour chaque $\xi = 0, \cdots, \kappa - 1$:

$$||\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\gamma_n(z, P(\eta,\xi))||_{L^p} \leq c\frac{[nt]-[ns]}{n}2^{-\frac{\xi}{2}}.$$

Par suite, d'après l'inégalité triangulaire:

$$||\gamma_n(z, E_n^{s,t})||_{L^p} \leq \sum_{\xi=0}^{\kappa-1}||\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\gamma_n(z, P(\eta,\xi))||_{L^p} \leq c\frac{[nt]-[ns]}{n}\sum_{\xi=0}^{\kappa-1}2^{-\frac{\xi}{2}} \leq c\frac{[nt]-[ns]}{n},$$

d'où l'inégalité recherchée ∎

IV- Preuve du Corollaire 1

Le corollaire 1 sera une conséquence du lemme suivant:

Lemme 5 *Pour tout $g \geq 0$, il existe une constante $c(g)$ telle que*

$$\sup_{n\geq 1} E[\exp(-g\gamma_n(0, D_n))] \leq c(g).$$

Remarque D'après le théorème 1, ce lemme entraîne que $\gamma(0, \Delta_1)$ admet des moments exponentiels. A ce sujet, un résultat plus général a été obtenu par Le Gall [13] et Pitman-Yor [14], à l'aide de méthodes très différentes.

Preuve du corollaire 1 Soit f une fonction continue bornée. Nous voulons prouver que $\mu_g^n(f) \to \mu_g(f)$ si $n \to \infty$. Or, pour chaque $n \geq 1$,

$$\mu_g^n(f) = \frac{1}{L_g^n}E[f((\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}})_{t\leq 1})\exp(-g\gamma_n(0, D_n))],$$

si $\overline{L_g^n} = L_g^n \exp(-g/nE[\sum_{i<j\le n} I_{(S_i=S_j)}])$. D'après le lemme 5 et le fait que f est borné, la suite $(f((S_{[nt]}/\sqrt{n})_{t\le 1})\exp(-g\gamma_n(0,D_n)))_{n\ge 1}$ est évidemment uniformément intégrable et donc, d'après le théorème 1,

$$E[f((\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}})_{t\le 1})\exp(-g\gamma_n(0,D_n))]\xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(W)\exp(-g\gamma(0,\Delta_1))].$$

De même, $\overline{L_g^n}$ converge vers L_g et donc $\mu_g^n(f)$ converge vers $\mu_g(f)$ si n tend vers l'infini ■

Preuve du lemme 5 Il s'agit en fait d'une version discrète de la méthode habituellement utilisée pour montrer que $\gamma(0,\Delta_1)$ admet des moments exponentiels (voir Varadhan [21]).

Soit $t \in I\!R_+$. Si pour chaque $n \ge 1$, $\kappa = \min(i : 2^i > [nt])$, on introduit de nouveau pour chaque $\xi = 0,\cdots,\kappa-1$ et $\eta = 0,\cdots,2^\xi - 1$:

$$A_\eta^\xi = \{(i,j) \in D_{[nt]} \ : \ \exists i_0, j_0 < 2^{\kappa-\xi-1},\ i = \eta 2^{\kappa-\xi} + i_0,\ j = (\eta + \frac{1}{2})2^{\kappa-\xi} + j_0\}.$$

De plus, notons pour chaque $n \ge 1$ et $\xi = 0,\cdots,\kappa-1$, $\beta_n(\xi)$ la variable aléatoire

$$\beta_n(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\sum_{(i,j)\in A_\eta^\xi} I_{(S_i=S_j)}.$$

Enfin, pour chaque $n \ge 1$ et $0 \le u < v$, appelons

$$\gamma_n^{u,v} = \frac{1}{n}\sum_{i=[nu]}^{[nv]-1}\sum_{j=i+1}^{[nv]}\{I_{(S_i=S_j)}\}.$$

Remarquons que $\gamma_n^{0,t} = \gamma_n(0, D_{[nt]}) = \sum_{\xi=0}^{\kappa-1}\{\beta_n(\xi)\}$.

D'après le lemme 2 iii), il existe une constante c_1 telle que pour chaque $n \ge 1$ et $\xi = 0,\cdots,\kappa-1$:

$$E[\beta_n(\xi)] \le c_1 \sum_{\eta=0}^{2^\xi-1}\frac{2^{\kappa-\xi-1}}{n} \le c_1 t.$$

Alors, pour tout $k = 1,\cdots,\kappa-1$, d'après l'inégalité de Tchebytchev:

$$\begin{aligned}P(\gamma_n^{0,t} \le -2c_1tk) &\le P(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1}\{\beta_n(\xi)\} \le -2c_1tk + \sum_{\xi=0}^{k-1}E[\beta_n(\xi)])\\ &\le \frac{E[(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1}\{\beta_n(\xi)\})^2]}{(c_1tk)^2} \le \frac{(\sum_{\xi=k}^{\kappa-1}\|\{\beta_n(\xi)\}\|_{L^2})^2}{(c_1tk)^2}.\end{aligned}$$

Or, pour chaque $n \ge 1$, $\xi = 0,\cdots,\kappa-1$ et $\eta = 0,\cdots,2^\xi-1$, on a d'après le lemme 2 iii):

$$\|\sum_{(i,j)\in A_\eta^\xi} I_{(S_i=S_j)}\|_{L^2} \le c_1 t 2^{-\xi}.$$

Par suite, d'après le lemme 5, $||\{\beta_n(\xi)\}||_{L^2} \leq c_2 t 2^{-\xi}$, pour une certaine constante c_2. Ainsi, pour chaque $k = 0, \cdots, \kappa - 1$:

$$P(\gamma_n^{0,t} \leq -2c_1 tk) \leq \frac{c_2^2}{2^k k^2 (c_1(1 - 2^{-1/2}))^2}.$$

Posons $c_3 = c_2^2 (c_1(1 - 2^{-1/2}))^{-2}$. En utilisant le fait que pour chaque $n \geq 1$,

$$\Omega = \bigcup_{k \geq 1} \{-2c_1 t(k+1) < \gamma_n^{0,t} \leq -2c_1 tk\} \bigcup \{\gamma_n^{0,t} > -2c_1 t\},$$

nous obtenons pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} E[\exp(-g\gamma_n^{0,t})] &\leq \exp(2gtc_1)(1 + \sum_{k \geq 1} \exp(2gc_1 tk) P(\gamma_n^{0,t} \leq -2c_1 tk)) \\ &\leq \exp(2gtc_1)(1 + c_3 \sum_{k \geq 1} \frac{\exp(2gc_1 t - \log 2)k}{k^2}), \end{aligned}$$

et donc $\sup_{n \geq 1} E[\exp(-g\gamma_n^{0,t}] < \infty$ pour tout couple (g, t) tel que $gt \leq c_4 := \log 2/(2c_1)$. De même, il est clair que la preuve précédente permet de prouver que, si $0 \leq u < v$ sont tels que $g(v-u) \leq c_4$, alors

$$\sup_{n \geq 1} E[\exp(-g\gamma_n^{u,v})] < \infty. \tag{2}$$

Soit alors $g > 0$ tel que $g \leq 2c_4$. Nous avons pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_n(0, D_n) = \gamma_n^{0,1} &= \gamma_n^{0,1/2} + \gamma_n^{1/2,1} + \gamma_n(0, \{0, \cdots, [\frac{n}{2}] - 1\} \times \{[\frac{n}{2}] + 1, \cdots, n\}) \\ &\geq \gamma_n^{0,1/2} + \gamma_n^{1/2,1} - \frac{1}{n} E[\sum_{i=0}^{[n/2]-1} \sum_{j=[n/2]+1}^{n} I_{(S_i = S_j)}] \\ &\geq \gamma_n^{0,1/2} + \gamma_n^{1/2,1} - c_5, \end{aligned}$$

pour une certaine constante c_5, d'après le lemme 2 iii). Alors, par indépendance de $\gamma_n^{0,1/2}$ et $\gamma_n^{1/2,1}$:

$$E[\exp(-g\gamma_n(0, D_n))] \leq \exp(gc_5) E[\exp(-g\gamma_n^{0,1/2})]\, E[\exp(-g\gamma_n^{1/2,1})],$$

qui est fini d'après (2) et le fait que $g \leq 2c_4$.

Lorsque g est quelconque, on peut trouver $k \geq 1$ tel que $g \leq 2^k c_4$. On itère alors le procédé précédent, ce qui donne le résultat ∎

Références

[1] R.F.Bass, D.Khoshnevisan - *Intersection Local Times and Tanaka Formulas*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 29, no. 3, p.391-418, (1993).

[2] P.Billingsley - **Convergence of Probability Measures**, Wiley and Sons, New-York, (1968).

[3] A.N.Borodin - *On the asymptotic behavior of Local Times of recurrent Random Walks with finite variance*, Theory Prob. Appl., vol. XXVI no 4, p.758-772, (1981).

[4] D.C.Brydges, G.Slade - *The diffusive phase of a model of self-interacting walks*, Probab. Theory Relat. Fields, 103, p.285-315, (1995).

[5] B.Cadre - *Etudes de convergences en loi de fonctionnelles de processus : Formes quadratiques ou multilinéaires aléatoires, Temps locaux d'intersection de marches aléatoires, Théorème central limite presque sûr*, Thèse de l'Université de Rennes I, (1995).

[6] E.Csàki, P.Révész - *Strong invariance for Local Times*, Z. Wahrs. verw Gebiete, vol. 62, p.263-278, (1983).

[7] C.Domb, G.S.Joyce - *Cluster expansion for a Polymer Chain*, J. Phys. C5, p.956-976, (1975).

[8] D.Geman, J.Horowitz, J.Rosen - *The Local Time of intersection for Brownian Paths in the Plane*, Ann. Prob., vol. 12, p.86-107, (1984).

[9] E.Haeusler - *An exact rate of convergence in the Functional Limit Theorem for special Martingale difference array*, Z. Wahrs. verw Gebiete, vol. 65, p.523-534, (1984).

[10] J.F.Le Gall - *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan*, Sém. Prob. XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, p.314-331, (1985).

[11] J.F.Le Gall - *Some properties of Planar Brownian Motion*, Ecole d'été de Saint-Flour XX, Lect. Notes in Math., vol. 1527, Springer, Berlin, (1992).

[12] J.F.Le Gall - *Marches aléatoires auto-évitantes et modèles de polymères*, non publié.

[13] J.F.Le Gall - *Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of Planar Brownian Motion*, Sém. Prob. XXVIII, Lect. Notes in Math., vol. 1583, Springer, Berlin, p.172-180, (1994).

[14] J.W.Pitman, M.Yor - Appendice 1 de *Quelques identités en loi pour les processus de Bessel*, Société Mathématique de France, Astérisque, vol. 236, p.249-276, (1996).

[15] D.Revuz, M.Yor - **Continuous Martingales and Brownian Motion**, Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[16] J.Rosen - *A Local Time approach to the self-intersection of Brownian Motion Paths in Space*, Comm. Math. Phys., vol. 88, p.327-338, (1983).

[17] J.Rosen - *A renormalized Local Time for multiple intersection of Planar Brownian Motion*, Sém. Prob. XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer, Berlin, p.515-531, (1986).

[18] J.Rosen - *Random Walks and intersection Local Time*, Ann. Prob., vol. 18 no 3, p.959-977, (1990).

[19] F.Spitzer - **Principle of Random Walks**, Van Nostrand, Princeton, New-York, (1964).

Université de Sc... Département de Mathém... Bibliot...

[20] A.Stoll - *Invariance Principles for Brownian intersection Local Time and Polymer Measures*, Math. Scand., vol. 64, p.133-160, (1989).

[21] S.R.S.Varadhan - Appendix to **Euclidean Quantum Field Theory**, by K.Symanzik, in **Local Quantum Theory**, R.Jost (Ed.), Academic Press, New-York, (1969).

[22] W.Werner - *Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 29, no. 3, p.419-451, (1993).

[23] J.Westwater - *On Edward's Model for long Polymer Chain*, Comm. Math. Phys., vol. 72, p.131-174, (1980).

[24] M.Yor - *Sur la représentation comme intégrale stochastique du temps d'occupation du mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$, Sém. Prob. XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer, Berlin, p.543-552, (1986).